Geometría Diferencial - Primer Cuatrimestre de 2018

Práctica 4

Grupos y álgebras de Lie y curvas integrales

1. Sea G un grupo de Lie conexo y U en entorno abierto de e.
   a) Probar que existe un abierto V tal que $e \in V \subset U$ que cumple $V = V^{-1}$, donde $V^{-1} = \{g^{-1},\ g \in V\}$.
   b) Probar que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$, donde $U^n = \{g_1 g_2 \dots g_n,\ g_i \in U\}$.
2. Sea G grupo de Lie y $H \subset G$ un subgrupo que es al mismo tiempo una subvariedad regular. Probar que H es cerrado en G.
3. Probar que $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) :\ A^t A = Id\}$ es grupo de Lie.
4. Sea H un subgrupo (en el sentido algebraico) de un grupo de Lie G. Probar que la clausura $\overline{H}$ también es subgrupo de G.
5. Sea G un grupo de Lie que actúa sobre una variedad diferenciable M. Dado $x \in M$, considerar el grupo de isotropía G_x.
   a) Probar que G_x es cerrado en G.
   b) Si la acción es transitiva, probar que para todo $x, y \in M$, G_x y G_y son conjugados.
6. Probar que $O(n)$ actúa transitivamente en $\mathbb{S}^{n-1}$ y determinar los grupos de isotropía.
7. Probar que los siguientes grupos discretos G actúan en forma propiamente discontinua sobre la variedad M y calcular la variedad de órbitas M/G.
   a) $G = \mathbb{Z}$ que actúa sobre $M = \mathbb{R}$ vía $m \cdot x = x + m$.
   b) G el grupo de raíces n-ésimas de la unidad en $\mathbb{C}$ (para un $n \in \mathbb{N}$ fijo) que actúa sobre $\mathbb{S}^1$ por multiplicación.
   c) $G = \mathbb{Z}_2$ actuando en $\mathbb{S}^n$ vía $\sigma \cdot x = -x$.
8. En la práctica 3 se probó que $(\mathfrak{X}(M), [,])$ es un álgebra de Lie para cualquier variedad M. Probar que $[,]$ no es $C^\infty(M)$-bilineal. Más precisamente, probar que $[fX, gY] = fg[X,Y] + f(X(g))Y - g(Y(f))X$, para f, g funciones diferenciables y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
9. Probar que el álgebra de Lie asociada a $GL(n, \mathbb{R})$ es $gl(n, \mathbb{R})$.
10. Sean G, H grupos de Lie y sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ sus álgebras de Lie asociadas (campos invariantes a izquierda). Dado un morfismo de grupos de Lie $f : G \to H$ e identificando las álgebras de Lie con los tangentes en las identidades, queda definido un morfismo $df : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$. Probar que df es morfismo de álgebras de Lie.
11. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable y $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ un par de campos f-relacionados. Probar que si c es una curva integral de X entonces fc es una curva integral de Y.
12. Si (U, φ) es una carta de M, calcular una curva integral del campo $\partial\varphi_1$.
13. Sea $N \subseteq M$ una subvariedad cerrada y $X \in \mathfrak{X}(M)$ tangente a N, es decir, para cada $p \in N$ se tiene $X_p \in T_pN$. Probar que N es invariante por el flujo de X, es decir, una curva integral de X que pasa por N se mantiene en N. ¿Es invariante también su complemento $M \setminus N$? Mostrar con un ejemplo que la hipótesis de que N es cerrada es necesaria.

14. En cada uno de los siguientes casos calcular el grupo uniparamétrico generado por el campo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

    a) $M = \mathbb{R}^2$, $X(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ (vía la identificación $T_x\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2$).

    b) $M = \mathbb{R}^2$, $X(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$.

    c) $M = \mathrm{GL}_n$, $X(A) = BA$, con $B \in M_n(\mathbb{R})$.

15. Sea M una variedad, $p \in M$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo, $c : (a, b) \to M$ la curva integral maximal tal que $c(0) = p$. Si $\exists t \neq 0$ tal que $c(t) = p$, probar que $(a, b) = \mathbb{R}$.

16. En cada uno de los siguientes casos probar que $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ es un grupo uniparamétrico y calcular su generador infinitesimal $X \in \mathfrak{X}(M)$

    a) $M = V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (de dimensión finita) y $\phi(t, v) = ta + v$, con $a \in M$ fijo.

    b) $M = T^2 = S^1 \times S^1$, $\phi(t, z, w) = (e^{2t}z, e^{-t}w)$.

    c) $M = S^1 \times \mathbb{R}$, $\phi(t, z, x) = (e^{tx}, z)$.

17. Sea G un grupo de Lie y tomemos $v \in T_eG$. Sea X_v el único campo invariante a izquierda con $X(e) = v$ y denotemos por Φ_v^t el grupo uniparamétrico definido por X_v. Sea $\exp : T_eG \to G$ dada por $\exp(v) = \Phi_v^1(e)$. Probar que si $f : G \to H$ es un morfismo de grupos de Lie entonces $f \circ \exp = \exp \circ d_e f$.

18. Probar que, identificando $T_I\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \simeq M_n(\mathbb{R})$, la exponencial $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ definida como en el ejercicio anterior coincide con la exponencial matricial

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots .$$

    ¿Hay alguna relación entre $\exp(A + B)$ y $\exp(A)\exp(B)$?