Geometría Diferencial - Primer Cuatrimestre de 2018

Práctica 2

---

1. Sean M, N variedades diferenciables y $f : M \to N$ continua. Probar que f es diferenciable si y sólo si para todo abierto $W \subset N$ y toda función diferenciable g definida en W, se tiene que gf es diferenciable en $f^{-1}(W)$.

2. Probar que si $f : M \to N$ es diferenciable y de rango constante $r = \dim M = \dim N$, entonces es $f(M)$ es abierto de N y $f : M \to f(M)$ es un difeomorfismo local.

3. Probar que si $A \subset M$ y $B \subset N$ son subvariedades regulares, entonces $A \times B \subset M \times N$ es subvariedad regular.

4. Probar que una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ no puede ser inyectiva.

5. Probar que la función $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ definida por $f(x_0, \ldots, x_n) = [x_0, \ldots, x_n]$ es diferenciable. Exhibir un difeomorfismo entre $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{P}^1$.

6. Sea M una variedad diferencial y $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la proyección canónica. Probar que $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to M$ es diferenciable si y sólo si $f \circ p : \mathbb{S}^n \to M$ es diferenciable. Comparar el rango de f con el de $f \circ p$.

7. Probar que el cono sin el vértice

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\} \smallsetminus \{(0, 0, 0)\}$$

es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$. ¿Qué pasa si consideramos todo el cono?

8. Probar que $\alpha : (-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) \to \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(2t))$ es una inmersión inyectiva pero no un embedding. Probar que la imagen de α no es una subvariedad de $\mathbb{R}^2$.

9. Probar que la superficie de revolución generada por cualquier curva regular en el plano xz alrededor del eje z es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$.

10. Sea M una variedad compacta de dimensión d y sea $f : M \to \mathbb{R}^d$ una función diferenciable. Probar que f no es regular. Concluir que no hay un embedding de una variedad compacta de dimensión d en $\mathbb{R}^d$.

11. El objetivo de este ejercicio es probar que aunque no es cierto que toda subvariedad se consigue como el conjunto de nivel de un valor regular, localmente sí es cierto.

    a) La función $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definida por $(x : y) \mapsto (x : y : 0)$ es un embedding y así su imagen S es una subvariedad de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Probar que no existe ninguna función diferenciable $g : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ que tenga al 0 como valor regular y tal que $g^{-1}(0) = S$.

    b) Sea $S \subseteq M$ un subconjunto con la topología subespacio. Probar que S es una subvariedad de dimensión k de M si y sólo si para cada punto $p \in S$ existe un entorno abierto $U \subseteq M$ tal que $U \cap S$ es el conjunto de nivel de una submersión $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$.

12. Sean M y N variedades de dimensión d, con M compacta y $f : M \to N$ diferenciable.

    a) Probar que si $p \in N$ es valor regular, entonces $f^{-1}(p)$ es un conjunto finito.

    b) Probar que la asignación $p \mapsto \#f^{-1}(p)$ es localmente constante (donde p recorre valores regulares de f).

13. a) Sea $f : M \to N$ diferenciable, $\dim M \leq \dim N$. Sea $p \in M$ punto regular, y sea (U, ϕ) carta de N con $f(p) \in U$. Probar que un subconjunto de las funciones $\{\phi_i \circ f\}$ determina una carta de M en un entorno de p.

b) Sea $S \subset N$ una subvariedad y sea $f : M \to N$ diferenciable tal que $f(M) \subset S$. Probar que $f : M \to S$ es diferenciable.

14. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable, y sea X otra variedad diferencial.

    a) Probar que si f es una inmersión entonces para toda $g : X \to M$ función continua tal que $f \circ g$ es diferenciable se puede deducir que g es diferenciable.

    b) Probar que si f es un embedding entonces para toda $g : X \to M$ función tal que $f \circ g$ es diferenciable se puede deducir que g es continua y diferenciable.