TOPOLOGÍA ALGEBRAICA- 2023
PRÁCTICA TRES
Cohomología

1. Sea $X = \{x \in \mathbb{R}^2, 1/2 \leq \|x\| \leq 1\}$. Mostrar gráficamente que $H^1(X, \mathbb{Z}_2) \neq 0$ usando curvas (que representen algún cociclo que no es coborde) en alguna triangulación de X .
2. Se define la comohomología reducida de un espacio (o CW o complejo simplicial) X con coeficientes en un grupo abeliano G similarmente a la forma que definimos la cohomología no reducida, pero comenzando con el complejo aumentado de X (con la aumentación $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$) en lugar del complejo usual (singular, simplicial, celular) y luego aplicando $Hom(-, G)$ y calculando la cohomología. Así se obtienen los grupos $\tilde{H}^n(X; G)$. Notar que $\tilde{H}^n(X; G) = H^n(X; G)$ para todo $n \geq 1$. Probar que si X es un complejo simplicial, $\tilde{H}^0(X; G)$ son las funciones de los vértices de X a G que son constantes en cada componente arco-conexa módulo las funciones que son constantes en todo X .
3. Calcular (por definición utilizando la estructura celular y sin utilizar el teorema de coeficientes universales) la cohomología de N_g , la superficie cerrada no orientable de género g , con coeficientes en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_2$.
4. Calcular (siguiendo argumentos y herramientas similares a los realizados en la clase para las superficies M_g) el producto cup

$$\cup : H^1(N_g; \mathbb{Z}_2) \times H^1(N_g; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^2(N_g; \mathbb{Z}_2).$$

5. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $n, m \geq 2$ y sea X el espacio que se obtiene de S^n adjuntándole una $n + 1$ -celda vía una función de adjunción $\phi : S^n \rightarrow S^n$ de grado m . Notar que $\tilde{H}_k(X) = 0$ para $k \neq n$ y $H_n(X) = \mathbb{Z}_m$. Probar que:
 - a) El cociente $q : X \rightarrow X/S^n = S^{n+1}$ induce el morfismo trivial en $\tilde{H}_k$ para todo k pero no es trivial en $H^{n+1}(-; \mathbb{Z})$. (Este ejemplo dice que el isomorfismo del teorema de coeficientes universales no es natural).
 - b) La inclusión $S^n \rightarrow X$ induce el morfismo trivial en $\tilde{H}^k(-; \mathbb{Z})$ para todo k pero no trivial en H_n .