Geometría Diferencial - Primer Cuatrimestre de 2018

Práctica 8

Geometría Riemanniana- Parte 2

1. Sea $\mathbb{S}^n_R$ la esfera de radio R con la métrica riemanniana usual. Probar que $O(n+1)$ actúa transitivamente por isometrías sobre bases ortonormales de $\mathbb{S}^n_R$. Concretamente: dados dos puntos $p, q \in \mathbb{S}^n_R$ y bases ortonormales $\{E_i\}$ y $\{E'_i\}$ de $T_p\mathbb{S}^n_R$ y $T_q\mathbb{S}^n_R$ respectivamente, existe $\varphi \in O(n+1)$ tal que $\varphi(p) = q$ y $d\varphi(E_i) = E'_i$ para todo i. En particular, $\mathbb{S}^n_R$ es homogenea e isotrópica.

2. Denotamos con $O(n,1)$ al grupo de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^{n+1}$ que preservan la métrica de Minkowski m, que en coordenadas $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \tau)$ está definida por

$$m = (d\xi_1)^2 + \ldots + (d\xi_n)^2 - (d\tau)^2.$$

Notar que $O(n,1)$ son las matrices A tales que ${}^tAJA = J$ donde J es la matriz diagonal, con entradas $(1, 1, \ldots, 1, -1)$ en la diagonal. Notar también que $O(n,1)$ preserva el hiperboloide de dos hojas (pero algunos elementos de este grupo pueden mandar algún $x \in \mathbb{H}^n_R$ -el modelo del espacio hiperbólico de radio R dado por la hoja superior del hiperboloide- a la hoja inferior). Consideramos $O_+(n,1)$ el subgrupo que preserva a la hoja superior. Probar, similarmente al ejercicio anterior, que $O_+(n,1)$ actúa transitivamente por isometrías en bases ortonormales de $\mathbb{H}^n_R$. En particular, el espacio hiperbólico de radio R es homogeneo e isotrópico.

3. Sea (M, g) variedad riemanniana. Fijamos un punto $p \in M$ y coordenadas normales $(U, (x_i))$ centradas en p (respecto de una base ortonormal fijada $\{E_i\}$ de T_pM). Sea $r(x) = (\sum_i (x_i)^2)^{1/2}$ la distancia radial a p. Probar que:

   a) Sea $V \in T_pM$ un vector con coordenadas $(V_1, \ldots, V_n)$ en la base ortonormal fijada. Entonces la geodésica γ_V con punto inicial p y cuyo vector velocidad inicial es V en el entorno normal U tiene coordenadas $\gamma_V(t) = (tV_1, \ldots, tV_n)$.

   b) Las coordenadas de la métrica en p en el entorno normal son $g_{ij} = \delta_{ij}$.

   c) Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\{x : \ r(x) < \varepsilon\} \subset U$. Probar que $\{x : \ r(x) < \varepsilon\}$ es una bola geodésica en M.

   d) En las coordenadas normales, los símbolos de Christoffel se anulan en p.

4. Sea (M, g) variedad riemanniana y $f : M \to \mathbb{R}$ una función suave tal que $||grad\ f||$ es constantemente 1. Probar que las curvas integrales de $grad\ f$ son geodésicas.

5. Sean (M, g) y (M', g') variedades riemannianas con M conexa, y $\varphi, \psi : M \to M'$ isometrías locales tal que para algún punto $p \in M$, $\varphi(p) = \psi(p)$ y $\varphi_* = \psi_* : T_pM \to T_{\varphi(p)}M'$. Probar que $\varphi = \psi$.

6. Sea $\varphi : (M, g) \to (M', g')$ una isometría. Probar que para todo $p \in M$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "exp_p"'] & T_{\varphi(p)}M' \arrow[d, "exp_{\varphi(p)}"] \\ M \arrow[r, "\varphi"] & M' \end{tikzcd}$$

7. Dar una parametrización de la geodésica con velocidad unitaria en la modelo del hiperboloide de $\mathbb{H}^n_R$, que comienza en $N = (0, \ldots, R)$ y tiene vector inicial $\frac{\partial}{\partial \xi_1}$. Probar además que todas las geodésicas en $\mathbb{H}^n_R$ están definidas en todo $t \in \mathbb{R}$ y que la imagen de cada geodésica es una rama entera de una gran hipérbola (la intersección de un plano por el origen con el modelo del hiperboloide).

8. Deducir del teorema de Hopf-Rinow los siguientes resultados:

   a) Si existe un $p \in M$ tal que exp_p está definida en todo T_pM, entonces M es completa.

   b) M es completa si y sólo si todo par de puntos de M pueden ser unidos con un segmento geodésico.

   c) Si M es compacta, toda geodésica está definida en todo instante de tiempo t.