Topología Algebraica- 2019
Práctica 7

1. Sea X un espacio de longitud. Probar que si existe un grupo que actúe geométricamente en X (es decir, propiamentre y cocompactamente por isometrías), entonces X es completo y localmente compacto (y por lo tanto, por el teorema de Hopf-Rinow, X resulta geodésico y propio).

2. Sea Γ un grupo, A un conjunto de generadores de Γ y $q : F(A) \to \Gamma$ el epimorfismo estándar del grupo libre generado por A en Γ. Sea $R \subset \ker q$ y sea K el 2-complejo que se obtiene del grafo de Cayley $C_A(\Gamma)$ adjuntando 2-celdas a todos los lazos de aristas etiquetados con las palabras $r \in R$. Probar que K es simplemente conexo si y solo si $<< R >>= \ker q$ (y por lo tanto, en este caso, $\langle A \mid R \rangle$ es una presentación de Γ).

3. Probar que si existe una quasi-isometría $f : X \to Y$ entonces existe una quasi-isometría $g : Y \to X$. Probar además que la composición de quasi-isometrías es quasi-isometría. Deducir que la propiedad de ser quasi-isométricos es una relación de equivalencia.

4. Sea Γ un grupo finitamente generado. Probar que si A, B son conjuntos finitos de generadores, entonces (Γ, d_A), (Γ, d_B), $C_A(\Gamma)$ y $C_B(\Gamma)$ son quasi-isométricos. Por lo tanto está bien definido la noción de quasi-isometría entre grupos finitamente generados (no depende del conjunto finito de generadores elegido) y se puede describir en términos de métrica de la palabra en el grupo o de la métrica en su grafo de Cayley.

5. Sea X métrico y Γ un grupo finitamente generado que actúa en X por isometrías. Sea A conjunto finito de generadores del grupo. Probar que para todo $x \in X$ fijo, existe una constante $c > 0$ tal que $d(gx, hx) \leq c.d_A(g, h)$ para todo $g, h \in \Gamma$.

6. Sea $\phi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ morfismo entre grupos finitamente generados. Probar que:
   a) Si ϕ es un embedding quasi-isométrico entonces $\ker \phi$ es finito.
   b) ϕ es quasi-isometría si y sólo si $\ker \phi$ y *coker* ϕ son finitos.

7. Sea X un espacio métrico y $R > 0$. Recordemos que el complejo de Rips $P_R(X)$ es el complejo simplicial que tiene como vértices a los elementos de X y como símplices a los subconjuntos finitos de X de diámetro menor o igual a R. Probar que si Y es δ-hiperbólico y $X \subset Y$ es un subespacio r-denso (es decir, todo elemento de Y está a distancia menor o igual a r de algún elemento de X), entonces $P_R(X)$ es contráctil para $R \geq 4\delta + 6r$. (Sug: modificar levemente la demostración hecha en clase para $P_R(Y)$).

8. Sea Γ grupo finitamente generado y A un conjunto finito de generadores. Consideramos a Γ con la métrica de la palabra d_A. Sea $R > 0$ y $P_R(\Gamma)$ el complejo de Rips. Probar que $P_R(\Gamma)$ es de dimensión finita y localmente finito. Probar además, que si Γ es hiperbólico, $P_R(\Gamma)$ es contráctil para R suficientemente grande.

9. Utilizando el ejercicio anterior y el hecho de que Γ actúa simplicialmente en $P_R(\Gamma)$ (via multiplicación a izquierda en sus vértices), probar el siguiente resultado: Si Γ es un grupo hiperbólico sin torsión, entonces admite un espacio de Eilenberg MacLane $K(\Gamma, 1)$ finito. En particular su homología $H_*(\Gamma)$ es finitamente generada.

10. Probar que si Γ' es un subgrupo de Γ de índice finito, entonces Γ y Γ' son quasi-isométricos.

11. Una presentación de Dehn de un grupo Γ es una presentación finita $\langle A \mid R \rangle$ tal que $R = \{u_1 v_1^{-1}, \dots, u_n v_n^{-1}\}$ con $l(v_i) < l(u_i)$ para todo i (donde $l(w)$ es el largo de la palabra w) y tal que toda palabra reducida $w \in F(A)$ que representa el elemento trivial en Γ tenga alguna de las u_i como subpalabra. (Veremos en clase que un grupo es hiperbólico si y sólo si admite una presentación de Dehn). Probar que:

a) Si Γ admite una presentación de Dehn entonces tiene el problema de la palabra resoluble (es decir existe un algoritmo que determina en finitos pasos si una palabra en los generadores es el elemento trivial o no en el grupo).

b) Si Γ admite presentación de Dehn, entonces la clase de conjugación de cualquier elemento de torsión $g \in \Gamma$ tiene finitos elementos (todo elemento de torsión tiene finitos conjugados).