

TOPOLOGÍA ALGEBRAICA- 2019
PRÁCTICA DOS

1. Probar que para CW-complejos vale Mayer-Vietoris cambiando abiertos por subcomplejos. Es decir, se tiene sucesión exacta corta de complejos que involucra los complejos celulares de dos subcomplejos que cubren al complejo y de su intersección (y por lo tanto induce sucesión exacta larga en las homologías).
2. Calcular la homología del espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$ y la de la botella de Klein (usando homología celular).
3. Sea X el CW de dimensión 2 que tiene una 0-celda, una 1-celda y dos 2-celdas que se adjuntan al 1-esqueleto (que es S^1) con funciones de grado 2 y 3 respectivamente.
 - a) Calcular la homología de todos los subcomplejos A de X y de los cocientes X/A .
 - b) Probar que $X \simeq S^2$.
4. Probar que el isomorfismo entre la homología celular y singular de los CW-complejos es natural: Si $f : X \rightarrow Y$ es celular (es decir $f(X^n) \subseteq Y^n$ para todo n) entonces induce $f_* : C_*X \rightarrow C_*Y$ morfismo entre los complejos celulares, que al pasar a la homología (identificándola con la homología singular via el isomorfismo) es la $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ usual.
5. Sea X un CW-complejo finito y sean A, B subcomplejos de X que lo cubren. Probar que
$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$$
6. Sea X un espacio y ΣX su suspensión. Probar que $\tilde{H}_n(\Sigma X) \simeq \tilde{H}_{n-1}(X)$.
7. Dada una familia de grupos abelianos $\{G_n\}_{n \geq 2}$, construir un CW-complejo simplemente conexo X tal que $H_n(X) = G_n, \forall n \geq 2$.
8. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Probar que existe una única función ϕ que le asigna a cada CW-complejo finito un entero tal que
 - a) $\phi(X) = \phi(Y)$ si X e Y son homeomorfos
 - b) $\phi(X) = \phi(A) + \phi(X/A)$ si A es subcomplejo de X
 - c) $\phi(S^0) = n$.Probar además que una tal función debe cumplir que $\phi(X) = \phi(Y)$ si $X \simeq Y$.
9. Sea $n \in \mathbb{N}$ par. Probar que toda función continua $f : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ tiene puntos fijos.
10. Probar que toda función continua $f : S^n \rightarrow S^n$ es homotópica a una que tiene algún punto fijo.