Topología Algebraica- 2019

Práctica Cinco

1. Probar que $\mathbb{Z}_2$ es el único grupo no trivial que puede actuar libremente en una esfera de dimensión par.

2. Probar que $H_0(G) = \mathbb{Z}$ y $H_1(G) = G/[G,G]$ (el abelianizado de G) usando la resolución estándar.

3. Construir una resolución libre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial para $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

4. Se define la dimensión cohomológica de un grupo G, que denotamos $cd(G)$, como el mínimo n tal que $\mathbb{Z}$ admite una resolución proyectiva de largo n (como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial). Si todas las resoluciones proyectivas son infinitas decimos que $cd(G) = \infty$. Probar que si G tiene torsión, entonces $cd(G) = \infty$.

5. Probar que $cd(G) = 0$ si y sólo si G es el grupo trivial.

6. Se define la dimensión geométrica de G (denotada $gd(G)$) como el mínimo n tal que exista un $K(G,1)$ de dimensión n. Si todos los $K(G,1)$ son de dimensión infinita, decimos $gd(G) = \infty$. Probar que $cd(G) \leq gd(G)$.

7. Calcular la homología de $G = \mathbb{Z}^n$ y probar que $cd(\mathbb{Z}^n) = n$.

8. Calcular la homología de $G = \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$.