Topología Algebraica - 2023
Práctica Cero
Preliminares y repaso: Homotopía, van Kampen, revestimientos

Notaciones: Recordar que una equivalencia homotópica $f : X \to Y$ es una función continua que admite inversa homotópica (es decir, existe alguna $g : Y \to X$ continua tal que las composiciones en ambos sentidos son homotópicas a las identidades).

Se dice que dos espacios tienen *el mismo tipo homotópico* si existe alguna equivalencia homotópica entre ambos. Por ejemplo, los espacios contráctiles son los espacios que tienen el mismo tipo homotópico que el singleton $*$.

Notaremos con S^n la esfera n-dimensional (los puntos de $\mathbb{R}^{n+1}$ de norma uno) y con D^n al disco cerrado n-dimensional (los puntos de $\mathbb{R}^n$ de norma menor o igual a 1). Notaremos con I al intervalo real $[0, 1]$.

Dada una homotopía $H : X \times I \to Y$, denotaremos $H_t : X \to Y$ a las funciones $H_t(x) = H(x, t)$ para $t \in I$.

1. Probar que si $q : X \to Y$ es cociente y Z es localmente compacto y Hausdorff entonces $q \times 1_Z : X \times Z \to Y \times Z$ es cociente (Sugerencia: Ley exponencial).

2. Probar que el cociente D^n/S^{n-1} es homeomorfo a S^n.

3. Sean X y Z espacios contráctiles. Probar que tienen el mismo tipo homotópico y que cualquier función continua entre ellos es una equivalencia homotópica.

4. Probar que la inclusión de S^{n-1} como el ecuador de S^n, se puede extender a las inmersiones $i^-, i^+ : D^n \to S^n$ del disco en el hemisferio sur (resp. norte) de la esfera. Más aún, i^- e i^+ son homotópicas pero no son homotópicas relativas a S^{n-1}.

5. Sea $A \subset X$ subespacio. Supongamos existe una función continua $H : X \times I \to X$ tal que
   a) $H(x, 0) = x \ \forall x \in X$
   b) $H(A \times I) \subset A$
   c) $H(a, 1) = a_0 \ \forall a \in A$
   Probar que la función cociente $q : X \to X/A$ es una equivalencia homotópica.

6. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ una unión de espacios convexos $X_1, \dots, X_m$ tales que $X_i \cap X_j \cap X_k \neq \emptyset$ para todo i, j, k. Probar que X es simplemente conexo.

7. Sea $n \geq 3$ y sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto finito. Probar que $\mathbb{R}^n - A$ es simplemente conexo.

8. Sea $X \subset \mathbb{R}^3$ una unión de n rectas por el origen. Calcular $\pi_1(\mathbb{R}^3 - X)$.

9. Sea X el espacio cociente de S^2 que se obtiene de identificar el polo norte y el polo sur en un punto. Calcular $\pi_1(X)$.

10. *a)* Probar que si $n > 1$, entonces toda función continua $S^n \to S^1$ es null-homotópica.
    b) Probar que toda función continua $\mathbb{R}P^2 \to S^1$ es null-homotópica.
    c) Exhibir una función $S^1 \times S^1 \to S^1$ que no sea null-homotópica.

11. Probar que si X es arcoconexo y localmente arcoconexo y $\pi_1(X)$ es finito, entonces toda función $X \to S^1$ es null-homotópica.

12. Sean E, B arcoconexos y localmente arcoconexos, y sea $p : E \to B$ un revestimiento, $b_0 \in B$, $e_0 \in p^{-1}(b_0)$. Una *transformación deck* es un homeomorfismo $h : E \to E$ tal que $ph = p$. El conjunto de transformaciones deck $\mathrm{Deck}(p)$ forman un grupo con la operación dada por la composición.
    a) Se dice que $p : E \to B$ es *normal* si para todo $b_0 \in B$ y $e_0, e_1 \in p^{-1}(b_0)$, existe una transformación deck tal que $h(e_0) = e_1$. Probar que p es normal si y sólo si $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$.
    b) Probar que si p es normal, $\mathrm{Deck}(p)$ es isomorfo al grupo cociente $\pi_1(B, b_0)/H$.
    c) Concluir que si $p : E \to B$ es revestimiento universal de B (es decir E es simplemente conexo), entonces $\pi_1(B, b_0)$ es isomorfo al grupo de transformaciones deck.

13. Describir el grupo de transformaciones deck del revestimiento usual $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$.

14. Sea $n \geq 3$ y sea $B \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio acotado tal que $\mathbb{R}^n - B$ es arcoconexo. Probar que la inclusión $\mathbb{R}^n \hookrightarrow S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ induce un isomorfismo (con cualquier punto base fijado)
$$i_* : \pi_1(\mathbb{R}^n - B) \to \pi_1(S^n - B)$$
(Sug: Usar van Kampen. Notar que cerca de cualquier punto $p \in S^n$ podemos encontrar abiertos tan chicos como querramos homeomorfos a discos abiertos $(D^n)^\circ$.)
    Nota al margen: El resultado del ejercicio anterior es fundamental en teoría de nudos. El grupo de un nudo B en $\mathbb{R}^3$ es el grupo fundamental de su complemento en $\mathbb{R}^3$. Muchas veces es conveniente pensar al nudo B metido en S^3 y este resultado dice que es lo mismo calcular su grupo (=grupo fundamental de su complemento) si lo pensamos metido en R^3 que en S^3.

15. Sean X e Y espacios topológico arcoconexos y localmente arcoconexos, y sean $p : \tilde{X} \to X$ y $q : \tilde{Y} \to Y$ revestimientos con $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ simplemente conexos. Probar que si X e Y son homotópicamente equivalentes, entonces $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ también lo son. (Sug: no subestimar este ejercicio)