Geometría Diferencial - Primer Cuatrimestre de 2018

Práctica 7

Geometría Riemanniana- Parte 1

Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, denotaremos con ι_X la *contracción*: si $\alpha \in \Omega^{k+1}(M)$, $\iota_X\alpha \in \Omega^k(M)$ está definida por $\iota_X\alpha = \alpha(X, -, \ldots, -)$. Recordar que, si (M, g) es variedad riemanniana y $f \in C^\infty(M)$, se define el campo *grad f* como el único campo que cumple $df(X) = \langle grad\ f, X\rangle$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

1. Dada M variedad de dimensión n y $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ una inmersión, se da a M la estructura riemanniana inducida, es decir para $p \in M$ y $v, w \in T_pM$ vale $\langle v, w\rangle_p := \langle df(v), df(w)\rangle_{f(p)}$. Probar que si M es orientada y η es el campo de vectores normales unitarios en $f(M)$ que dan la orientación, entonces la forma de volumen en M está dada por

   $$\omega = f^*(\iota_\eta(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1})).$$

2. Recordar que, dada una carta (U, φ) en una variedad riemanniana orientada M, su forma de volumen dV se escribe localmente como $dV|_U = \sqrt{\det g_{i,j}}\, d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_n$, donde $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial\varphi_i}, \frac{\partial}{\partial\varphi_j}\rangle$. Si M es además compacta, se define su volumen como

   $$\text{Vol}(M) = \int_M \Omega.$$

   a) Calcular la matriz (g_{ij}) para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ en coordenadas polares y esféricas.

   b) Calcular la matriz (g_{ij}) y la forma de volumen para S^1 y S^2, y calcular los respectivos volúmenes.

   c) Calcular la forma de volumen de una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ con la métrica Riemanniana inducida en términos de una parametrización $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$. Probar que si $f : S \to \mathbb{R}$ es una función suave, entonces

   $$\int_S f := \int_S f\Omega$$

   coincide con la integral de superficie de f sobre S como en Análisis II.

3. Recordar que la longitud de una curva $\gamma : [a, b] \to M$ C^∞ está dada por

   $$L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt$$

   donde $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ es el vector velocidad de la curva, $\gamma'(t) = d\gamma(\frac{d}{dt})$. Cuando la curva es C^∞ a trozos, la longitud se obtiene sumando las longitudes de los tramos C^∞. Probar que las isometrías preservan longitudes de curvas C^∞ a trozos, es decir: si $f : (M, g) \to (M', g')$ es una isometría, entonces $L_g(\gamma) = L_{g'}(f\gamma)$ para toda curva γ en M C^∞ a trozos. Deducir que para todo par de puntos $p, q \in M$, $d_M(p, q) = d_{M'}(f(p), f(q))$ donde $d_M, d_{M'}$ son las distancias inducidas (en M y en M' respectivamente) por las métricas riemannianas.

4. Sea $\gamma : [a, b] \to M$ C^∞ tal que $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t$ y sea $l = L(\gamma)$. Probar que existe una única reparametrización $\tilde{\gamma} : [0, l] \to M$ de velocidad unitaria, es decir $||\tilde{\gamma}'(t)|| = 1$ $\forall t$. (Sug: considerar la función $s : [a, b] \to [0, l]$ definida por $s(t) = \int_a^t ||\gamma'(u)||du$).

5. Sea M una variedad riemanniana orientada con elemento de volumen dV. Definimos el operador de divergencia $div : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ como
$$d(\iota_X dV) = (div\ X)dV.$$
   a) Probar el teorema de la divergencia para $X \in \mathfrak{X}(M)$:
$$\int_M (div\ X)dV = \int_{\partial M} \langle X, N\rangle d\tilde{V}$$
   donde N es el normal a ∂M que apunta para afuera y $d\tilde{V}$ es el elemento de volumen inducido en ∂M.

   b) Probar que si $f \in C^\infty(M)$,
$$div(fX) = f(div\ X) + \langle grad\ f, X\rangle$$
   y deducir la fórmula de integración por partes
$$\int_M \langle grad\ f, X\rangle dV = -\int_M f(div\ X)\ dV + \int_{\partial M} f\langle X, N\rangle d\tilde{V}.$$

6. Sea M una variedad y sea (U, φ) una carta de M. Probar que la asignación
$$(X, \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}) \mapsto \sum_i X(\alpha_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$$
define una conexión en U.

7. Sea $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ con la carta usual y sea g la métrica dada por $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$ y $g_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Expresar la conexión de Levi-Civita en la carta usual.

8. Sea $M = \mathbb{R}^{n+1}$ con la métrica dada por $g_{ii} = 1$, si $1 \leq i \leq n$, $g_{n+1n+1} = -1$ y $g_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Expresar la conexión de Levi-Civita en la carta usual.

9. Sea ∇ una conexión sobre una variedad M, y sea $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ su torsión. Probar que T es $C^\infty(M)$-bilineal.

10. Sean (M, g) una variedad riemanniana (con la conexión riemanniana) y $\alpha : I \to M$ una curva suave. Probar que si X e Y son campos paralelos a lo largo de α, entonces el ángulo entre X e Y es una función constante.

11. Probar que si $\{\nabla_i\}$ es una familia finita de conexiones y α_i son reales tales que $\sum_i \alpha_i = 1$, entonces $\sum_i \alpha_i \nabla_i$ es una conexión.

12. Probar que si ∇ es una conexión con torsión T, entonces $\nabla - \frac{1}{2}T$ es una conexión simétrica. Encontrar sus símbolos de Christoffel en función de los de ∇.

13. Sean M una variedad riemanniana de diemensión n y ∇ una conexión en M. Sean $\alpha : I \to M$ una curva suave, $t_0 \in I$ y $v_1, v_2, \ldots, v_n$ una base de $T_{\alpha(t_0)}M$. Dados $X_1, \ldots, X_n$ campos paralelos a lo largo de α tales que $X_i(t_0) = v_i$, probar lo siguiente.

   a) El conjunto $\{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ es linealmente independiente para todo $t \in I$.

   b) Si Y es un campo paralelo a lo largo de α tal que $Y(t_0) = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, entonces $Y(t) = \sum_{i=1}^n a_i X_i(t)$ para todo $t \in I$.

   c) Los campos paralelos a lo largo de α forman un espacio vectorial de dimensión n.

14. Sea G un grupo de Lie, y sea $\{X_1, \ldots, X_n\}$ una base de campos invariantes a izquierda. Sea ∇ la conexión determinada por $\nabla_{X_i} X_j = 0$ para todo i, j.

    a) Mostrar que esta definición es independiente de la base de campos invariantes elegida.

    b) Calcular la torsión de esta conexión.