Topología Algebraica- 2023
Práctica Dos
Homología

1. *a)* Sea $A \subseteq X$ subespacio. Probar que $H_0(X, A) = 0$ si y sólo si toda componente arcoconexa de X interseca a A.
   b) Probar que $H_1(X, A) = 0$ si y sólo si $H_1(A) \to H_1(X)$ es epi y toda componente arcoconexa de X contiene a lo sumo una componente arcoconexa de A.

2. Calcular $H_n(X, A)$ para $X = S^2$ y A un conjunto finito de puntos.

3. Sean $x_1, \ldots, x_m$ puntos de $\mathbb{R}^n$. Calcular $H_q(\mathbb{R}^n - \{x_1, \ldots, x_m\})$.

4. Calcular $H_q(S^n - X)$ para X un subespacio homeomorfo a $S^k \coprod S^l$.

5. Idem ejercicio anterior pero para X homeomorfo a $S^k \bigvee S^l$.

6. Probar que $\tilde{H}_q(S^n - X) = \tilde{H}_{n-q-1}(X)$ si $X \subset S^n$ es homeomorfo a un grafo finito conexo.

7. *a)* Sea $A \subset X$ retracto (es decir, existe $r : X \to A$ continua tal que $ri = 1_A$). Probar que $H_q(X) = H_q(A) \oplus H_q(X, A)$.
   b) Sea X espacio topológico y sea $p \in S^n$. Deducir del item anterior que
   $$H_q(X \times S^n) = H_q(X) \oplus H_q(X \times S^n, X \times \{p\})$$
   c) Probar la sucesión relativa de Mayer-Vietoris: Sea (X, Y) par topológico, sean $A, B \subset X$ tales que $int\ A \cup int\ B = X$ y sean $C \subset A$ y $D \subset B$ tales que $int\ D \cup int\ C = Y$. Probar que existe una sucesión exacta larga
   $$\ldots \to H_q(A \cap B, C \cap D) \to H_q(A, C) \oplus H_q(B, D) \to H_q(X, Y) \to \ldots$$
   d) Probar, usando el item anterior, que
   $$H_q(X \times S^n, X \times \{p\}) = H_{q-1}(X \times S^{n-1}, X \times \{p\})$$
   e) Deducir que
   $$H_q(X \times S^n, X \times \{p\}) = H_{q-n}(X)$$
   y por lo tanto se obtiene el siguiente resultado interesante:
   $$H_q(X \times S^n) = H_q(X) \oplus H_{q-n}(X)$$
   f) Calcular los grupos de homología de $S^n \times S^m$ y los del toro n-dimensional($S^1 \times \ldots \times S^1$).

8. Sean M y N variedades topológicas de la misma dimensión (es decir, ambas son Hausdorff y localmente homeomorfas a $\mathbb{R}^n$). Probar que, si M es compacta y N conexa, entonces toda función inyectiva y continua $h : M \to N$ es un homeomorfismo.

9. Sea σ un simplex de un complejo simplicial K y sean x e y puntos en el interior de σ. Probar que los grupos de homología local de $|K|$ en x y en y son isomorfos.

10. Recordar que una triangulación de un espacio topológico X por un complejo simplicial K es un homeomorfismo $h : |K| \to X$. Sea M una variedad topológica con borde ∂M. Supongamos que M admite una triangulación $h : |K| \to M$. Probar que $h^{-1}(\partial M) = |L|$ para algún subcomplejo $L < K$. (Sugerencia: ejercicio anterior).

11. Sea v un vértice de un complejo simplicial K. Probar que
$$H_q(|K|, |K| - v) = H_q(st(v), lk(v))$$
donde $st(v)$ es el star (cerrado) de v y $lk(v)$ el link.

12. Sea K complejo simplicial de dimensión n y sea $X = |K|$. Probar que para $q > n$, los grupos de homología local $H_q(X, X - x)$ son triviales y para $p = n$ existe al menos un grupo $H_n(X, X - x)$ que no es nulo.

13. Probar que para CW-complejos vale Mayer-Vietoris cambiando abiertos por subcomplejos. Es decir, se tiene sucesión exacta corta de complejos que involucra los complejos celulares de dos subcomplejos que cubren al complejo y de su intersección (y por lo tanto induce sucesión exacta larga en las homologías).

14. Calcular la homología del espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$ y la de la botella de Klein (usando homología celular).

15. Sea X el CW de dimensión 2 que tiene una 0-celda, una 1-celda y dos 2-celdas que se adjuntan al 1-esqueleto (que es S^1) con funciones de grado 2 y 3 respectivamente.
    a) Calcular la homología de todos los subcomplejos A de X y de los cocientes X/A.
    b) Probar que $X \simeq S^2$.

16. Sea X un CW-complejo finito y sean A, B subcomplejos de X que lo cubren. Probar que
$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$$

17. Sea X un espacio y ΣX su suspensión. Probar que $\tilde{H}_n(\Sigma X) \simeq \tilde{H}_{n-1}(X)$.

18. Dada una familia de grupos abelianos $\{G_n\}_{n \geq 2}$, construir un CW-complejo simplemente conexo X tal que $H_n(X) = G_n,\ \forall n \geq 2$.

19. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Probar que existe una única función ϕ que le asigna a cada CW-complejo finito un entero tal que
    a) $\phi(X) = \phi(Y)$ si X e Y son homeomorfos
    b) $\phi(X) = \phi(A) + \phi(X/A)$ si A es subcomplejo de X
    c) $\phi(S^0) = n$.

    Probar además que una tal función debe cumplir que $\phi(X) = \phi(Y)$ si $X \simeq Y$.

20. Sea $n \in \mathbb{N}$ par. Probar que toda función continua $f : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$ tiene puntos fijos.

21. Probar que toda función continua $f : S^n \to S^n$ es homotópica a una que tiene algún punto fijo.