Práctica 1

Espacios métricos geodésicos - Grafos de Cayley - Cuasi-isometrías - Grupos cuasi-isométricos

1. Probar que todo $\mathbb{R}$-espacio vectorial normado $(V, || \ ||)$ es geodésico, y que es únicamente geodésico si y sólo si la bola unitaria es estrictamente convexa (es decir, $\forall\ u \neq v$ de norma 1 y todo $t \in (0,1)$, se tiene que $||(1-t)u + tv|| < 1$).

2. Describir las geodésicas de $(\mathbb{R}^2, d_1)$ y $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ (las distancias inducidas por $|| \ ||_1$ y $|| \ ||_\infty$).

3. Probar que los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales con producto interno son únicamente geodésicos.

4. Probar que si un grafo métrico tiene shapes finitos (es decir, el conjunto de longitudes asignadas a sus aristas es finito) entonces resulta métrico completo y geodésico.

5. Probar que los árboles, con cualquier asignación de longitud a sus aristas resultan métricos geodésicos.

6. Sea G un grupo abeliano no cíclico. ¿Admite un grafo de Cayley con ciclos de largo 3? ¿Es verdad que todo grafo de Cayley de G contiene un ciclo de largo 4?.

7. Dibujar el grafo de Cayley $Cay(G, S)$ de los siguientes grupos G (con respecto al conjunto de generadores S indicado):

   a) El grupo dihedral D_4 presentado por $\langle a, b | a^4, b^2, abab \rangle$ respecto del conjunto generador $\{a, b\}$

   b) El grupo cíclico $C_n = \langle a \rangle$ respecto de $S = \{a\}$.

   c) El grupo simétrico S_3 respecto de $S = \{(123), (12)\}$

   d) El grupo dihedral infinito $D_\infty = \langle a, b | a^2, b^2 \rangle$ respecto del conjunto generador $\{a, b\}$.

8. (Caracterización de los grupos infinitos)

   a) Probar que si T es un árbol con infinitos vértices y todos los vértices tienen grado finito, entonces T contiene algún camino simple de aristas de longitud infinita.

   b) Deducir del ítem anterior que, si X es un grafo conexo con infinitos vértices y todos tienen grado finito, entonces X tiene algún camino simple de aristas de longitud infinita.

   c) Sea G un grupo y $S \subset G$ un conjunto de generadores (notar que S puede ser finito o infinito). Probar que G es infinito si y sólo si $Cay(G, S)$ contiene un camino simple infinito.

9. Probar que si existe una cuasi-isometría $f : X \to Y$ entonces existe una cuasi-isometría $g : Y \to X$. Probar además que la composición de cuasi-isometrías es cuasi-isometría. Deducir que la propiedad de ser cuasi-isométricos es una relación de equivalencia.

10. Probar que toda isometría es una equivalencia bilipschitz y toda equivalencia bilipschitz es una cuasi-isometría. Mostrar que las recíprocas no valen.

11. Caracterizar los espacios métricos cuasi-isométricos a un punto.

12. Probar que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ (con las métricas usuales) no son cuasi-isométricos.

13. ¿Son $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ (con las distancias heredadas de $\mathbb{R}$) cuasi-isométricos?

14. Sea G un grupo finitamente generado. Probar que si A, B son conjuntos finitos de generadores, entonces (G, d_A), (G, d_B), $Cay(G, A)$ y $Cay(G, B)$ son cuasi-isométricos. Por lo tanto está bien definido la noción de cuasi-isometría entre grupos finitamente generados (no depende del conjunto finito de generadores elegido) y se puede describir en términos de métrica de la palabra en el grupo o de la métrica en su grafo de Cayley.

    Nota: Veremos más adelante que varias propiedades de los grupos se preservan por cuasi-isometrías.

15. Sea X métrico y G un grupo finitamente generado que actúa en X por isometrías. Sea A conjunto finito de generadores del grupo. Probar que para todo $x \in X$ fijo, existe una constante $c > 0$ tal que $d(gx, hx) \leq c.d_A(g, h)$ para todo $g, h \in G$.

16. Sea $\phi : G_1 \to G_2$ morfismo entre grupos finitamente generados. Probar que:

    a) Si ϕ es un embedding cuasi-isométrico entonces $\ker \phi$ es finito.

    b) ϕ es cuasi-isometría si y sólo si $\ker \phi$ y *coker* ϕ son finitos.

17. Probar que si H es un subgrupo de G de índice finito, entonces G y H son cuasi-isométricos.

18. Probar que los grupos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times C_2$ y D_∞ son bilipschitz equivalentes (en particular son cuasi-isométricos).

    Nota: Veremos más adelante que un grupo finitamente generado es cuasi-isométrico a $\mathbb{Z}$ si y sólo si es virtualmente $\mathbb{Z}$ (es decir, tiene un subgrupo de índice finito isomorfo a $\mathbb{Z}$).

19. Sea G un grupo, A un conjunto de generadores de G y $q : F(A) \to G$ el epimorfismo estándar del grupo libre generado por A en G. Sea $R \subset \ker q$ y sea K el 2-complejo que se obtiene del grafo de Cayley $Cay(G, A)$ adjuntando 2-celdas a todos los lazos de aristas etiquetados con las palabras $r \in R$. Probar que K es simplemente conexo si y solo si $<< R >>= \ker q$ (y por lo tanto, en este caso, $\langle A \mid R \rangle$ es una presentación de G).

20. (Número cromático de un grupo) Recordar que el número cromático $ch(X)$ de un grafo X es el el mínimo n de colores necesarios para colorear los vértices de tal manera que vértices adyacentes tengan diferentes colores. Dado un grupo finitamente generado G, definimos su número cromático como

$$ch(G) = \text{mín}\{ch(Cay(G, S), \ S \subset G \text{ conjunto finito de generadores}\}$$

    a) Calcular $ch(C_n)$ (el cíclico de n elementos) y $ch(\mathbb{Z}^n)$

    b) Probar que si $N \subset G$ es subgrupo normal, entonces $ch(G) \leq ch(G/N)$.

    c) Probar que $ch(G) = 2$ si y sólo si G contiene un subgrupo de índice 2.