Topología Algebraica- 2023
Ejercicio adicional para entregar

Morfismos simpliciales contiguos

Dos morfismos simpliciales $\phi, \psi : K \to L$ se dicen contiguos si para todo simplex $\sigma \in K$, $\phi(\sigma) \cup \psi(\sigma)$ es un simplex de L. Esto define una relación simétrica y reflexiva pero no necesariamente transitiva. La hacemos transitiva: decimos que $\phi, \psi : K \to L$ tienen la misma clase de contigüidad (y denotamos $\phi \sim \psi$) si existe una sucesión finita de morfismos $\phi_1, \ldots, \phi_r : K \to L$ tales que $\phi_1 = \phi, \phi_r = \psi$ y ϕ_i es contiguo a ϕ_{i+1} para todo i.

Probar que:

1. Si $\phi, \psi : K \to L$ tienen la misma clase de contigüidad entonces sus realizaciones $|\phi|, |\psi|$ son funciones homotópicas.
2. Sea K el borde del 2-simplex (notar que $|K| = S^1$). Notar que toda función $\phi : K^{(0)} \to K^{(0)}$ induce un morfismo simplicial $\phi : K \to K$ y por lo tanto existen 27 morfismos simpliciales $\phi : K \to K$. Probar que, de esos 27 morfismos, los 21 morfismos que no son biyectivos en vértices tienen la misma clase de contigüidad y cada uno de los 6 morfismos restantes constituye una clase de contigüidad distinta. Es decir: hay 7 clases de contigüidad de morfismos simpliciales de K en K.
3. Siguiendo con el ejemplo del ítem anterior, probar que las realizaciones de los 21 morfismos no biyectivos son homotópicas a funciones constantes de $|K| = S^1$ en S^1. De los 6 morfismos restantes, las realizaciones de los 3 morfismos que corresponden a permutaciones pares de los vértices son homotópicas a la identidad de S^1 y las realizaciones de los 3 morfismos que corresponden a permutaciones impares son homotópicas a la función $S^1 \to S^1$ que lo recorre en sentido inverso. En conclusión: las 7 clases de contigüidad determinan 3 clases de homotopía en las realizaciones. Esto prueba que $|\phi| \simeq |\psi|$ no implica $\phi \sim \psi$ (contigüidad en general es estrictamente más fuerte que homotopía a nivel continuo).
4. Pensar otro ejemplo de morfismos simpliciales que no tengan la misma clase de contigüidad pero sus realizaciones sean homotópicas.