Topología Algebraica- 2019
Práctica Cuatro

1. Sea $i : A \to X$ una función continua, sea $M(i)$ el cilindro de la función i y sea $j : M(i) \to X \times I$ la función determinada por las funciones $i \times 1 : A \times I \to X \times I$ y $inc : X \times 0 \to X \times I$. Probar que son equivalentes:
   a) i es cofibración
   b) Para todo espacio Y y función continua $G : M(i) \to Y$ existe $H : X \times I \to Y$ tal que $Hj = G$
   c) Existe una función continua (retracción) $r : X \times I \to M(i)$ tal que $rj = 1$.

2. Deducir del ejercicio anterior que si $i : A \to X$ es una cofibración y X es Hausdorff, entonces $i : A \to X$ es subespacio cerrado.

3. Sean $B \subset A \subset X$ subespacios de un espacio X y sea $x \in B$. Probar que existe una sucesión exacta larga de grupos de homotopía
$$\ldots \to \pi_n(A, B, x) \to \pi_n(X, B, x) \to \pi_n(X, A, x) \to \pi_{n-1}(A, B, x) \to \ldots$$
donde los morfismos son los canónicos (inducidos por inclusiones y el morfismo de borde). Deducir, como caso particular, la sucesión exacta larga para grupos de homotopía de un par (X, A).

4. Probar que una equivalencia débil $f : Y \to Z$ induce biyecciones $[X, Y] \to [X, Z]$ (donde $[X, Y]$ denota el conjunto de clases homotópicas de funciones de X a Y) para todo CW-complejo X.

5. (Teorema de Whitehead para CW-complejos de dimensión 2). Sean X e Y CW-complejos de dimensión 2. Probar que si $f : X \to Y$ induce isomorfismos en π_1 y π_2 entonces f es equivalencia homotópica.

6. Buscar un ejemplo de una equivalencia débil $X \to Y$ para la cual no exista equivalencia débil $Y \to X$.

7. Decimos que dos espacios topológicos X e Y son débilmente equivalentes si existe una sucesión finita $X = X_0, X_1, \ldots, X_n = Y$ y equivalencias débiles $X_i \to X_{i+1}$ ó $X_{i+1} \to X_i$ para cada i. Probar que si X e Y son débilmente equivalentes entonces tienen una CW-aproximación en común, i.e. existe Z CW-complejo y equivalencias débiles $Z \to X$ y $Z \to Y$ (usar la existencia de CW-aproximación para cada espacio).