Topología Algebraica- 2019
Práctica Tres

1. Sean K y L complejos simpliciales y sea $n = \dim(K)$. Probar que toda función continua $f : |K| \to |L|$ es homotópica a una cuya imagen está contenida en el n-esqueleto de L. Deducir de esto que, si $n < m$, toda función continua $f : S^n \to S^m$ es nullhomotópica.

2. Sea $f : |K| \to |L|$ continua. Dado $\varepsilon > 0$, probar que existen subdivisiones K' y L' y $\phi : K' \to L'$ simplicial tal que $|\phi(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in |K|$.

3. Sean K y L CW-complejos finitos. Si K tiene una cantidad par de celdas y L una cantidad impar, entonces $|K|$ y $|L|$ no son homotópicamente equivalentes.

4. Dado un poset (conjunto parcialmente ordenado) finito X, definimos el complejo simplicial $\mathcal{K}(X)$ cuyos vértices son los elementos de X y los símplices son las cadenas de X (cadenas= subconjuntos totalmente ordenados). Si $f : X \to Y$ es un morfismo de posets (es decir, $x \leq x'$ implica $f(x) \leq f(x')$), se tiene un morfismo simplicial inducido $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ que en los vértices vale $\mathcal{K}(f)(x) = f(x)$. Probar que si $f, g : X \to Y$ son morfismos de posets y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, entonces $\mathcal{K}(f)$ y $\mathcal{K}(g)$ son homotópicas.

5. Probar que si X es un poset (finito) con máximo o con mínimo, entonces $\mathcal{K}(X)$ es contráctil.

6. Sea X poset finito. Definimos su caracterísitica de Euler $\chi(X) = \chi(\mathcal{K}(X))$. Probar que
$$\chi(X) = \sum_{c \in C(X)} (-1)^{\#c+1}$$
donde $C(X)$ es el conjunto de cadenas de X.

7. Dado X un poset finito y $f : X \to X$ un morfismo de posets, se define el subposet (eventualmente vacío)
$$X^f = \{x \in X,\ x = f(x)\} \subseteq X.$$
Probar, utilizando la versión simplicial del teorema de Lefschetz, que $\lambda(\mathcal{K}(f)) = \chi(X^f)$. En particular, si $\lambda(\mathcal{K}(f)) \neq 0$, entonces f tiene puntos fijos.

8. Utilizando el Teorema A de Quillen, probar el siguiente *Lema del Nervio:* Dado un complejo simplicial K y un cubrimiento finito $\mathcal{U}$ de K por subcomplejos, tales que las intersecciones arbitrarias de elementos de $\mathcal{U}$ son vacías o contráctiles, entonces K y el nervio del cubrimiento $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ son homotópicamente equivalentes.