Geometría Diferencial - Primer Cuatrimestre de 2018

Práctica 6

Integración y teorema de Stokes

1. Probar que la integración de formas en una variedad diferenciable orientada M cumple las siguientes propiedades.

   a) Si $-M$ denota la variedad on la orientación opuesta, entonces $\int_M \omega = -\int_{-M} \omega$.

   b) $\int_M a\omega_1 + b\omega_2 = a\int_M \omega_1 + b\int_M \omega_2$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

   c) Si ω es una n-forma continua y no negativa entonces $\int_M \omega \geq 0$ y la igualdad se verifica sólo si $\omega = 0$.

   d) Si $f : M \to N$ es un difeomorfismo entre variedades conexas orientadas y ω es una forma integrable en N, entonces $\int_M f^*\omega = \pm \int_N \omega$, donde el signo depende de si f preserva o invierte la orientación.

2. Sea M una variedad cerrada y orientada de dimensión n. Probar que si ω es una n-forma diferenciable nunca nula, entonces ω no es exacta.

3. *a*) Sea $\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Probar que α es cerrada, pero no exacta.

   b) Más generalmente, sea $\omega(x) = \sum_{0 \leq i < n} (-1)^i x_i \, dx_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \in \Omega(\mathbb{R}^n)$. Probar que $\alpha \in \Omega(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, dada por $\alpha(x) = \frac{1}{\|x\|^n}\omega(x)$, es cerrada pero no exacta. (Sugerencia: mostrar que $\int_{S^{n-1}} \omega \neq 0$. De hecho, vale que $\int_{S^{n-1}} \omega = |S^{n-1}|$.)

4. Sea M una variedad diferenciable y sea $\omega \in \Omega^k(M)$ una forma cerrada.

   a) Si S es subvariedad de M compacta, sin borde, orientada y de dimensión k tal que $S = \partial W$ para alguna subvariedad W de M, entonces $\int_S \omega = 0$.

   b) Si W es subvariedad orientable de dimensión $k+1$ con borde $\partial W = S \sqcup T$ donde S y T son subvariedades de dimensión k con la orientación inducida, entonces $\int_S \omega = -\int_T \omega$.

5. Probar que el toro T no es difeomorfo a la esfera S^2.
   (Sugerencia: hallar una 1-forma en T cerrada que no sea exacta, y ver que toda 1-forma en S^2 cerrada es exacta.)

6. Sea M una variedad.

   a) Probar que si $\theta, \tilde{\theta} \in \Omega^k(M)$, entonces $\theta = \tilde{\theta}$ si y sólo si se verifica

   $$\int_\sigma \theta = \int_\sigma \tilde{\theta}$$

   para cada $\sigma : S \to M$ con S compacta, orientada y de dimensión k.

   b) Sea $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$. Probar que existe una única $\theta \in \Omega^k(M)$ tal que para toda $N \subseteq M$ subvariedad orientable compacta, con borde y de dimensión k vale

   $$\int_S \theta = \int_{\partial S} \omega.$$

7. *a*) Supongamos que M, N son dos variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente. Si $\omega \in \Omega^m(M), \eta \in \Omega^n(N)$, probar que

$$\int_{M\times N} \pi_M^*(\omega) \wedge \pi_N^*(\eta) = \left(\int_M \omega\right)\left(\int_N \eta\right).$$

b) (Principio de Cavalieri) Sea $\pi : M \to N$ una submersión y ω_M, ω_N formas de volumen en M y N respectivamente. Supongamos que existe una forma η que "complementa" a $\pi^*\omega_N$, es decir, $\omega_M = \eta \wedge \pi^*\omega_N$. Probar que para toda función $f : M \to \mathbb{R}$ suave de soporte compacto, integrando sobre las fibras $M_q = \pi^{-1}(q)$ se tiene que

$$\int_M f\omega_M = \int_N \left(\int_{M_q} f(x)\, i^*\eta(x)\right) \omega_N(q).$$

Cohomología de de Rham

1. Sea $0 \to C^0 \to C^1 \to \cdots \to C^n \to 0$ un complejo (finito) de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión finita. Probar que $\sum(-1)^q \dim_{\mathbb{R}} C^q = \sum(-1)^q \dim_{\mathbb{R}} H^q(C^*)$. Deducir que si el complejo es exacto, entonces $\sum(-1)^q \dim_{\mathbb{R}} C^q = 0$.

2. Calcular la cohomología de de Rham de las siguientes variedades.
   - La esfera $\mathbb{S}^n$.
   - La variedad M_r que se obtiene quitando r puntos al plano.
   - La banda de Möbius abierta.
   - La botella de Klein.

3. Calcular la cohomología de de Rham con soporte compacto de las variedades del ejercicio anterior.

4. ¿Puede $\mathbb{R}^2$ escribirse como unión de dos abiertos conexos U y V tales que su intersección no sea conexa?

5. Sean p, q dos puntos distintos de $\mathbb{R}^n$. Decimos que un cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ separa a p de q si esos dos puntos pertencen a componentes conexas distintas de $\mathbb{R}^n - A$. Dados dos cerrados disjuntos A y B y dos puntos distintos p, q de $\mathbb{R}^n - (A \cup B)$, probar que si ni A ni B separan a los puntos, entonces tampoco los separa $A \cup B$.

6. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ cerrados con $A, B \neq \mathbb{R}^n$. Probar que si A y B son homeomorfos, entonces $H^q_{dR}(\mathbb{R}^n - A) \simeq H^q_{dR}(\mathbb{R}^n - B)$. Deducir que para todo A, B cerrados de $\mathbb{R}^n$ homeomorfos (incluso para A o B igual a $\mathbb{R}^n$), $\mathbb{R}^n - A$ y $\mathbb{R}^n - B$ tienen la misma cantidad de componentes conexas.

7. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio homeomorfo a S^k (para $1 \leq k \leq n-2$). Probar que

$$H^q_{dR}(\mathbb{R}^n - A) = \begin{cases} \mathbb{R} & q = 0, n-k-1, n-1, \\ 0 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

8. Probar que si M es orientable, sin borde, conexa y no compacta de dimensión n, entonces $H^n(M) = 0$.

9. Sea M una variedad compacta, sin borde y orientable de dimensión $n = 2m$ con m impar. Probar que $H^m(M)$ tiene dimensión par. Deducir que la característica de Euler $\chi(M)$ es par.

10. Sea M una variedad compacta, sin borde y orientable de dimensión impar. Probar que $\chi(M) = 0$.

11. Sean $U, V \subset M$ abiertos tales que U, V y $U \cap V$ son de tipo finito. Probar que $U \cup V$ es de tipo finito y $\chi(U \cup V) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$.

12. Sea M una variedad compacta y conexa. Probar que $H^n(M)$ detecta la orientabilidad, más precisamente, $H^n(M) \simeq \mathbb{R}$ si M es orientable y $H^n(M) = 0$ si no.

13. Sean M, N variedades compactas, conexas y orientadas de dimensión n y sea $f : M \to N$ una función diferenciable.

    a) Probar que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

    $$\int_M f^*\omega = k \int_N \omega$$

    para toda n-forma $\omega \in \Omega^n(N)$. El número k, denotado $\deg(f)$, es el *grado* de la función f.

    b) Probar que k es entero. Más precisamente, probar que si $q \in N$ es un valor regular de f, entonces

    $$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(q)} \mathrm{sign}_f(x)$$

    donde $\mathrm{sign}_f(x)$ vale 1 si f preserva orientación en x y -1 si no.

    c) Probar que si $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son funciones diferenciables entre variedades compactas, conexas y orientables, entonces $\deg(g \circ f) = \deg(g)\deg(f)$.

    d) Calcular el grado de la función antípoda $a : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $a(x) = -x$.