Topología Algebraica- 2019
Práctica 6

1. Recordemos que si K es un 2-complejo combinatorio y v es un vértice de K, el grupo fundamental $\pi_1(K,v)$ se puede calcular tomando clases de equivalencias de loops dirigidos de aristas, donde la equivalencia es la generada por estos dos movimientos elementales: (I) agregar o borrar un subcamino de aristas de la forma $w\overline{w}$ o $\overline{w}w$ y (II) empujar a través de una 2-celda, es decir cambiar un loop de la forma $\alpha\mu\beta$ por $\alpha\eta\beta$ si $\mu\overline{\eta}$ es el borde de una 2-celda. Si c es un loop de aristas nullhomotópico definimos el $Area(c)$ como la mínima cantidad de movimientos de tipo (II) que se necesitan (junto con movimientos de tipo (I)) para llevar a c al loop constante. Recordemos también que un diagrama de van Kampen D para c es una función combinatoria $f : \Delta \to K$ (donde Δ es un disco singular, es decir un 2-complejo contráctil planar) tal que f restringida al borde de Δ es c, y el área del diagrama $Area(D)$ es la cantidad de 2-celdas de Δ. Probar que:

   a) Para todo loop nullhomotópico c y todo diagrama de van Kampen D para c, se tiene que $Area(c) \leq Area(D)$.

   b) Dado c loop nullhomotópico, existe un diagrama de van Kampen D para c tal que $Area(c) = Area(D)$.

   c) Si K es el 2-complejo asociado a una presentación finita $P = \langle S, R\rangle$, los loops de aristas (en el único vértice del complejo) se corresponden con palabras en el grupo libre $F(S)$ y los nullhomotópicos son precisamente las palabras que son 1 en el grupo Γ presentado por P. Probar que si $w = 1$ en Γ, entonces $Area(w)$ coincide con el mínimo n tal que w se escribe como productos de n conjugados de relaciones o sus inversos.

2. Recordar que la función de Dehn asociada a una presentación finita $P = \langle S, R\rangle$ es la función $\delta_P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$\delta_p(n) = max\{Area(w),\ l(w) \leq n\}$$

   donde $l(w)$ es la longitud de la palabra w. Probar que si P y P' son dos presentaciones finitas de un grupo Γ, entonces $\delta_p \sim \delta_{P'}$. (Recordar que dos funciones crecientes $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ son equivalentes si $f \preceq g$ y $g \preceq f$, donde $f \preceq g$ si existe una constante C tal que $f(n) \leq C.g(Cn + C) + C.n + C$. En particular si son equivalentes, tienen el mismo comportamiento: lineal, cuadrática, etc).

3. Probar que la función de Dehn de $\langle a|\ \rangle$ es $\delta(n) = 0$ y la de $\langle a, b|b\rangle$ es $\delta(n) = n$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ hallar una presentación del grupo $\mathbb{Z}$ tal que su función de Dehn sea $\delta(n) = k.n$.

4. Probar que los grupos finitos y los grupos libres (de rango finito) admiten funciones de Dehn lineales y que el grupo abeliano libre de rango 2 admite función de Dehn cuadrática.

5. Probar que un $\mathbb{R}$-espacio vectorial normado $(V, ||\ ||)$ es únicamente geodésico si y sólo si la bola unitaria es estrictamente convexa (es decir, para todo $u \neq v$ de norma 1, se tiene que $||(1-t)u + tv|| < 1$). Describir las geodésicas de $(\mathbb{R}^2, d_1)$ y $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ (las distancias inducidas por $||\ ||_1$ y $||\ ||_\infty$).

6. Probar que los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales con producto interno son únicamente geodésicos.

7. Probar que si un grafo métrico tiene shapes finitos (es decir, el conjunto de longitudes asignadas a sus aristas es finito) entonces resulta métrico completo y geodésico.

8. Probar que los árboles, con cualquier asignación de longitud a sus aristas resultan métricos geodésicos.

9. Sea Γ un grupo abeliano no cíclico. Admite un grafo de Cayley con ciclos de largo 3? Es verdad que todo grafo de Cayley de Γ contiene un ciclo de largo 4?.

10. Dibujar el grafo de Cayley del grupo diedral D_4 presentado por $\langle a, b | a^4, b^2, abab \rangle$ respecto del conjunto generador $\{a, b\}$.

11. Sea X un espacio métrico de longitud arco-conexo y $p : \tilde{X} \to X$ un homeomorfismo local (por ejemplo, un revestimiento), con $\tilde{X}$ Hausdorff y arco-conexo. Dada un curva $c : [a, b] \to \tilde{X}$, definimos su longitud como $\tilde{l}(c) = l(p \circ c)$ (la longitud en X de la composición). Se define una distancia en $\tilde{X}$ via

$$d(x, y) = inf\{\tilde{l}(c),\ c : [0, 1] \to \tilde{X}, c(0) = x,\ c(1) = y\}.$$

Probar que:

a) d es efectivamente una distancia en $\tilde{X}$.

b) La topología inducida por la distancia coincide con la topología original en $\tilde{X}$.

c) $p : \tilde{X} \to X$ resulta isometría local.

d) $(\tilde{X}, d)$ resulta espacio de longitud.

e) Si $p : \tilde{X} \to X$ es revestimiento, las transformaciones deck $\sigma : \tilde{X} \to \tilde{X}$ resultan isometrías con esta métrica en $\tilde{X}$. Por lo tanto, si $p : \tilde{X} \to X$ es el revestimiento universal, se tiene que $\pi_1(X, x)$ actúa en $(\tilde{X}, d)$ por isometrías.