Geometría Diferencial - Primer Cuatrimestre de 2018

Práctica 1

Variedades topológicas

1. Probar que toda variedad es localmente conexa y localmente compacta. Probar además que toda variedad es unión numerable de compactos.
2. Probar que toda variedad es paracompacta.
3. Probar que no todo espacio paracompacto, localmente euclidiano y Hausdorff tiene una base numerable.
4. Sea $M = (0,1) \times (0,1)$ con la topología del orden lexicográfico. Probar que M es Hausdorff y localmente euclidiana pero no es una variedad topológica. ¿Qué pasa con $[0,1] \times [0,1]$?
5. Verificar que un abierto de una variedad es una variedad (de la misma dimensión). Verificar que el producto cartesiano de dos variedades es naturalmente una variedad (su dimensión es la suma).
6. Verificar que la esfera $\mathbb{S}^2$ y el toro son superficies compactas, notar que el toro es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
7. Probar que si se identifican los puntos opuestos del disco $\mathbb{D}^2$, se obtiene una superficie compacta.
8. Probar que los espacios proyectivos reales $\mathbb{P}^n$ son variedades.
9. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3 con producto interno. Probar que el conjunto de puntos (x, y) en $V \times V$ ambos de norma 1 y que son mutuamente ortogonales, es una variedad. Calcular su dimensión.
10. Sea C una curva en $\mathbb{R}^3$ (variedad de dimensión 1). Probar que el conjunto de todos los vectores normales a C forman una variedad tridimensional.

Variedades diferenciables

1. Probar que los siguientes conjuntos tienen una estructura de variedad diferenciable de dimensión d y encontrar un atlas.
   a) Esfera $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $d = n$ (ver ejercicio siguiente).
   b) Espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^n / \sim$, donde $x \sim y$ si $x = \pm y$, $d = n$.
   c) Espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$, donde $x \sim y$ sii son l.d.
   d) Toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ (n veces), $d = n$.
   e) Cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cong S^1 \times \mathbb{R}$, $d = 2$.
2. Probar que los siguientes conjuntos tienen una estructura de variedad diferenciable de dimensión d.
   a) $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R}) = \{A \in M_m(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$, $d = m^2$.
   b) $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) = \{A \in M_m(\mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\}$, $d = 2m^2$.
   c) $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R}) = \{A \in M_m(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$, $d = m^2 - 1$.
   d) $\mathrm{O}_m(\mathbb{R}) = \{A \in M_m(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = 1\}$, $d = m(m-1)/2$.

3. Probar que si M es una variedad de dimensión m y $U \subseteq M$ es abierto, entonces U tiene una estructura natural de variedad de dimensión m. Recíprocamente, si $V \subseteq M$ es un subespacio que tiene una estructura de variedad de dimensión m, entonces V es abierto en M.

4. Probar que el producto cartesiano finito de variedades diferenciales es naturalmente una variedad diferencial cuya dimensión es la suma de las dimensiones. Verificar la propiedad universal del producto cartesiano finito en la categoría de variedades diferenciales.

5. Probar que un espacio vectorial real V de dimensión finita n tiene una única estructura de variedad diferencial tal que si $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ es una base entonces $T : \mathbb{R}^n \to V$ definida por $T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ es un difeomorfismo. Exhibir un atlas *minimal* (en el sentido de la inclusión) para tal estructura.

6. Probar que $\mathbb{S}^n$ no se puede cubrir por una sola carta.

7. Probar que si G es uno de los grupos del ejercicio anterior, la multiplicación $\bullet : G \times G \to G$ y tomar inversa $^{-1} : G \to G$ son diferenciables.

8. En $\mathbb{R}$ se definen las cartas $(\mathbb{R}, \mathrm{Id})$ y $(\mathbb{R}, c)$, donde $c(x) = x^3$. Probar que estas cartas no son compatibles. Deducir que los atlas maximales que contienen a cada una de estas cartas son distintos. Por último, probar que estas dos estructuras de variedad diferenciable sobre $\mathbb{R}$ son difeomorfas.

$*$9. En la recta con dos orígenes $X = \mathbb{R} \cup \{0'\}$, con $0' \notin \mathbb{R}$, se consideran dos cartas: una es $(\mathrm{Id}, \mathbb{R})$, y la otra es (ϕ, U), donde $U = X - \{0\}$, $\phi(x) = x$ si $x \neq 0$ y $\phi(0') = 0$. Probar que con esta estructura todo punto de X tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}$, que el cambio de coordenadas de este atlas es diferenciable, pero X no es una variedad.

10. Probar que son diferenciables:

    a) La identidad $\mathrm{Id} : X \to X$.
    b) La composición de funciones diferenciables.
    c) La diagonal $\Delta : X \to X \times X$, $\Delta(x) = (x, x)$.
    d) Las proyecciones $\pi_X : X \times Y \to X$, $\pi_Y : X \times Y \to Y$.

$*$11. Sean M, N variedades. Probar que $f : M \to N$ es diferenciable si y solo si $g \circ f : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable para toda $g : N \to \mathbb{R}$ diferenciable.

$*$12. Probar que si M es una variedad conexa de dimensión 1, entonces $M = \mathbb{S}^1$ o $M = \mathbb{R}$.

13. Probar que si M es una variedad, eventualmente con borde, conexa y compacta de dimensión 1, entonces $M = \mathbb{S}^1$ o $M = I$.

14. Probar que si $f : M \to N$ es un difeomorfismo, entonces $\partial f = f|_{\partial M} : \partial M \to \partial N$ también.

15. Probar que el cilindro con borde $\mathbb{S}^1 \times I$ y la cinta de Möbius con borde no son difeomorfos.

16. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset H^n$ entornos de 0. Probar que U y V no son difeomorfos.

17. Sea $(M_i)_{i \in I}$ una familia numerable de variedades diferenciales, todas de dimensión n. Supongamos que para cada par $i \neq j$ están dados: dos abiertos $U_{ij} \subseteq M_i$ y $U_{ji} \subseteq M_j$, y un difeomorfismo $f_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}$ que no puede extenderse continuamente a ningún punto de ∂U_{ij}, tales que se satisfacen las siguiente propiedades:

    - $f_{ji} = f_{ij}^{-1}$,

- $f_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$,
- $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ en $U_{ij} \cap U_{ik}$.

Mostrar que existe una variedad diferencial M y morfismos $\psi_i : M_i \to M$ tales que ψ_i es un difeomorfismo entre M_i y un abierto de M, y

a. los abiertos $\psi_i(M_i)$ cubren M,

b. $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(M_i) \cap \psi_j(M_j)$,

c. $\psi_i = \psi_j \circ f_{ij}$ en U_{ij}.