

TOPOLOGÍA ALGEBRAICA- 2019
NOTAS - EJERCICIO GUIADO
Poliedros asociados a relaciones.

El objetivo de estas notas es probar un resultado de C.H. Dowker sobre complejos simpliciales asociados a relaciones [Do] (ver también [BBMP, Section 7]).

Sean X e Y conjuntos y R una relación entre ellos, es decir un subconjunto $R \subseteq X \times Y$. Dados $x \in X$ e $y \in Y$, denotaremos xRy si $(x, y) \in R$.

A partir de una relación R construimos dos complejos simpliciales K y L de la siguiente forma. El complejo K tiene como vértices a los elementos de X y sus n -símplices son los subconjuntos $\{x_0, \dots, x_n\}$ tales que existe un $y \in Y$ con x_iRy para todo $i = 0, \dots, n$. El complejo L se construye análogamente, tomando como símplices a los subconjuntos finitos $\{y_0, \dots, y_n\}$ de Y tales que existe un $x \in X$ con xRy_j para todo j .

Notar que los complejos simpliciales K y L pueden ser muy distintos entre sí. El resultado principal de estas notas dice que, de todas formas, los poliedros $|K|$ y $|L|$ son homotópicamente equivalentes (en particular tienen grupos fundamentales isomorfos y la misma homología).

Para empezar, recordemos que la subdivisión baricéntrica de un complejo T , que denotaremos T' puede ser caracterizada combinatoriamente como el complejo simplicial cuyos vértices son los símplices de T y los símplices son los conjuntos ordenados de símplices de T , (s_0, \dots, s_n) tales que s_i es cara de s_{i+1} para todo i .

Notar que todo morfismo $f : T \rightarrow M$ entre complejos simpliciales induce canónicamente un morfismo $f' : T' \rightarrow M'$ entre sus subdivisiones baricéntricas.

También necesitamos recordar la noción de morfismos simpliciales contiguos. Dos morfismos simpliciales $f, g : T \rightarrow M$ se dicen *elementalmente contiguos* si para todo simplex $\sigma \in T$ se tiene que $f(\sigma) \cup g(\sigma) \in M$. Dos morfismos simpliciales $f, g : T \rightarrow M$ se dicen *contiguos* si existe una sucesión finita de morfismos simpliciales $f = f_0, f_1, \dots, f_n = g : T \rightarrow M$ tales que f_i y f_{i+1} son elementalmente contiguos para todo i .

Ejercicio 1. Probar que si $f, g : T \rightarrow M$ son contiguos entonces $|f|, |g| : |K| \rightarrow |L|$ son funciones continuas homotópicas.

Ordenamos totalmente los vértices de T y definimos un morfismo simplicial

$$\Phi_T : T' \rightarrow T$$

asignándole a cada vértice s de T' el mínimo vértice de T contenido en s .

Ejercicio 2. Probar que Φ_T es efectivamente un morfismo simplicial.

Notar que la definición de Φ_T depende del orden elegido para los vértices. Si cambiamos el orden obtendremos claramente otro morfismo, pero ambos serán contiguos. Más generalmente, se tiene el siguiente resultado:

Ejercicio 3. Sea $f : T \rightarrow M$ un morfismo simplicial y sean T', M' las subdivisiones baricéntricas. Sea $f' : T' \rightarrow M'$ el morfismo simplicial inducido en las subdivisiones. Ordenamos los vértices de T y M y definimos los morfismos simpliciales

$$\Phi_T : T' \rightarrow T, \quad \Phi_M : M' \rightarrow M$$

como antes. Probar que $\Phi_M f'$ es contigua a $f \Phi_T$.

Volvamos ahora a la relación $R \subset X \times Y$ y a los complejos K, L inducidos por esta relación. Definimos un morfismo simplicial $\Gamma : K' \rightarrow L$ de la siguiente manera. Sea s vértice de K' , es decir un simplex de K . Por definición, $s = \{x_0, \dots, x_n\}$ y existe $y \in Y$ tal que $x_i R y$. Definimos $\Gamma(s) = y$.

Claramente, Γ depende del orden elegido y del y elegido. No es evidente tampoco que el morfismo sea simplicial. Esto vale y, además la clase de contigüidad no depende de las elecciones:

Ejercicio 4. *Probar que Γ es morfismo simplicial.*

Ejercicio 5. *Probar que la clase de contigüidad de Γ es independiente del orden y de los y elegidos.*

Por supuesto, intercambiando los roles de K y L obtenemos una definición análoga para un morfismo $\Psi : L' \rightarrow K$.

Tomando subdivisiones baricéntricas, los morfismos Γ y Ψ determinan los morfismos

$$\Gamma' : K'' \rightarrow L' \quad \text{y} \quad \Psi' : L'' \rightarrow K'$$

Consideremos ahora las composiciones $\Psi\Gamma'$ y $\Phi_K\Phi'_K : K'' \rightarrow K$ y análogamente, las composiciones $\Gamma\Psi'$, $\Phi_L\Phi'_L : L'' \rightarrow L$.

Ejercicio 6. *Probar que $\Psi\Gamma'$ y $\Phi_K\Phi'_K : K'' \rightarrow K$ son contiguas (análogamente con $\Gamma\Psi'$, $\Phi_L\Phi'_L : L'' \rightarrow L$). Deducir de esto el teorema principal: $|K|$ y $|L|$ son homotópicamente equivalentes.*

Observación 1. Si X es un conjunto y \mathcal{U} un cubrimiento por subconjuntos de X . Definimos la relación $R \subset X \times \mathcal{U}$ mediante xRU si $x \in U$. En este caso, el complejo K se denota $V(\mathcal{U})$ y se llama el complejo de Vietoris del cubrimiento. El complejo L se denota en este caso particular como $N(\mathcal{U})$ y se lo llama Nervio del cubrimiento. Del resultado principal de estas notas, se deduce que $|V(\mathcal{U})|$ y $|N(\mathcal{U})|$ son homotópicamente equivalentes.

Dado un complejo simplicial K de dimensión finita, se define su nervio $N(K)$ como el complejo simplicial cuyos vértices son los símlices maximales de K y los símlices son los conjuntos finitos de símlices maximales $\{s_0, \dots, s_n\}$ tales que su intersección es no vacía.

Ejercicio 7. *Probar, usando el resultado principal, que $|K|$ y $|N(K)|$ son homotópicamente equivalentes.*

REFERENCIAS

- [BBMP] Bak, A., Brown, R., Minian, G., Porter, T. *Global actions, groupoid atlases and related topics*. J. Homotopy Relat. Struct. 1 (2006) 101-167.
 [Do] Dowker, C.H. *Homology groups of relations*. Ann. of Math. 56 (1952) 84-95