Geometría Diferencial - Primer Cuatrimestre de 2018

Práctica 5

Formas diferenciales

1. Se define el rango de un tensor como la mínima cantidad de tensores elementales que hay que sumar para obtenerlo.

   a) Probar que el rango de una transformación lineal $V \to W$, vista como elemento de $V^* \otimes W$, coincide con el rango usual (la dimensión de su imagen).

   b) Probar que si $n < 4$, entonces todos los tensores de $\Lambda^r(\mathbb{R}^n)$ son elementales. ¿Qué pasa si $n = 4$? (Sugerencia: Un elemento de $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ puede pensarse como transformación lineal entre dos espacios de dimensión n)

2. Sea g una función bilineal en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V con producto interno. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de V. Probar que $\sum_i g(v_i, v_i)$ no depende de la base elegida. Concluir que $\sum_i v_i \otimes v_i$ es un tensor bien definido (que no depende de B).

3. Sean $\eta \in \Omega^1(M)$ y $f, g \in C^\infty(M)$, mostrar que

   a) $f\eta \in \Omega^1(M)$,

   b) $d(fg) = fdg + gdf$.

4. Sean $M = \mathbb{R}^n$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, y $\langle X, - \rangle$ definido de la siguiente manera: si $v \in T_pM$, $\langle X, v \rangle := \langle X_p, v \rangle$. Mostrar que $\langle X, - \rangle$ es una 1-forma. Mostrar que toda 1-forma es de esta manera. Por ejemplo, $df = \langle \nabla f, - \rangle$.

5. Sea X una variedad, ω una 1-forma. Sean (U, φ), (V, ψ) dos cartas alrededor de un punto $x \in X$. Si $\omega(x) = \sum_i \alpha_i d\varphi_i = \sum_j \beta_j d\psi_j$, encontrar la relación entre los α_i y los β_j.

6. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de característica 0, φ y ψ en V^*. Mostrar que la aplicación $(v, w) \mapsto \phi(v)\psi(w)$ es una aplicación bilineal definida en $V \times V$ a valores en $\mathbb{K}$. Mostrar que bajo la identificación $\mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{K}) \cong (V \otimes V)^* \cong V^* \otimes V^*$, esta forma bilineal se corresponde con $\phi \otimes \psi$.

7. Dada una variedad M, definir apropiadamente el fibrado exterior k-ésimo $\Lambda^{k*}(M)$ y probar que una k-forma C^∞ equivale a una sección a ese fibrado.

8. Probar que una k-forma ω es C^∞ si y sólo si para toda familia $X_1, \ldots, X_k$, $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, la función $\omega(X_1, \ldots, X_k)$ definida por $\omega(X_1, \ldots, X_k)(p) = \omega_p(X_1(p), \ldots, X_k(p))$ es diferenciable.

9. Una función $f : M \to N$ diferenciable induce $f^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$ definida por $f^*(g) = g \circ f$ en Ω^0 y $(f^*w)_p(v_1, \ldots, v_k) = w_{f(p)}(d_pf(v_1), \ldots, d_pf(v_k))$ en Ω^k.

   a) Probar la buena definición de f^*, es decir, que f^*w es suave si w lo es.

   b) Probar que f^* es morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras, es decir, que es $\mathbb{R}$-lineal y $f^*(w \wedge v) = f^*(w) \wedge f^*(v)$.

10. Sea ω una k-forma en M, con $k \geq 1$, ¿es cierto que $\omega \wedge \omega = 0$? ¿Qué pasa si $\dim M = 3$?

11. Sea X una variedad diferenciable, (U, φ) una carta y $\omega \in \Omega^k(X)$. Calcular $d\omega|_U$ en las coordenadas de (U, φ) para los casos $0 \leq k \leq 2$.

12. Sea $\omega \in \Omega^k(X)$. Probar que

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \ldots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i \omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{k+1}). \end{aligned}$$

13. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable.
    a) Demostrar que $\omega_F^1(x)(v) := \langle F(x), v \rangle$ define una 1-forma en $\mathbb{R}^3$. Encontrar las coordenadas de ω_F^1 en la base $\{dx, dy, dz\}$. Recíprocamente, si ω es una 1-forma en $\mathbb{R}^3$, probar que ω determina un único campo G en $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega_G^1 = \omega$.
    b) Demostrar ahora que $\omega_F^2(x)(u, v) := \langle F(x), u \times v \rangle$ define una 2-forma en $\mathbb{R}^3$. Calcular sus coordenadas en la base $\{dx \wedge dy, dz \wedge dx, dy \wedge dz\}$. Recíprocamente, probar que toda 2-forma ω define un único campo G en $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega_G^2 = \omega$.
    c) Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3) = \Omega^0(\mathbb{R}^3)$. Encontrar la relación entre
        1) df y ∇f,
        2) $\nabla \times F$ y $d\omega_F^1$,
        3) $\nabla \cdot F$ y $d\omega_F^2$ (aquí identificamos $\Omega^3(\mathbb{R}^3) \simeq C^\infty(\mathbb{R}^3)$ usando la base $dx \wedge dy \wedge dz$).

    Concluir, usando la relación $d \circ d = 0$, las fórmulas clásicas $\nabla \times \nabla \equiv 0$ y $\nabla \cdot \nabla \times \equiv 0$.

Orientación

14. Sea M una variedad diferenciable. Probar que TM y T^* son variedades orientables.
15. Probar que si M tiene un atlas de la forma $\mathcal{A} = \{(U, \varphi); (V, \psi)\}$ donde $U \cap V$ es conexo, entonces M es orientable.
16. Ver que toda M paralelizable es orientable. Concluir que todo grupo de Lie es orientable.
17. Sea M y N variedades diferenciables. Probar que son equivalentes
    a) M y N son orientables,
    b) $M \times N$ es orientable.
18. Probar que la esfera S^n y $\mathbb{R}^n$ son orientables. Probar que el n-toro T^n y el cilindro son orientables. Probar que la banda de Möbius y la botella de Klein no son orientables.
19. Sean M y N variedades orientadas de la misma dimensión y $f : M \to N$ una función diferenciable. Diremos que f preserva la orientación en $p \in M$ si $d_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$ es un isomorfismo de espacios vectoriales orientados.
    a) Probar que si $(U, \phi), (V, \psi)$ son cartas orientadas de M y N respectivamente, f preserva la orientación en p si y sólo si $\det(D(\psi \circ f \circ \phi^{-1}))(\phi(p)) > 0$.
    b) Probar que si ω_M y ω_N son n-formas que definen la orientación en M y N respectivamente y $f^*(\omega_N)_p = \phi(p)(\omega_M)_p$ entonces f preserva la orientación en p si y sólo si $\phi(p) > 0$.
20. Sea M una variedad orientable conexa y $f : M \to M$ un difeomorfismo. Si $\mathcal{A}$ es un atlas orientado compatible con la orientación, probar que para dos cartas $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2)$ el signo de $J(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})$ es constante (donde está definida la composición). Interpretar.
21. Sea M una variedad diferenciable conexa y orientada y G un grupo discreto actuando en M de forma propiamente discontinua por difeomorfismos. Probar que M/G es orientable si y sólo si para cada $g \in G$ el difeomorfismo $p \mapsto g \cdot p$ preserva la orientación en todos los puntos. Probar que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es orientable si y sólo si n es impar.