Topología Algebraica- 2019
Práctica Uno

Introducción a los complejos simpliciales y CW-complejos.
Revestimientos y grupo fundamental de CW-complejos y aplicaciones básicas a grupos.

1. Exhibir triangulaciones del plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$, del toro y de la Botella de Klein.

2. *a*) Se dice que un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ está en posición general si todo subconjunto de S de cardinal menor o igual que $n+1$ es afinmente independiente . Probar que en $\mathbb{R}^n$ (con $n \geq 1$ fijo), podemos encontrar subconjuntos S de cardinal m en posición general, para todo $m \in \mathbb{N}$.
   b) Probar que todo complejo simplicial finito K de dimensión n se puede meter como subespacio de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

3. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un cubrimiento por abiertos de X. El *nervio* de $\mathcal{U}$ es el complejo simplicial $N(\mathcal{U})$ cuyos vértices son los abiertos del cubrimiento y los símplices son los subconjuntos finitos no vacíos de $\mathcal{U}$, $s = \{U_{i_0}, \ldots, U_{i_n}\}$ tales que $\bigcap U_{i_k} \neq \emptyset$. Notar que efectivamente $N(\mathcal{U})$ es un complejo simplicial.
   Se dice que un espacio topológico X tiene dimensión $\leq n$ si todo cubrimiento abierto de X admite un refinamiento abierto cuyo nervio es un complejo simplicial de dimensión $\leq n$. Decimos que $dim\ X = n$ si $dim\ X \leq n$ y $dim\ X \nleq n-1$. Probar que:
   a) Si $A \subseteq X$ es cerrado entonces $dim\ A \leq dim\ X$.
   b) Los espacios discretos tienen dimensión 0.
   c) El intervalo I tiene dimensión 1.
   d) Si K complejo simplicial finito y $dim\ K = n$ entonces $dim\ |K| \leq n$. (En realidad vale la igualdad, se verá más adelante).

4. Sea K un complejo simplicial y $\mathcal{U} = \{\overset{\circ}{st(v)}, v \in K^{(0)}\}$ el cubrimiento por stars abiertos de los vértices. Probar que $N(\mathcal{U})$ es isomorfo a K.

5. Sea $A \subset X$ subespacio cerrado y $f : A \to B$ continua. Denotemos con $B \cup_f X$ al espacio de adjunción. Probar que si
   - B y X son Hausdorff,
   - Para todo $x \in X - A$, existe un entorno cerrado de x en X que no interseca a A y
   - $A \subset X$ es retracto de entorno,

   entonces $B \cup_f X$ es Hausdorff.

6. Probar que la definición constructiva de CW-complejo coincide con la definición descriptiva. En particular todo CW-complejo que se define constructivamente resulta Hausdorff.

7. Sea X un CW-complejo. Probar que son equivalentes:
   a) X es conexo
   b) X es arco-conexo
   c) El 1-esqueleto X^1 es conexo

8. Sean X e Y CW-complejos. Un morfismo celular $f : X \to Y$ es una función continua que cumple $f(X^n) \subseteq Y^n$ para todo $n \geq 0$. Probar que si $A \subset X$ es un subcomplejo y $f : A \to Y$ es celular entonces el espacio de adjunción $Y \cup_f X$ resulta un CW-complejo.

9. Sea X un grafo (= CW-complejo de dimensión 1) tal que existe un vértice $x \in X$ (es decir, una 0-celda) que es cara de infinitas aristas (= 1-celdas). Probar que X no es espacio métrico.

10. Probar que los CW-complejos admiten revestimientos y que el revestimiento de un CW-complejo de dimensión n es un CW-complejo de la misma dimensión. En particular los revestimientos de grafos son grafos.

11. Usar el ejercicio anterior para probar que los subgrupos de grupos libres son grupos libres.

12. Definimos la característica de Euler $\chi(X)$ de un grafo finito X como
$$\chi(X) = V - E$$
donde V es la cantidad de vértices y E la cantidad de aristas del grafo. Probar que la característica de Euler de los árboles finitos es siempre 1. Deducir que el grupo fundamental de un grafo conexo y finito X es el grupo libre en $1 - \chi(X)$ generadores. En particular $\chi(X) \leq 1$ y vale la igualdad si y sólo si X es un árbol.

13. Probar que si G es un grupo libre con k generadores y H es un subgrupo de G de índice finito n entonces H es libre de $1 - n + nk$ generadores.

14. Probar que para todo grupo G existe un CW-complejo K de dimensión 2 y arco-conexo tal que $\pi_1 K = G$. Si el grupo es finitamente presentado, K se puede tomar finito.

15. Probar que el grupo fundamental de un CW-complejo coincide con el grupo fundamental de su 2-esqueleto.

16. Calcular el grupo fundamental del plano proyectivo, del toro y una presentación del grupo fundamental de la Botella de Klein. Bueno, en realidad: calcule el grupo fundamental de cualquier superficie cerrada (=conexa, compacta y sin borde) orientable o no, en términos del género.

17. Exhibir espacios cuyos grupos fundamentales sean: $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$, $\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$.

18. Sea F un grupo libre de rango finito y N un subgrupo normal de F de índice infinito. Probar, usando revestimientos, que N no tiene rango finito.

19. Probar que todo grupo finitamente generado tiene sólo un número finito de subgrupos de un índice finito dado. (Sug: hacerlo primero con grupos libres, usando revestimientos y luego usar que todo grupo es cociente de un libre).