Segunda Escuela Puntana de Combinatoria- ECOS 2013
Julio - agosto 2013, San Luis

Espacios topológicos finitos y aplicaciones

Manuela Cerdeiro – Gabriel Minian
Departamento de Matemática
FCEyN, Universidad de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina

Índice general

Introducción

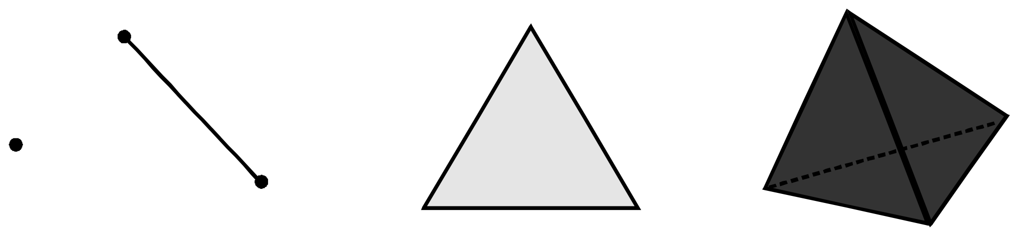
Estas notas fueron elaboradas a modo de guía y complemento del curso dictado por Gabriel Minian en la Escuela de Combinatoria ECOS 2013 (San Luis, Julio 2013).
Presentamos los resultados más básicos de la teoría de espacios topológicos finitos y su relación con los poliedros y los posets finitos. En la primera parte del curso repasaremos los conceptos básicos sobre poliedros, incluyendo su realización geométrica, las subdivisiones baricéntricas y las nociones de colapsos y expansiones. En la segunda parte presentamos a los espacios finitos y su relación con los poliedros y los posets. En la tercera parte del curso mostraremos, a modo de ejemplo, cómo utilizar la teoría de espacios finitos para analizar un problema abierto del álgebra y la topología desde un punto de vista novedoso, utilizando herramientas combinatorias.
Los prerrequisitos matemáticos para entender este curso son pocos y, para los lectores no familiarizados con conceptos de la topología y la topología algebraica agregamos un breve apéndice al final con los términos y resultados básicos necesarios.

Manuela Cerdeiro – Gabriel Minian

Capítulo 1

Poliedros y complejos simpliciales

Un *poliedro* es un subconjunto de algún espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ que se construye pegando ciertos bloques, llamados *símplices*. Un símplex es la cápsula convexa de un determinado conjunto de puntos llamados *vértices*. Por ejemplo un segmento en el caso de 2 puntos, un triángulo cuando son 3, un tetraedro cuando son 4. Cuando dos símplices se pegan, la intersección debe ser siempre una *cara* común a ambos, es decir la cápsula convexa de los vértices que comparten.



Algunos símplices

Los poliedros son objetos geométricos, pero tienen además una estructura combinatoria, que está representada por los denominados *complejos simpliciales*. Esta estructura combinatoria permite estudiarlos y manipularlos utilizando herramientas discretas mezcladas con herramientas provenientes de la topología y la geometría. Varios problemas de la topología y de la geometría se pueden traducir o interpretar en un contexto combinatorio, y esto ayuda muchas veces a resolverlo. Al trabajar con complejos simpliciales, debe tenerse en cuenta que se está trabajando en realidad con estructuras geométricas (los poliedros), representadas por estructuras discretas o combinatorias.
Una exposición exhaustiva sobre poliedros y complejos simpliciales puede encontrarse en los libros [Gl, Mu]. Otro material de consulta sobre este tema es [CaM].

1.1. Complejos geométricos y abstractos

Definición 1.1.1. Una *combinación convexa* de puntos $v_0, \dots, v_k$ de $\mathbb{R}^n$ es una combinación lineal $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i v_i$ cuyos coeficientes verifican $\lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$.
La *cápsula convexa* de un subconjunto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ es el menor convexo que lo contiene o, equivalentemente, el conjunto de las combinaciones convexas de elementos de V.

Un subconjunto $\{v_0, v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es *afínmente independiente* si cada vez que $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i v_i = 0$ y $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 0$ se tiene que $\lambda_i = 0$ para todo $0 \leq i \leq k$.
Notar que dos puntos son afínmente independientes si y sólo si son distintos y tres puntos son afínmente independientes si y sólo si no están en una misma recta.

Ejercicio 1.1.2. Dado un conjunto $\{v_0, v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, probar que son equivalentes:

i) El conjunto $\{v_0, v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es afínmente independiente.

ii) El conjunto $\{v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 1.1.3. Probar que si $\{v_0, v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es afinmente independiente, entonces la escritura de los elementos de su cápsula convexa es única. Es decir, si

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=0}^{k} \mu_i v_i, \text{ con } \lambda_i \geq 0, \mu_i \geq 0, \ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1, \sum_{i=0}^{k} \mu_i = 1,$$

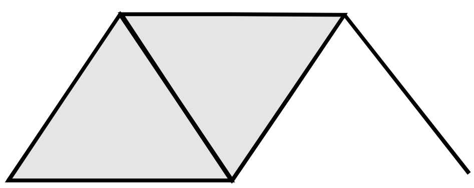
entonces $\lambda_i = \mu_i$ para todo $0 \leq i \leq k$.

Un subconjunto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ está en *posición general* si cada subconjunto de V de cardinal menor o igual a $n + 1$ es afínmente independiente.

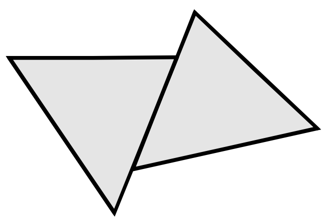
Definición 1.1.4. Un *símplex geométrico* es la cápsula convexa de un conjunto de puntos afínmente independientes en algún $\mathbb{R}^n$. Estos puntos se llaman vértices del símplex. Si el conjunto de vértices que determinan el símplex σ es $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, notaremos $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ (identificando al simplex con el conjunto de vértices que lo determinan) y diremos que σ es un n-símplex, o que tiene *dimensión* n.
Una *cara* de un símplex geométrico es la cápsula convexa de un subconjunto de sus vértices. Cuando τ es una cara de σ notamos $\tau \leq \sigma$.
Un *complejo simplicial geométrico* K es un conjunto de símplices geométricos tales que

- si $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$, entonces $\tau \in K$,
- si $\sigma, \tau \in K$, entonces $\sigma \cap \tau \leq \sigma$ y $\sigma \cap \tau \leq \tau$.

Es decir que cada cara de un símplex de K es un símplex de K y cada intersección de dos símplices de K es una cara común a ambos.



K



L

A la izquierda se representa un complejo simplicial K. En cambio L no es un complejo simplicial, porque los triángulos se intersecan en un tramo de una cara de cada uno.

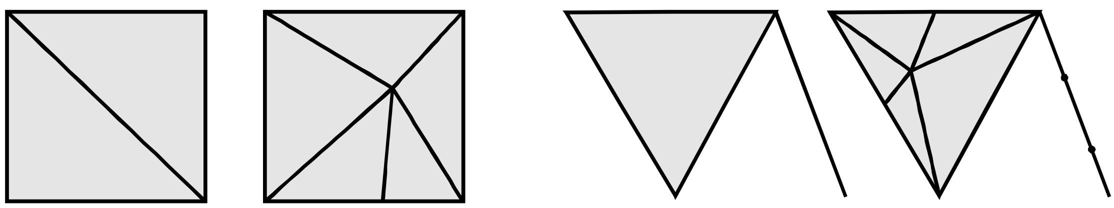
La *dimensión* del complejo simplicial es el máximo, si existe, de las dimensiones de sus símplices. Si el complejo es vacío, su dimensión es -1, y si las dimensiones de sus símplices no están acotadas, su dimensión es infinita.

Un complejo simplicial también se puede definir en forma abstracta. En este caso los símplices, en lugar de pensarse como cápsulas convexas de vértices en algún $\mathbb{R}^n$ se ven simplemente como conjuntos de puntos. Ambos enfoques (el geométrico y el abstracto) son equivalentes.

Definición 1.1.5. Un *complejo simplicial abstracto* K consiste en un conjunto K^0 de *vértices*, y un conjunto de subconjuntos finitos no vacíos de K^0, llamados *símplices*. Además, cada vértice es un símplex, y cada subconjunto (no vacío) de un símplex es también un símplex. En el futuro, para decir que σ es un símplex del complejo K, notaremos $\sigma \in K$. Cuando un símplex $\tau \in K$ esté contenido en otro símplex σ, es decir que el conjunto de vértices que lo determinan es un subconjunto de los vértices de σ, diremos que τ es *cara* de σ, y notaremos $\tau \leq \sigma$.
Si además $\tau \neq \sigma$, diremos que es una *cara propia*, y notaremos $\tau \lneq \sigma$, y si no existe ν tal que $\tau \lneq \nu \lneq \sigma$, diremos que es una *cara inmediata*, y notaremos $\tau \prec \sigma$.

Observemos que en la definición abstracta de complejo simplicial no hizo falta hacer ninguna aclaración sobre la intersección de dos símplices del complejo, ya que la intersección de dos conjuntos va a ser siempre un subconjunto común a ambos.
Cada símplex geométrico tiene un único conjunto de vértices afínmente independiente que lo generan. Así, todo complejo simplicial geométrico determina un complejo simplicial abstracto, identificando cada símplex geométrico con el conjunto de vértices que lo forman.

Definición 1.1.6. La *realización geométrica* de un complejo geométrico K, que notaremos $|K|$, es el espacio topológico que consiste en la unión de los símplices de K. Cada símplex tiene una topología (heredada como subespacio del $\mathbb{R}^n$ en donde se lo piensa), y la topología de $|K|$ es la final respecto de los símplices. Es decir que $U \subseteq K$ es abierto si y sólo si $U \cap \sigma$ es abierto en σ para todo $\sigma \in K$.
A los espacios topológicos que son la realización geométrica de algún complejo simplicial se les dice *poliedros*. Cada complejo simplicial cuya realización sea el espacio X es una *triangulación* de X.



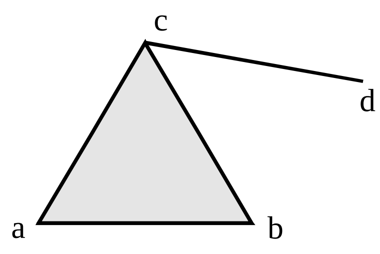
Dos poliedros con distintas triangulaciones

Definición 1.1.7. Sea K un complejo simplicial abstracto y finito. Si $n = \dim K$, se puede elegir un conjunto de puntos del cardinal de K^0 que se encuentren en posición general, dentro de un $\mathbb{R}^m$, con $m \geq 2n+1$. Así, identificando cada vértice con el punto que le corresponde, y cada símplex con la cápsula convexa de sus vértices, se obtiene un *complejo simplicial geométrico asociado a K*, al que también notaremos K. Este complejo geométrico no es único, pero sí lo es salvo isomorfismos simpliciales.
La realización geométrica de este complejo geométrico será también *realización geométrica* del complejo abstracto original, y la notaremos $|K|$. Dado un símplex $\sigma \in K$, notaremos

$|\sigma|$ al símplex que le asociamos en la realización geométrica.
Esta construcción no es única, pero lo es salvo homeomorfismos lineales a trozos.

Ejemplos.

- Sean $K^0 = \{*\}$ y $K = \big\{\{*\}\big\}$, entonces K es un complejo simplicial, con un solo vértice y un solo símplex. También es complejo simplicial el complejo vacío, que no tiene vértices.
- El conjunto $K = \big\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$ es un complejo simplicial, con vértices $K^0 = \{a, b\}$.
- Sea $K^0 = \{a, b, c, d\}$ y sea K el conjunto de símplices $\big\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c, d\}\big\}$, entonces K es un complejo simplicial. Pero no lo sería si $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ o $\{a, c\}$ no hubieran sido incluidos entre los símplices.



K

Los vértices de un complejo K son sus 0-símplices, y es por esto que, al describir un complejo, bastará con decir cuáles son sus símplices.
En este curso trabajaremos únicamente con complejos simpliciales finitos, es decir que tienen finitos símplices o, equivalentemente, finitos vértices. Sin embargo la definición no exige finitud, y de hecho los complejos no finitos también se estudian y permiten estudiar combinatoriamente una clase más amplia de espacios topológicos.
De ahora en más identificamos los complejos simpliciales abstractos con los geométricos, y los pensamos, topológicamente, como una subconjunto de algún espacio euclídeo y al mismo tiempo como un conjunto de símplices (complejo abstracto).

Ejercicio 1.1.8. Si un complejo simplicial es finito, entonces su realización geométrica es un espacio topológico compacto.

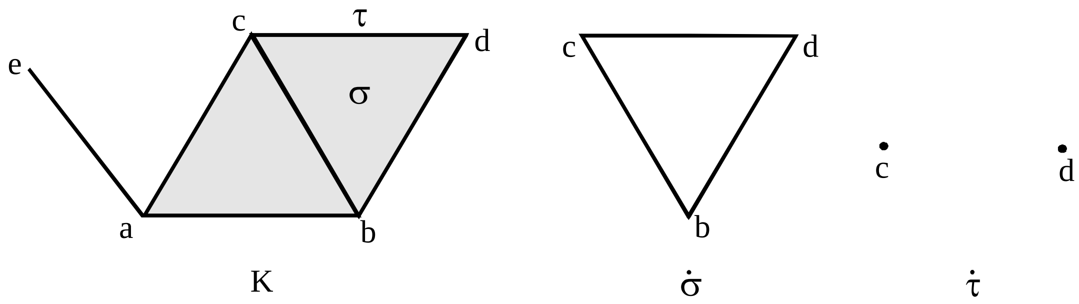
Definición 1.1.9. Un *subcomplejo* de K es un subconjunto L tal que para todo $\sigma \in L$ y $\tau \leq \sigma$, se tiene $\tau \in L$.

Ejemplo. En el último ejemplo, $L = \big\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\big\}$ es un subcomplejo de K, mientras que $M = \big\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\big\}$ no lo es.

Ejemplo. Dado un símplex $\sigma \in K$, el conjunto $\{\tau : \tau \leq \sigma\}$ es un subcomplejo de K. Lo notaremos σ, al igual que al símplex.

1.2. Geometría de los complejos simpliciales

Definición 1.2.1. Dado $\sigma \in K$, llamaremos *borde* de σ al subcomplejo $\dot{\sigma} = \{\tau \in K$ tal que $\tau \lneqq \sigma\}$.



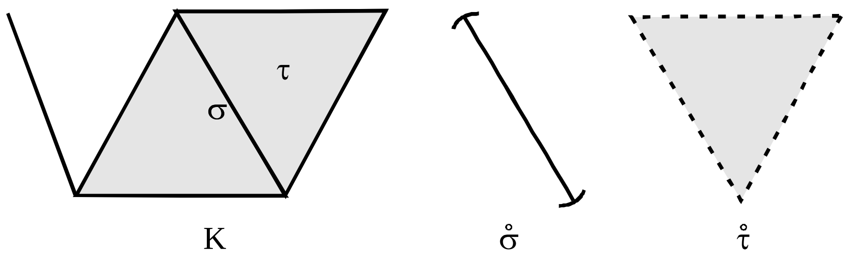
Bordes

Notemos que $\dot{\sigma} = \sigma \setminus \{\sigma\}$.
El borde de un símplex abstracto se corresponde con la frontera del símplex geométrico, es decir, las combinaciones convexas de un subconjunto propio de los vértices o, lo que es lo mismo, las combinaciones convexas donde algún coeficiente es cero.
Siempre que τ es cara de σ, $\dim \tau \leq \dim \sigma$. Además, si $\tau \prec \sigma$, se tiene que $\dim \tau = \dim \sigma - 1$, así que, para todo símplex σ, vale que $\dim \dot{\sigma} = \dim \sigma - 1$.

Definición 1.2.2. Diremos que $\sigma \in K$ es un *símplex maximal* si no está contenido en ningún otro símplex.
Si un símplex $\sigma \in K$ tiene dimensión máxima, entonces es un símplex maximal.

Ejercicio 1.2.3. Mostrar que no siempre los símplices maximales tienen dimensión máxima.

Definición 1.2.4. Dado un símplex σ (pensado geométricamente), el *interior* de σ, al que notaremos por $\mathring{\sigma}$, es el conjunto de combinaciones convexas que no están en el borde del símplex, es decir que los coeficientes de los vértices de σ son todos positivos.
El interior de un símplex siempre es abierto dentro del símplex, pero en general no lo es en la realización del complejo simplicial. Sólo cuando el símplex es maximal en K, su interior es abierto en $|K|$.

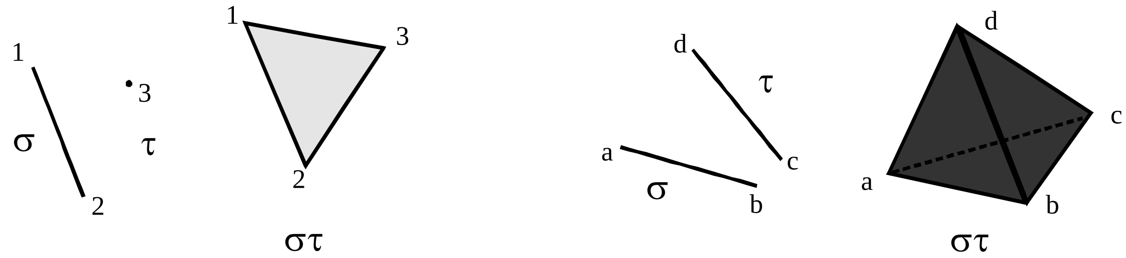


Los interiores de algunos símplices

Observación 1.2.5. Dados dos símplices distintos $\sigma, \tau \in K$, $\mathring{\sigma} \cap \mathring{\tau} = \emptyset$. De hecho, si para un par de símplices de K se tiene $\sigma \cap \mathring{\tau} \neq \emptyset$, entonces $\tau \leq \sigma$. De modo que si $x \in |K|$ existe un único $\sigma \in K$ tal que $x \in \mathring{\sigma}$, es decir que se escribe de forma única como combinación convexa de vértices de algún símplex de K con coeficientes positivos.

Definición 1.2.6. Dados dos símplices disjuntos, $\sigma, \tau \in K$, el *join* de ellos es un nuevo

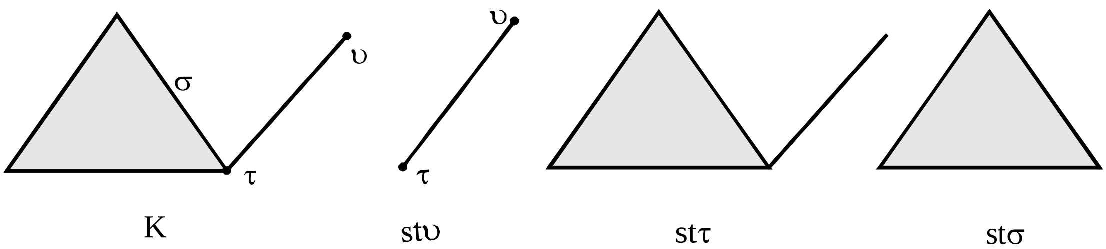
símplex, que notaremos $\sigma\tau$, y que es el simplex cuyo conjunto de vértices es la unión de los vértices de τ y σ. En general, $\sigma\tau$ no tiene por qué ser un símplex de K.
Es claro que $\dim \sigma\tau = \dim \sigma + \dim \tau + 1$.



Joins

Geométricamente, el join entre dos símplices es la unión de todos los segmentos que tienen un extremo en cada uno de ellos.

Definición 1.2.7. Dado un símplex $\sigma \in K$, definimos el *star* de σ como $\operatorname{st}\sigma = \{\tau \in K$ tal que existe $\nu \in K$ con $\sigma \leq \nu, \tau \leq \nu\}$.
Claramente, $\operatorname{st}\sigma$ es un subcomplejo de K, y $\sigma \in \operatorname{st}\sigma$.



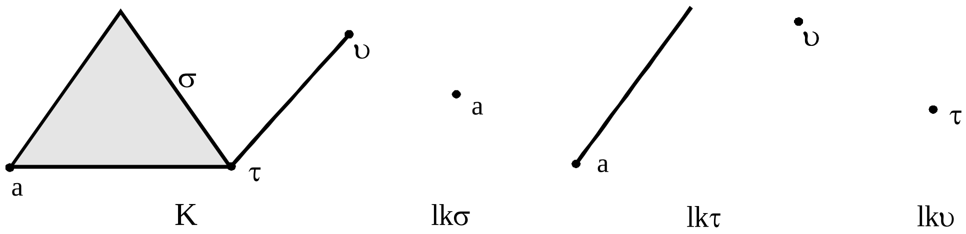
Stars

Proposición 1.2.8. *Para todo $v \in K^0$, el subcomplejo* $\operatorname{st} v$ *es un entorno del vértice.*

Demostración. Sea $U = \bigcup_{v\in\sigma} \mathring{\sigma}$, entonces es claro que $v \in U \subseteq \operatorname{st} v$.
Veamos que U es abierto. Sean $\tau \in K$ y $x \in U \cap \tau$, entonces $x \in \mathring{\sigma} \cap \tau$ para un σ tal que $v \in \sigma$. Esto implica que $\sigma \leq \tau$ y, por lo tanto, $v \in \tau$. Es decir que los símplices que intersecan a U son los que tienen al vértice v. Entonces dado $\rho \in K$, $\rho \setminus U = \bigcup\{\tau : \tau \leq \rho, v \notin \tau\}$, que es cerrado por ser unión finita de cerrados. Así, $\rho \cap U$ es abierto en ρ para todo $\rho \in K$. $\square$

Definición 1.2.9. Al abierto $\bigcup_{v\in\sigma} \mathring{\sigma}$ se lo llama *star abierto de v* y se lo nota $\mathring{\operatorname{st}}\sigma$.
Los stars abiertos de los vértices cubren todo el complejo, es decir, $|K| = \bigcup_{v\in K^0} \mathring{\operatorname{st}} v$.

Definición 1.2.10. Dado $\sigma \in K$, definimos su *link* como $\operatorname{lk}\sigma = \{\tau \in K$ tal que $\tau \cap \sigma = \emptyset$ y $\sigma\tau \in K\}$.
El link de un símplex es siempre un subcomplejo de K.

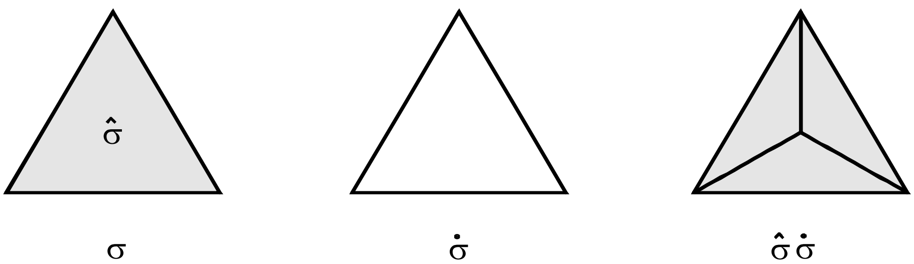


Links

Definición 1.2.11. Dados dos complejos simpliciales K y L disjuntos, se define el *join* de los complejos como $KL = K \cup L \cup \{\sigma\tau : \sigma \in K, \tau \in L\}$, que tiene por vértices a $(KL)^0 = K^0 \cup L^0$.
Cuando K es un vértice v, a este join también se lo llama *cono* de L con vértice v.
Cuando K es un complejo con dos vértices y sin ningún otro símplex, entonces al join se lo llama *suspensión de L*.

Definición 1.2.12. El *baricentro* de un símplex geométrico $\sigma = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ es el punto del interior de σ que tiene todas sus coordenadas iguales, es decir, $\widehat{\sigma} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} v_i$.

Observación 1.2.13. Todo símplex geométrico σ es homeomorfo a la realización del join (cono) de su borde y su baricentro, es decir $\sigma = \widehat{\sigma}\dot{\sigma}$.



Proposición 1.2.14. *Dado $\sigma \in K$, los complejos σ y $\operatorname{lk}\sigma$ son disjuntos, y además vale $\sigma \operatorname{lk}\sigma = \operatorname{st}\sigma$.*

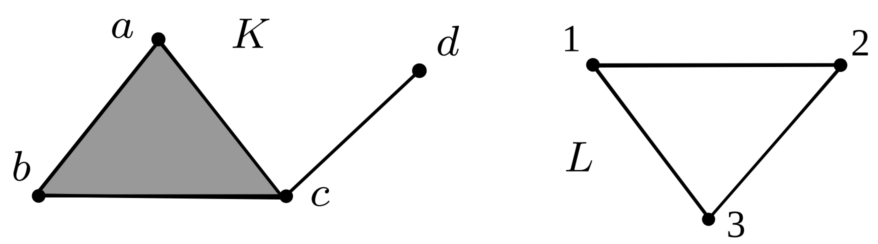
Demostración. Es claro que son disjuntos, y que ambos están incluidos en $\operatorname{st}\sigma$. Sean $\tau \in \sigma$ y $\nu \in \operatorname{lk}\sigma$. Como $\tau \leq \sigma$ y $\sigma \cap \nu = \emptyset$, entonces $\tau \cap \nu = \emptyset$, y además el join $\tau\nu$ es una cara de $\sigma\nu$, por lo que pertenece al complejo K. Además, el símplex $\sigma\nu$ contiene a ambos símplices, σ y $\tau\nu$, así que $\tau\nu \in \operatorname{st}\sigma$.
Para ver la otra inclusión consideremos $\tau = \{v_0, \ldots, v_m\} \in \operatorname{st}\sigma$ y veamos que debe estar en $\sigma \operatorname{lk}\sigma$. Si $\tau \leq \sigma$ o $\tau \cap \sigma = \emptyset$, entonces τ pertenece a σ o a $\operatorname{lk}\sigma$, y listo. Si no, podemos suponer que $\tau \cap \sigma = \{v_0, \ldots, v_l\}$ con $0 \leq l < m$ (reordenando de los vértices de τ). Llamemos μ a la intersección y $\nu = \{v_l + 1, \ldots, v_m\}$ al símplex generado por el resto de los vértices de τ. Entonces $\mu \in \sigma$, $\nu \in \operatorname{lk}\sigma$, y $\tau = \mu\nu \in \sigma \operatorname{lk}\sigma$. □

Corolario 1.2.15. *La realización geométrica del star de todo símplex es un cono topológico, pues $\operatorname{st}\sigma = \sigma \operatorname{lk}\sigma = \widehat{\sigma}\dot{\sigma} \operatorname{lk}\sigma$.*

Observación. Otras formas de describir al star y al link de un símplex son $\operatorname{st}\sigma = \bigcup\limits_{\sigma \leq \nu} \nu$ (esta última es una unión de subcomplejos de K), y $\operatorname{lk}\sigma = \{\tau \in \operatorname{st}\sigma$ tal que $\sigma \cap \tau = \emptyset\}$.

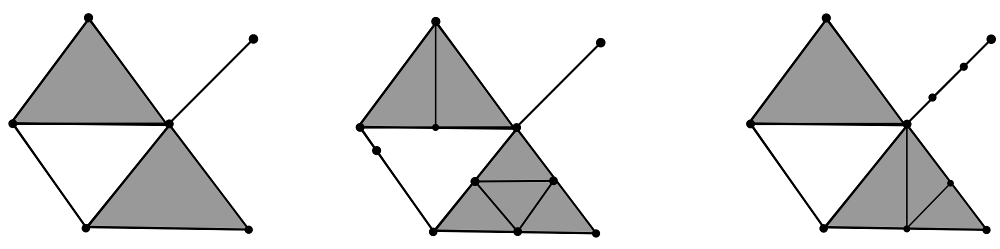
Definición 1.2.16. Un *morfismo simplicial* $f : K \to L$ es una función entre los vértices $f : K^0 \to L^0$ tal que si $\{v_0, \ldots, v_k\}$ es un símplex de K, entonces $\{f(v_0), \ldots, f(v_k)\}$ es un símplex de L.
Todo complejo tiene su morfismo identidad, y la composición de morfismos simpliciales es siempre un morfismo simplicial.

Ejemplo. Sean $K = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}\}$ y $L = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$, y sea $f : K \to L$ definida por $f(a) = 1, f(b) = 1, f(c) = 3, f(d) = 2$. Entonces f es un morfismo simplicial.
Sin embargo g, definida por $g(a) = 1, g(b) = 2, g(c) = 3, g(d) = 3$ no es un morfismo simplicial, porque $\{g(a), g(b), g(c)\}$ no es un símplex de L.



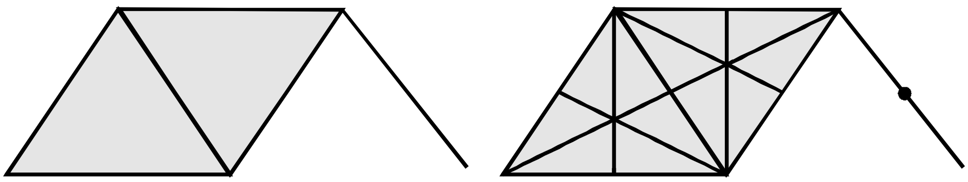
Definición 1.2.17. Sea K un complejo simplicial, y sea $|K| \subseteq \mathbb{R}^n$ su realización geométrica. Una *subdivisión* de K es un complejo simplicial L con realización geométrica $|L| \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que para todo símplex $\tau \in L$, $|\tau| \subseteq |\sigma|$ para un símplex $\sigma \in K$ y para todo símplex $\sigma \in K$, $|\sigma|$ es unión de símplices de L.
Siempre que L es una subdivisión de K, se tiene que $|L| = |K|$.

Ejemplo.



Un complejo simplicial y dos subdivisiones distintas

Definición 1.2.18. Sea K un complejo simplicial, con realización geométrica $|K|$. La *subdivisión baricéntrica* de K, a la que notaremos K', es el complejo simplicial que tiene por vértices a los baricentros de los símplices de K, es decir, $(K')^0 = \{\widehat{\sigma} : \sigma \in K\}$ y por símplices a las cápsulas convezas de los conjuntos $\{\widehat{\sigma}_0, \widehat{\sigma}_1, \ldots, \widehat{\sigma}_k\}$ con $\sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \cdots \leq \sigma_k \in K$.
También se puede definir la subdivisión baricéntrica de manera combinatoria. Dado un complejo simplicial K, se define K' como el complejo cuyos vértices son los símplices



K K'

Un complejo simplicial K y su subdivisión baricéntrica K'

de K y cuyos símplices son las cadenas de símplices de K, es decir, $(K')^0 = K$ y $K' = \big\{\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k\} : \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \cdots \leq \sigma_k\big\}$.
La relación entre una y otra definición se obtiene identificando cada símplex abstracto con el baricentro del símplex geométrico.

1.3. Colapsos, expansiones y homotopía simple

La teoría de homotopía simple es una manera de estudiar deformaciones geométrícas de los complejos simpliciales, usando movimientos elementales llamados *colapsos* y *expansiones*, que se pueden describir combinatoriamente. Estas deformaciones resultan más rígidas que las deformaciones homotópicas de espacios topológicos (homotopías continuas) y están relacionadas con varios problemas abiertos de la geometría y también de la teoría combinatoria de grupos, como veremos en la última parte de este curso. Un curso introductorio sobre homotopía simple puede leerse en los libros [Co, Gl].

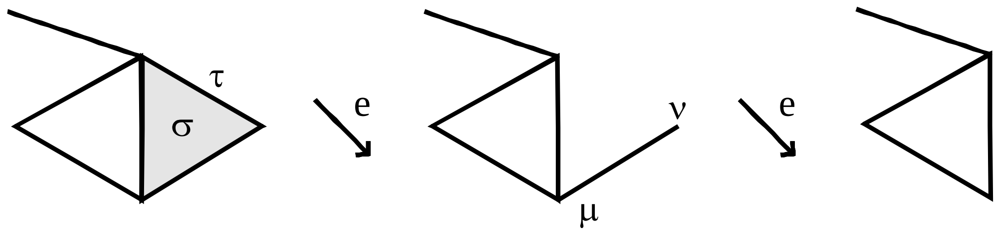
Definición 1.3.1. Dado un complejo simplicial K y dados $\sigma, \tau \in K$, se dice que τ es *cara libre* de σ si τ es una cara propia de σ y no es cara propia de ningún otro símplex.

Ejercicio 1.3.2. Probar que si τ es cara libre de σ, entonces σ es un símplex maximal, y $\dim \tau = \dim \sigma - 1$ (es decir $\tau \prec \sigma$).

Definición 1.3.3. Cuando τ es cara libre de σ, por el ejercicio anterior se tiene que $L = K \setminus \{\sigma, \tau\}$ resulta ser un subcomplejo simplicial de K que tiene los mismos símplices que K salvo σ y τ. En este caso diremos que hay un *colapso elemental* de K en L, o equivalentemente, que hay una expansión elemental de L en K. Esto se denota por $K \overset{e}{\searrow} L$ ó $L \overset{e}{\nearrow} K$. Un *colapso simplicial* es una sucesión finita de colapsos elementales, y una *expansión simplicial* es una sucesión finita de expansiones elementales.

Definición 1.3.4. Diremos que dos complejos K y K' son *simplemente equivalentes* o que tienen el mismo *tipo homotópico simple*, y notaremos $K \diagup\!\!\searrow K'$, si hay una sucesión finita de colapsos y expansiones que transforman K en K'. Si a lo largo de la sucesión, los complejos obtenidos son siempre de dimensión menor o igual a n, diremos que son *n-simplemente equivalentes* o que K se n-deforma en K', y lo notaremos $K \diagup\!\!\overset{n}{\searrow} K'$.

Las 3-deformaciones entre complejos simpliciales de dimensión 2 juegan un papel importante en esta teoría. Volveremos con esto en el último capítulo, cuando tratemos la conjetura de Andrews-Curtis.



Un colapso simplicial determinado por dos colapsos elementales

Observación 1.3.5. Un colapso simplicial elemental $K \overset{e}{\searrow} L$ implica que $|L| \hookrightarrow |K|$ es un retracto por deformación fuerte.

Corolario 1.3.6. *El tipo homotópico simple es más fuerte que el tipo homotópico. Es decir,*

$$K \diagup\!\!\searrow L \Rightarrow |K| \simeq_{he} |L|.$$

Capítulo 2

Espacios topológicos finitos

Los *espacios topológicos finitos* son, como su nombre lo indica, espacios topológicos de cardinal finito. Veremos que estos objetos son muy útiles para estudiar a los poliedros compactos ya que permiten desarrollar y aplicar herramientas combinatorias para estudiar propiedades topológicas y geométricas.

Mostraremos que los espacios finitos están fuertemente relacionados con los conjuntos parcialmente ordenados finitos (*posets*). Utilizando la relación entre espacios finitos y posets, veremos cómo aplicar la combinatoria de los posets para estudiar la topología de poliedros. En el último capítulo de estas notas veremos incluso cómo usar la combinatoria de los espacios finitos para investigar problemas algebraicos, traduciendo previamente el problema algebraico en términos topológicos.
Las referencias para este tema son [B1, BM1, BM2, BM3, BM4, CM, Ma1, Ma2, Ma3, Mc, Mi, O, St1, St2].

2.1. Espacios finitos y posets

Recordemos los primeros axiomas de separación en espacios topológicos.

Definición 2.1.1. Un espacio topológico X es T_0 si para cada par de puntos $x, y \in X$ existe, o bien un abierto U de X tal que $x \in U, y \notin U$, o un abierto V tal que $x \notin V, y \in V$.
Un espacio es T_1 si para cada par de puntos $x, y \in X$ existe un abierto U tal que $x \in U, y \notin U$. Esta condición equivale a que los conjuntos unipuntuales sean cerrados en X.
Un espacio es T_2 si para cada par de puntos $x, y \in X$ existen abiertos U y V tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.
Observemos que todo espacio T_2 es T_1 y todo espacio T_1 es T_0.

Ejercicio 2.1.2. Exhibir un espacio topológico que sea T_0 y no T_1, y uno que sea T_1 y no T_2.

Ejercicio 2.1.3. Probar que si un espacio finito es T_1, entonces es discreto (es decir, todo punto es un abierto de X).

Definición 2.1.4. Dado un espacio topológico finito X, y dado $x \in X$, la intersección de todos los abiertos que contienen a x es claramente un abierto, y es el menor que contiene a x. Lo llamaremos *abierto minimal de x*, y lo notaremos U_x.
Es claro que los abiertos U_x son una base para la topología de X.

Construcción de la correspondencia entre espacios finitos y posets

Dado un espacio finito X, vamos a definir *una relación a partir de su topología*, de la siguiente manera:

$$x \leq y \text{ sii } x \in U_y \tag{2.1}$$

Equivalentemente, $x \leq y$ si todo abierto que contiene a y contiene también a x (i.e. $U_x \subseteq U_y$).

Notar que esta relación resulta reflexiva y transitiva, es decir, un preorden.

Ejercicio 2.1.5. Sea X un espacio topológico finito. Probar que X es T_0 si y sólo si la relación definida por (2.1) es antisimétrica.

En realidad, esta construcción puede hacerse en cualquier espacio topológico donde la intersección arbitraria de abiertos sea abierta (estos espacios se llaman A-espacios). Nosotros trabajaremos sólo con los finitos.

Recíprocamente, dado un conjunto finito con un preorden $(X, \leq)$, se puede definir *una topología a partir de la relación*, tomando la base $\mathcal{B} = \{U_x : x \in X\}$, donde

$$U_x = \{y \in X : y \leq x\}.$$

Este espacio topológico resultará T_0 si y sólo si $\leq$ es un orden.

Estas dos construcciones inducen una correspondencia uno a uno entre los espacios topológicos finitos y los conjuntos finitos con un preorden, y una entre los espacios finitos T_0 y los posets finitos. Notar que los abiertos minimales $U_x = \bigcap\{U : x \in U, U \text{ es abierto}\}$ se corresponden con $\{y \in X : y \leq x\}$.

De ahora en más trabajaremos únicamente con espacios T_0 y sus posets asociados, y con ambas estructuras, la topológica y la del orden, simultáneamente.

Ejercicio 2.1.6. Sea X un espacio finito. Probar que $x \leq y$ sii la sucesión definida por $x_n = x$ (es decir, la sucesión constante x) tiende a y.

Análogamente a lo que hicimos con los abiertos minimales, para cada $x \in X$ se define el cerrado minimal de x, $F_x = \bigcap\{F : x \in F, F \text{ es cerrado}\} = \{y \in X : y \geq x\}$.

Recordar que dos elementos x, y de un poset X se dicen comparables si $x \leq y$ ó $y \leq x$. Para cada $x \in X$ llamaremos $C_x = \{y \in X : y \text{ es comparable con } x\} = U_x \cup F_x$.

Además, notaremos $\widehat{U}_x = U_x \setminus \{x\}, \widehat{F}_x = F_x \setminus \{x\}$, y $\widehat{C}_x = C_x \setminus \{x\}$.

Ejercicio 2.1.7. Sea X un espacio finito.

1. Probar que un subconjunto $U \subseteq X$ es abierto si y sólo si para todo $x \in U$, vale $y \leq x \Rightarrow y \in U$.

2. Probar que un subconjunto $F \subseteq X$ es cerrado si y sólo si para todo $x \in F$ vale $y \geq x \Rightarrow y \in F$.

3. Mostrar con ejemplos que C_x no es necesariamente abierto ni cerrado.

Notemos que para todo $x \in X$, F_x es el menor cerrado que contiene a x, es decir que es la clausura del conjunto $\{x\}$.

Definición 2.1.8. Para representar a los espacios finitos se suele usar su *diagrama de Hasse*. Este diagrama es un digrafo que tiene por puntos a los elementos del conjunto, y una arista de extremo inferior x y extremo superior z cada vez que $x < z$ pero no exista ningún y tal que $x < y < z$. En estos casos, diremos que z *cubre a* x, y lo notaremos $x \prec z$.
Recordemos que una *cadena* $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ es un subconjunto donde todo par de elementos es comparable (es decir, es un subconjunto totalmente ordenado de X). Si $x_0, \ldots, x_n$ son todos distintos y comparables entre sí, diremos que forman una cadena de *longitud* n.

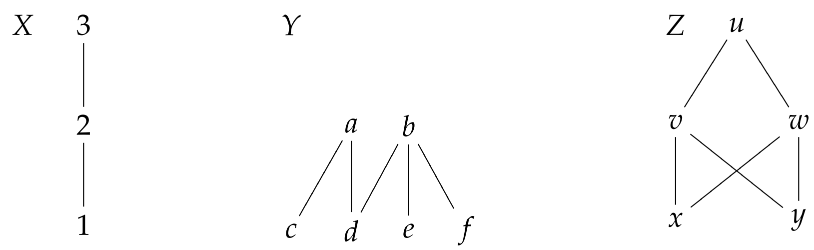
Definición 2.1.9. Dado un espacio finito X, se define su *altura* como la máxima longitud de una cadena en X.

$$h(X) = \text{máx}\{n : \text{ existe una cadena } \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \text{ de longitud } n \text{ en } X\}.$$

Ejemplos. La figura siguiente muestra los diagramas de Hasse de los espacios finitos X, Y, Z.

- $X = \{1, 2, 3\}$ con el orden $1 < 2 < 3$.
- $Y = \{a, b, c, d, e, f\}$ con $c < a$, $d < a$, $d < b$, $e < b$, $f < b$.
- $Z = \{u, v, w, x, y\}$ con $v, w, x, y < u$, $x, y < v$, $x, y < w$.

Sus respectivos diagramas de Hasse son los siguientes.



Notar que los posets X y Z tienen altura 2, e Y tiene altura 1.

Observar que en el diagarama de Hasse de un poset, el abierto minimal U_x de cualquier punto x se corresponde con el subdiagrama de puntos (y aristas) que están por debajo de x (con máximo x).

Proposición 2.1.10. *Una función entre espacios finitos es continua si y sólo si preserva el orden.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ continua y sean $a \leq b$ en X. Como f es continua y $U_{f(b)}$ es abierto, $f^{-1}(U_{f(b)})$ es también abierto. Como $b \in f^{-1}(U_{f(b)})$ y $a \leq b$, entonces $a \in f^{-1}(U_{f(b)})$. Luego, $f(a) \leq f(b)$.
Recíprocamente, sea f un morfismo de orden y sean V un abierto de Y y $b \in f^{-1}(V)$, veamos que $f^{-1}(V)$ es un entorno de b, es decir, que $U_b \subseteq f^{-1}(V)$. Si $a \leq b$, entonces $f(a) \leq f(b)$ por hipótesis, así que $f(a) \in U_{f(b)}$. Como V es abierto y $f(b) \in V$, entonces $U_{f(b)} \subseteq V$. Por lo tanto, $f(a) \in V$ o sea que $a \in f^{-1}(V)$. $\square$

2.2. Topología de espacios finitos

La demostración del siguiente resultado queda como ejercicio para el lector.

Proposición 2.2.1. *Sean X un espacio finito e $Y \subset X$ un subconjunto. La topología de subespacio en Y se corresponde con el orden inducido por la restricción a Y del orden de X.*

Proposición 2.2.2. *Un espacio finito X es conexo si y sólo si para todo par de elementos $x, y \in X$ existe una sucesión $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ tal que para cada i los elementos x_{i-1} y x_i son comparables.*

Demostración. Supongamos primero que X es conexo. Fijemos $x \in X$ y sea A el conjunto de los $y \in X$ que se conectan con x con una sucesión como la del enunciado. Entonces A es abierto y cerrado, pues para todo $y \in A$, vale que $U_y \subseteq A, F_y \subseteq A$. Como X es conexo, $A = X$ Esto prueba la existencia de una sucesión de x a y para todo par de elementos.
Para ver la otra implicación, notar que las componentes conexas de todo espacio finito deben ser abiertas y cerradas, de modo que, dado $x \in X$, su componente conexa contiene a U_x y a F_x. Esto implica que dos elementos comparables deben estar en la misma componente, y por lo tanto cualquier sucesión como la del enunciado está incluida dentro de una misma componente conexa. □

Observación 2.2.3. Notar que las componentes conexas de un espacio finito X son las de su diagrama de Hasse. En particular X es conexo (como espacio topológico) si y sólo si su diagrama de Hasse lo es.

Proposición 2.2.4. *Un espacio finito es conexo si y sólo si es arcoconexo.*

Demostración. Basta ver que, dados $x, y \in X$ con $x < y$, hay un camino continuo que los une. Es decir, que existe una función continua $\gamma : I \to X$, donde I denota al intervalo real $[0, 1]$, tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$.
Sea $\gamma : I \to X$ definida por $\gamma(t) = x$ para todo $0 \leq t < 1$ y $\gamma(1) = y$. Para ver que es continua basta ver que $\gamma^{-1}(U_z)$ es abierto para todo $z \in X$. Si $z \geq y$, entonces $\gamma^{-1}(U_z) = I$, si $z \geq x, z \ngeq y$, entonces $\gamma^{-1}(U_z) = [0, 1)$, y en el resto de los casos $\gamma^{-1}(U_z) = \emptyset$. □

Definición 2.2.5. Dadas dos funciones continuas $f, g : X \to Y$, diremos que $f \leq g$ si para todo $x \in X$ vale que $f(x) \leq g(x)$, y que f y g son comparables si $f \leq g$ ó $g \leq f$.

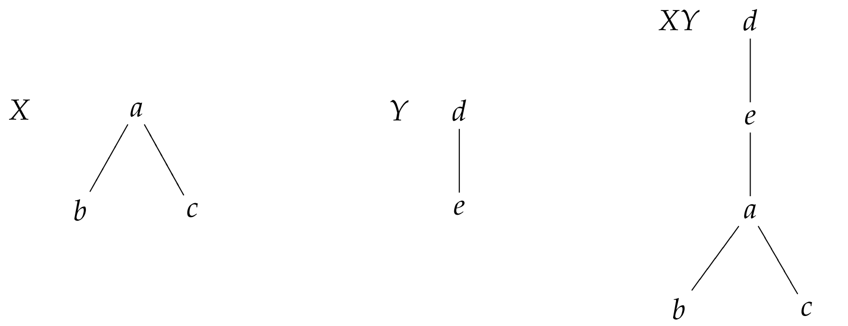
Proposición 2.2.6. *Dos funciones continuas $f, g : X \to Y$ son homotópicas si y sólo si existe una sucesión $f = f_0, f_1, \ldots, f_n = g$ tal que para todo $i > 0$ las funciones f_{i-1} y f_i son comparables.*

Corolario 2.2.7. *Sea X un espacio finito con elemento máximo o mínimo, entonces X es contráctil.*

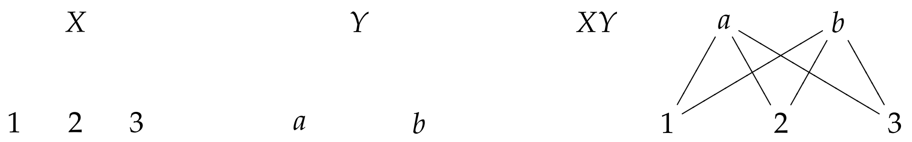
Demostración. La función identidad es menor o igual a la función constantemente x, si x es el máximo, y mayor o igual a la misma, si x es el mínimo, por lo que resultan homotópicas. □

Definición 2.2.8. Dados dos posets X e Y el *join* XY de X con Y es, como conjunto, la unión disjunta de X e Y. El orden en XY se define dentro de X y de Y como el orden original de cada espacio, y entre todo par $x \in X, y \in Y$ se determina $x < y$.

Ejemplo. Mostramos un par de espacios X e Y y el join XY.



Ejemplo. En cambio, si $X = \{1,2,3\}$ sin ninguna relación estricta, es decir, discreto, e $Y = \{a,b\}$, también discreto, entonces $XY = \{1,2,3,a,b\}$, con $\{1 < a, 1 < b, 2 < a, 2 < b, 3 < a, 3 < b\}$. Los diagramas de estos posets son los siguientes.



Definición 2.2.9. Cuando el espacio Y es un único punto, el join XY se llama *cono* de X. Cuando el espacio Y es un conjunto discreto de dos puntos, como en el ejemplo anterior, el join XY se llama *suspensión* de X.

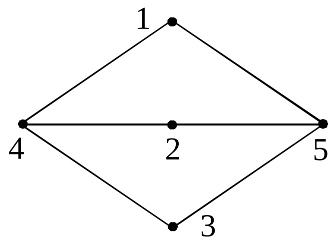
2.3. Conexión entre espacios finitos y complejos simpliciales

En esta sección veremos la fuerte relación que hay entre espacios finitos y complejos simpliciales. Esta relación es la que permite utilizar herramientas combinatorias propias de los posets para estudiar la topología y geometría de los poliedros y nos provee un punto de vista alternativo para atacar problemas de la topología y del álgebra. Los primeros de estos resultados fueron probados por McCord en la década del 60 [Mc], al final de la sección mostraremos resultados recientes de Barmak y Minian [BM2] que relacionan los colapsos simpliciales con reducciones combinatorias en los posets.

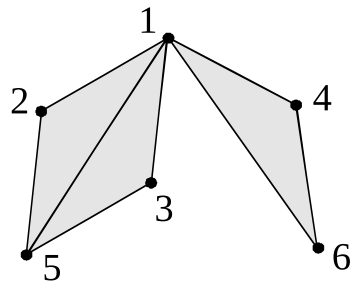
Definición 2.3.1. Dado un espacio finito (poset) X, definimos su complejo simplicial asociado, al cual notaremos $\mathcal{K}(X)$, como el que tiene por vértices a los elementos de X y por símplices a sus cadenas (subconjuntos totalmente ordenados no vacíos de X).

$$\mathcal{K}(X) = \big\{\{x_0, \dots, x_n\} \subseteq X \ , \ x_0 < x_1 < \cdots < x_n\big\}.$$

Ejemplos. Mostramos dos posets y los correspondientes complejos simpliciales $\mathcal{K}(X), K(Y)$.



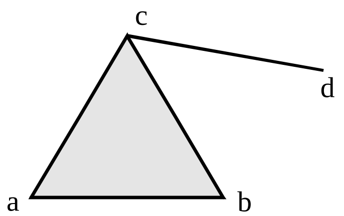
$\mathcal{K}(X)$



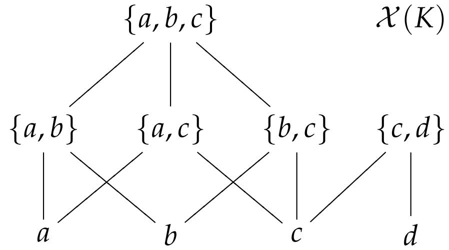
$\mathcal{K}(Y)$

Recíprocamente, dado un complejo simplicial K, definimos su poset asociado como el que tiene por elementos a los símplices de K, con el orden dado por la inclusión. A este poset lo notaremos $\mathcal{X}(K)$.

Ejemplo. Mostramos un complejo K y el diagrama de Hasse de $\mathcal{X}(K)$.



K



$\mathcal{X}(K)$

Estas dos aplicaciones no son mutuamente inversas, pero tienen una fuerte relación entre sí. El siguiente ejercicio muestra que $\mathcal{K}(\mathcal{X}(L))$ coincide con la subdivisión baricéntrica de L. Esto dice que, aunque $\mathcal{K}(\mathcal{X}(L))$ no es exactamente L, lo es topológicamente.

Ejercicio 2.3.2. Probar que, dado un complejo simplicial L, $\mathcal{K}(\mathcal{X}(L))$ es la subdivisión baricéntrica (abstracta) de L, es decir, $\mathcal{K}(\mathcal{X}(L)) = L'$.

Observación 2.3.3. Si X es un espacio finito, $h(X) = \dim \mathcal{K}(X)$. Si K es un complejo simplicial, $\dim K = h(\mathcal{X}(K))$.

Definición 2.3.4. Dada una función continua entre espacios finitos $f : X \to Y$, se define su morfismo simplicial asociado, $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ como el que coincide con f en los vértices. $\mathcal{K}(f)$ es efectivamente un morfismo simplicial pues, como f preserva el orden, también debe preservar cadenas (y por lo tanto preserva símplices).
Análogamente, dado un morfismo simplicial $f : K \to L$, le asignaremos una función continua, $\mathcal{X}(f) : \mathcal{X}(X) \to \mathcal{X}(Y)$ definida por $\mathcal{X}(f)(\sigma) = f(\sigma)$. Claramente $\mathcal{X}(f)$ preserva el orden y, por lo tanto, es continua.

El siguiente resultado de McCord establece la relación entre espacios finitos y poliedros a partir de las propiedades de las construcciones $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{X}(K)$ definidas arriba. Para entender lo que significa una equivalencia débil, el lector no familiarizado con la topología algebraica puede consultar el Apéndice. Lo que dice este teorema es que para estudiar los invariantes topológicos clásicos de un poliedro K (como por ejemplo su grupo fundamental o los grupos de homología), basta estudiar los invariantes del espacio finito $\mathcal{X}(K)$. En el próximo capítulo usaremos esta relación y los resultados de Barmak y Minian que están al final de este capítulo, para analizar la conjetura de Andrews-Curtis desde un punto de vista combinatorio.

Teorema 2.3.5 (McCord).

i) *Dado un espacio finito X, existe una equivalencia débil $\mu_X : \mathcal{K}(X) \to X$.*

ii) *Sea $f : X \to Y$ es una función continua entre espacios finitos. Entonces f es una equivalencia débil si y sólo si $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ es equivalencia homotópica entre los poliedros asociados.*

iii) *Dado un complejo simplicial K, existe una equivalencia débil $\mu_K : K \to \mathcal{X}(K)$.*

iv) *Un morfismo simplicial $f : K \to L$, f es una equivalencia homotópica si y sólo si $\mathcal{X}(f) : \mathcal{X}(K) \to \mathcal{X}(L)$ es equivalencia débil.*

v) *Dado un espacio finito X, hay una equivalencia débil entre X y $\mathcal{X}\big(\mathcal{K}(X)\big)$.*

Nos ocuparemos ahora de los colapsos y expansiones y los *métodos de reducción de un punto*. Estos métodos permiten reducir un poset a uno más simple preservando ciertas propiedades topológicas del original. El primer método de reducción (*beat points*) fue introducido por R.E. Stong en los 60 [St1]. Recientemente Barmak y Minian introdujeron el método de *weak points* para estudiar homotopía simple de espacios finitos y codificar los colapsos y expansiones simpliciales.

Definición 2.3.6. Sea X un espacio finito, y sea $x \in X$. Diremos que x es un *up beat point* si $\widehat{F}_x$ tiene un mínimo, y que es un *down beat point* si $\widehat{U}_x$ tiene máximo. Si x es un *up beat point* o un *down beat point*, diremos que es un *beat point*. Si un espacio Y se obtiene de quitar a X un *beat point*, diremos que hay un *colapso fuerte elemental* de X a Y, y notaremos $X \searrow\!\!\searrow^{e} Y$. Una sucesión finita de colapsos fuertes elementales dan lugar a un *colapso fuerte*, que se nota $X \searrow\!\!\searrow Y$.

En el diagrama de Hasse, un *beat point* es un punto que tiene una sola arista hacia arriba o una sola hacia abajo.

Ejemplos. En el espacio X, a es un *down beat point* y b es un *up beat point*, y el espacio Y no tiene ningún *beat point*.

Proposición 2.3.7. *Si x es un beat point de X, entonces $i : X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ es un retracto por deformación fuerte.*

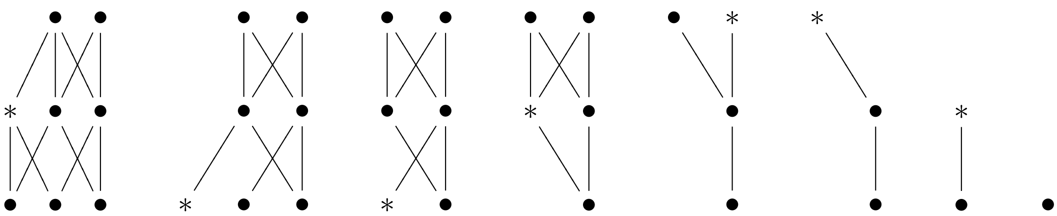
Ejercicio 2.3.8. Probar la proposición para el caso de un up beat point, viendo que si $\widetilde{x}$ es el máximo de $\widehat{U}_x$, la función $r : X \to X \setminus \{x\}$ definida por $r(x) = \widetilde{x}$ y $r|_{X\setminus\{x\}} = id$ resulta continua (preserva el orden), y que satisface $ri = id$, $ir \simeq id$.

El siguiente resultado de Stong es el más importante respecto de los beat points.

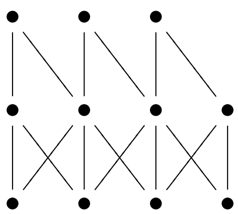
Teorema 2.3.9 (Stong). *Dos espacios finitos X e Y son homotópicamente equivalentes si y sólo si se puede ir de uno a otro quitando y agregando beat points. Más aún, un espacio finito X es contráctil (i.e. homotópicamente equivalente al espacio de un punto) si y sólo si se puede reducir a un punto sacando beat points.*

Los espacios finitos contráctiles se corresponden con los posets *desmantelables*. A diferencia de los espacios topológicos en general, es muy fácil saber si un espacio finito es contráctil o no: simplemente se verifica si se puede ir sacando beat points hasta quedarse con un solo punto. Esto se puede programar fácilmente en una computadora.

Ejemplo. El siguiente espacio finito es contráctil. Esto se puede ver quitando en cada paso el beat point que aparece como un asterisco.



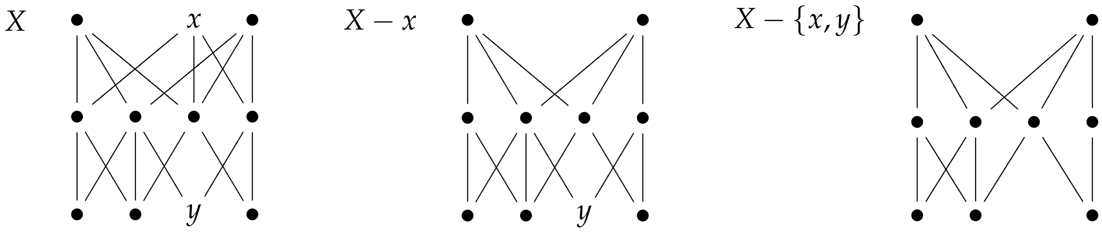
Ejercicio 2.3.10. Probar que el siguiente espacio es contráctil.



Definición 2.3.11. Sea X un espacio finito, y sea $x \in X$. Diremos que x es un *up weak point* si $\widehat{F}_x$ es contráctil, y que es un *down weak point* si $\widehat{U}_x$ es contráctil. Si x es un *up weak point* o un *down weak point*, diremos que es un *weak point*. Si un espacio Y se obtiene de quitarle a X *weak points*, diremos que X *colapsa* a Y y notaremos $X \searrow Y$.

Observación 2.3.12. Los *beat points* son siempre *weak points*, pues los espacios con máximo o mínimo son contráctiles.

Ejemplo. Mostramos un espacio finito X, que no tiene ningún beat point, tiene un down weak point x y un up weak point y. Por ser x un weak point, X colapsa a $X - x$. Como y sigue siendo un weak point en $X - x$, éste colapsa a $X - \{x, y\}$.



Definición 2.3.13. Dos espacios finitos X e Y se dirán *simplemente equivalentes*, y se notará $X \diagup\!\!\!\searrow Y$, si uno se obtiene del otro agregando y quitando weak points. Si en el proceso de obtener un espacio del otro agregando y sacando weak points, los espacios obtenidos tienen siempre altura menor o igual a n, diremos que X se n-deforma en Y y notaremos $X \overset{n}{\diagup\!\!\!\searrow} Y$.

El siguiente resultado se debe a M. C. McCord, y se puede encontrar en [Mc].

Teorema 2.3.14 (Mccord). *Sea $f : X \to Y$ una función continua. Si $\mathcal{U}$ es una base de abiertos de Y, y las restricciones $f : f^{-1}(U) \to U$ son equivalencias homotópicas débiles para todo $U \in \mathcal{U}$, entonces f es una equivalencia homotópica débil.*

Proposición 2.3.15. *Si x es un weak point de X, entonces $X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ es una equivalencia homotópica débil.*

Demostración. Para todo $y \in X$ la restricción $i : i^{-1}(U_y) \to U_y$ es una equivalencia homotópica por ser contráctiles su dominio y su codominio, así que, por el teorema 2.3.14, la inclusión es una equivalencia homotópica débil. $\square$

Corolario 2.3.16. *Si dos espacios son simplemente equivalentes, entonces son débilmente equivalentes. Es decir,*

$$X \diagup\!\!\!\searrow Y \Rightarrow X \simeq_{we} Y.$$

El siguiente resultado puede encontrarse en [BM2] (ver también [B1]).

Teorema 2.3.17 (Barmak-Minian).

1. *Sean X e Y espacios finitos. Entonces X e Y son simplemente equivalentes sii $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{K}(Y)$ son simplemente equivalentes como complejos simpliciales. Es decir,*

$$X \diagup\!\!\!\searrow Y \iff \mathcal{K}(X) \diagup\!\!\!\searrow \mathcal{K}(Y).$$

2. *Sean K y L complejos simpliciales. Entonces K y L son simplemente equivalentes sii $\mathcal{X}(K)$ y $\mathcal{X}(L)$ son simplemente equivalentes como espacios finitos. Es decir,*

$$K \diagup\!\!\!\searrow L \iff \mathcal{X}(K) \diagup\!\!\!\searrow \mathcal{X}(L).$$

Más aún, estas equivalencia respetan las dimensiones, es decir, los complejos simpliciales se n-deforman si y sólo si los espacios finitos se n-deforman.

Este resultado afirma que la homotopía simple de espacios finitos es la traducción al contexto de posets de la homotopía simple de complejos simpliciales. Esto permite atacar problemas de homotopía simple y colapsabilidad de poliedros en términos de posets. Usando estos resultados veremos en el próximo capítulo cómo estudiar un problema abierto de la topología geométrica y de la teoría de grupos utilizando posets.

Capítulo 3

La conjetura de Andrews-Curtis

3.1. Introducción- La conjetura en el contexto de grupos

En el año 65 Andrews y Curtis enunciaron la siguiente conjetura [AC].

Conjetura 3.1.1. *Sea $\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_n \rangle$ una presentación del grupo trivial con igual cantidad de generadores que de relaciones. Entonces hay una sucesión de transformaciones de Nielsen extendidas que la llevan a la presentación trivial $\langle x_1, \dots, x_n \mid x_1, \dots, x_n \rangle$.*

Recordemos que una presentación (finita) de un grupo G consiste en una familia (finita) $x_1, \dots, x_n$ de generadores de G y una familia (finita) de relaciones, es decir elementos r_i en el grupo libre $F(x_1, \dots, x_n)$ generado por los x_j, tal que G es el cociente de $F(x_1, \dots, x_r)$ por el subgrupo normal generado por las relaciones.

El artículo de Andrews y Curtis se publicó con un agregado escrito por el referee (anónimo) del paper, en donde éste acotaba que, si se permite una nueva transformación (y su inversa) además de las transformaciones de Nielsen propuestas por Andrews y Curtis en su formulación original, esta conjetura (más débil, ya que permite un movimiento más) era equivalente a una conjetura sobre n-deformaciones de poliedros. Este problema permanece abierto todavía y es de gran importancia tanto para la teoría de grupos como para la topología (es el mismo problema enunciado en formas diferentes) y es la que suele llamarse *La conjetura de Andrews-Curtis*.

Veremos primero qué dice la conjetura en términos algebraicos y luego cómo se puede enunciar en términos de deformaciones de complejos simpliciales. Finalmente veremos cómo se reinterpreta esto en un problema de posets. El libro [HMS] contiene una exhaustiva exposición sobre la Conjetura de Andrews-Curtis. En [B1] pueden encontrarse más detalles sobre la conjetura y su interpretación en términos de espacios finitos.

Definición 3.1.2. Cuando una presentación $\mathcal{P}$ tiene igual cantidad de generadores que de relaciones, se dice que $\mathcal{P}$ es *balanceada*.

Definición 3.1.3. Sea $\mathcal{P} = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_m \rangle$ una presentación finita de un grupo. Se definen las Q-, Q^*- y Q^{**}- *transformaciones* de la siguente manera.

i) Cambiar una relación r_i por su inverso r_i^{-1}.
ii) Cambiar una relación r_i por un conjugado wr_iw^{-1}, donde $w \in F(x_1, \ldots, x_n)$.
iii) Cambiar una relación r_i por r_ir_j o r_jr_i, $(i \neq j)$.

Q-trans

iv) Cambiar, a lo largo de todas las relaciones, cada aparición de x_i por su inverso x_i^{-1}.
v) Cambiar, a lo largo de todas las relaciones, cada aparición de x_i por x_ix_j o x_jx_i, con $i \neq j$.

Q^*-trans

vi) Agregar un generador x_{n+1} y una relación $r_{m+1} = x_{n+1}$.
vii) La inversa de la transformación vi), si es posible.

Q^{**}-trans

Para aplicar la última transformación debe existir un generador x_i que solamente aparezca en una relación r_j, y que sea $r_j = x_i$. Entonces la transformación consiste en extraer tanto el generador como la relación.
Las operaciones vi) y vii) son las propuestas por el referee del artículo de Andrews-Curtis mencionado.

Observemos que las Q^*-transformaciones no cambian el número de generadores ni el número de relaciones, y que las últimas Q^{**}-transformaciones no cambian la diferencia entre la cantidad de generadores y la cantidad de relaciones. De modo que realizando Q^{**}-transformaciones a una presentación balanceada se obtiene nuevamente una presentación balanceada.

Definición 3.1.4. Cuando se aplica una sucesión de Q^{**}-transformaciones a una presentación $\mathcal{P}$ y se obtiene una nueva presentación $\mathcal{P}'$, se dice que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ son Q^{**}-*equivalentes*, y se denota $\mathcal{P} \nearrow^{**} \searrow \mathcal{P}'$.

Ejercicio 3.1.5. Probar que si dos presentaciones son Q^{**}-equivalentes, entonces presentan el mismo grupo.

Con estas definiciones, la conjetura de Andrews-Curtis se formula así.

Conjetura 3.1.6. *Toda una presentación balanceada del grupo trivial es Q^{**}- equivalente a la presentación vacía $\langle \mid \rangle$.*

Aunque la conjetura se ha podido probar para determinados tipos de presentaciones, el resultado general es un problema que sigue abierto.

Ejemplos. Para las siguientes presentaciones balanceadas no se conoce una sucesión de Q^{**}-transformaciones que las lleve a la presentación vacía, aunque sí se puede probar que todas presentan al grupo trivial. Es por eso que se consideran como posibles contraejemplos de la conjetura.

1. $\langle a, b, c \mid c^{-1}bcb^{-2}, a^{-1}cac^{-2}, b^{-1}aba^{-2} \rangle$.
2. $\langle a, b \mid ba^2b^{-1}a^{-3}, ab^2a^{-1}b^{-3} \rangle$.
3. $\langle a, b \mid abab^{-1}a^{-1}b^{-1}, a^4b^{-5} \rangle$.

Dejamos como ejercicio para el lector probar el siguiente resultado:

Proposición 3.1.7. *Las Q^{**}-transformaciones se pueden traducir en las siguientes operaciones.*

- *Cambiar una relación por un elemento equivalente módulo el resto de las relaciones. Es decir, reemplazar r_i por $\tilde{r}_i$, donde $r_i\tilde{r}_i^{-1} \in N(r_1, \dots, \hat{r}_i, \dots, r_m)$ (el subgrupo normal generado por las otras relaciones).*

- *Agregar un generador x_{n+1} y una relación $r_{m+1} = wx_{n+1}$, donde $w \in F(x_1, \dots, x_n)$, o el inverso de este movimiento.*

Usando estas operaciones equivalentes, es más cómodo trabajar con presentaciones.

Ejercicio 3.1.8. Probar que la presentación $\langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}, c^2d, dcdc\rangle$ es Q^{**}-equivalente a la presentación $\langle a, b, c \mid aba^{-1}b^{-1}, c^2\rangle$. ¿Qué grupo presentan?

Ejercicio 3.1.9. Probar que la presentación

$$\langle a, b, c, d, e \mid cbc^{-1}a^{-1}, dbd^{-1}c^{-1}, aca^{-1}d^{-1}, cec^{-1}d^{-1}, a\rangle$$

es Q^{**}-equivalente a la presentación vacía.

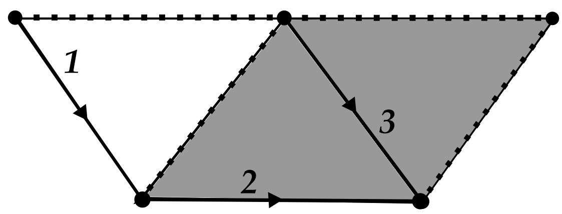
3.2. La conjetura en términos topológicos y de posets

Para formular la versión geométrica de la conjetura, tenemos que construir la correspondencia entre poliedros y presentaciones de grupos.
Dado un complejo simplicial K con un vértice v, se puede dar una presentación $\mathcal{P}(K)$ (o $\mathcal{P}_K$) del grupo fundamental $\pi_1(K, v)$ de la siguiente manera:

- Elegir un árbol maximal T en K (esto es, un subcomplejo de dimensión uno conexo, sin ciclos y que contenga a todos los vértices). Numerar las aristas (1-símplices) de $K \setminus T$, y darles una orientación. En la presentación habrá un generador x_i representando a la arista i-ésima de $K \setminus T$.

- Por cada 2-símplex de K, recorrer el borde del símplex en algún sentido empezando por algún vértice, armando una palabra con las aristas de $K \setminus T$ que se recorren. Si la arista i-ésima se recorre con la orientación elegida previamente, se anota x_i, pero si se recorre en el sentido contrario se anota x_i^{-1}. De esta manera se tiene una relación por cada 2-símplex de K.

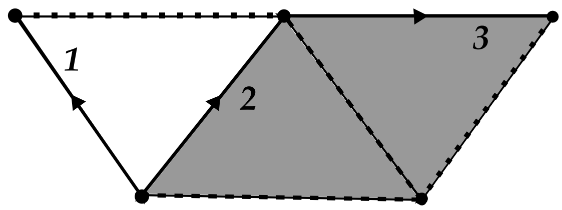
Ejemplo. Consideremos el siguiente complejo simplicial K.



Las líneas punteadas forman un árbol maximal y las flechas indican la orientación elegida para las aristas fuera del árbol. Los bordes de los 2-símplices los recorremos en sentido antihorario.
La presentación inducida por estas elecciones es $\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_2 x_3^{-1}, x_3 \rangle$

Observación 3.2.1. Distintas elecciones en esta construcción darán lugar a distintas presentaciones. Sin embargo, se puede probar que todas inducen presentaciones Q^{**}-equivalentes.

Ejemplo. En este dibujo se hicieron otras elecciones.



La presentación inducida ahora es $\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_2^{-1}, x_3^{-1} \rangle$. Notemos que es fácil ir de una a otra presentación con transformaciones Q^{**}.

Ejercicio 3.2.2. Hacer una nueva elección de árbol y de orientaciones, y mostrar las Q^{**}-transformaciones que relacionan a la presentación obtenida con estas dos. ¿Qué grupo conocido presentan?

Análogamente, dada una presentación $\mathcal{P}$ de un grupo con finitos generadores y finitas relaciones, se puede construir un 2-complejo simplicial finito $K(\mathcal{P})$ (ó $K_{\mathcal{P}}$) que tenga a ese grupo como grupo fundamental, y de tal manera que $\mathcal{P}(K(\mathcal{P}))$ sea Q^{**}-equivalente a $\mathcal{P}$.
El siguiente resultado se puede demostrar utilizando herramientas de topología algebraica.

Proposición 3.2.3. *Dos presentaciones son Q^{**}-equivalentes si y sólo si sus complejos simpliciales asociados son 3-equivalentes. Es decir,*

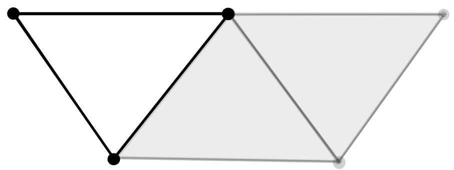
$$\mathcal{P} \nearrow^{**}\!\searrow \mathcal{P}' \iff K_{\mathcal{P}} \diagup\!\!\overset{3}{\searrow} K_{\mathcal{P}'}.$$

Análogamente, dos complejos simpliciales de dimensión 2 son 3-simplemente equivalentes si y sólo si sus presentaciones asociadas son Q^{**}-equivalentes. Es decir,

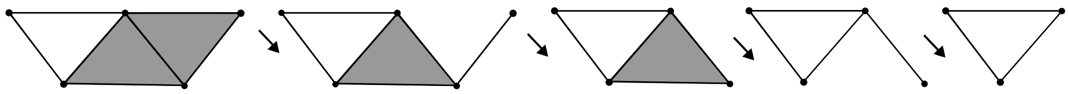
$$K \diagup\!\!\overset{3}{\searrow} K' \iff \mathcal{P}_K \nearrow^{**}\!\searrow \mathcal{P}_{K'}.$$

De modo que la relación de equivalencia Q^{**} en las presentaciones se corresponde con la relación de 3-equivalencia en los complejos simpliciales.

Ejemplo. Las presentaciones obtenidas en los últimos ejemplos son Q^{**}-equivalentes a la presentación $\langle x_1 \mid \ \rangle$ de $\mathbb{Z}$. Esta presentación es la obtenida al considerar el subcomplejo L de K que aparece resaltado a continuación. En este caso, cualquier árbol maximal de L y cualquier orientación de la arista restante dan lugar a la misma presentación.



Por otro lado, vemos que K es simplemente equivalente a L, vía una sucesión de colapsos.



Definición 3.2.4. La *característica de Euler* de un complejo simplicial K se define como $\chi(K) := \sum_{i\geq 0}(-1)^i \sharp\{i\text{-símplices}\}$.
En el caso de los complejos de dimensión 2, se tiene

$$\chi(K) = \sharp\{\text{vértices de } K\} - \sharp\{\text{aristas de } K\} + \sharp\{\text{2-símplices de } K\}.$$

Proposición 3.2.5. *Dada una presentación $\mathcal{P}$, y dado $K_{\mathcal{P}}$ su complejo simplicial asociado, se tiene la siguiente fórmula*

$$\chi(K_{\mathcal{P}}) = 1 - \sharp \text{ generadores de } \mathcal{P} + \sharp \text{ relaciones de } \mathcal{P}.$$

De modo que una presentación es balanceada si y sólo si el complejo simplicial asociado tiene característica de Euler igual a 1.
Análogamente, dado un 2*-complejo simplicial K y dada $\mathcal{P}_K$ su presentación asociada, se tiene la misma fórmula*

$$\sharp \text{ generadores de } \mathcal{P}_K - \sharp \text{ relaciones de } \mathcal{P}_K = 1 - \chi(K).$$

Proposición 3.2.6. *Un* 2*-complejo simplicial K conexo es contráctil si y sólo si $\pi_1(K) = 1$ (el grupo trivial) y $\chi(K) = 1$.*

Este resultado es consecuencia de dos teoremas importantes de la topología algebraica, el teorema de Whitehead y el teorema de Hurewicz.

Por todo esto, la conjetura de Andrews-Curtis se traduce de la siguiente manera al contexto geométrico.

Conjetura 3.2.7. *Todo complejo simplicial de dimensión* 2 *contráctil se* 3*-deforma a un punto.*

Por el teorema 2.3.5, junto con el teorema de Whitehead, un complejo simplicial es contráctil si y sólo si el espacio finito asociado es homotópicamente trivial. Además, por el teorema 2.3.17 sabemos que las 3-deformaciones de complejos simpliciales se traducen a 3-deformaciones en los espacios finitos asociados. De modo que la conjetura de Andrews-Curtis tiene la siguiente traducción al contexto de los espacios finitos.

Conjetura 3.2.8. *Todo espacio finito de altura* 2 *homotópicamente trivial se* 3*-deforma a un punto.*

Recordemos que las 3-deformaciones en términos de espacios finitos (o posets) se describen agregando o sacando weak points.
Para atacar esta conjetura sobre posets (que es equivalente a la conjetura original en términos algebraicos y a la conjetura en términos de 3-deformaciones de complejos simpliciales), se pueden desarrollar métodos combinatorios (propios de la naturaleza de los posets).
En [B1] Barmak prueba, utilizando espacios finitos, que una clase muy amplia de poliedros, llamados *quasi-construibles*, cumple la conjetura.

Capítulo 4

Apéndice

Este capítulo es una guía muy breve de conceptos y resultados básicos de topología y topología algebraica, para aquellos lectores que no estén familiarizados con estos temas. El libro [Mu2] contiene un buen curso introductorio de topología y los libros [Ha, Mu], cursos introductorios de topología algebraica.

4.1. Topología general

Una *topología* en un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X, llamados *abiertos*, que satisface las siguientes condiciones.

i) El conjunto vacío $\emptyset \subseteq X$ es abierto, y X es abierto.

ii) La unión de una colección arbitraria de abiertos de X es abierto.

iii) La intersección de una colección finita de abiertos de X es abierto.

Un conjunto dotado de una topología se llama *espacio topológico*.

Ejemplos.

- Todo espacio métrico es un espacio topológico.
- El conjunto con un único punto, tiene una única topología: los abiertos son el vacío y el punto. Este espacio se llama *singleton* y se nota $*$
- El conjunto con dos puntos $X = \{0, 1\}$ y la topología $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$.
- Dado un conjunto X, se le puede dar la *topología discreta*, $\tau = \mathcal{P}(X)$, para la que todo subconjunto de X es abierto.
- Dado un conjunto X, se le puede dar la *topología indiscreta*, $\tau = \{\emptyset, X\}$, en la que los únicos abiertos son el vacío y el espacio total.

Dado un espacio topológico X, se dice que $C \subseteq X$ es *cerrado* si $X \setminus C$ es abierto.

Dado un conjunto X, una *base* para una topología en X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos, llamados *abiertos básicos*, de X tales que:

i) La unión de todos los abiertos básicos es todo X.

ii) Dados $B, B' \in \mathcal{B}$, si $x \in B \cap B'$ entonces existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C \in B \cap B'$.

Dada una base para una topología, se define la *topología generada* por $\mathcal{B}$ como $\tau_{\mathcal{B}} = \{U : U \text{ es una unión de abiertos básicos}\}$.

Ejemplos.

- El conjunto de intervalos abiertos $\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ es una base en $\mathbb{R}$, y generan la topología usual.
- En el espacio de tres puntos $X = \{0,1,2\}$, $\mathcal{B} = \{\{0\},\{1,2\}\}$ es una base que genera la topología $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{1,2\}, X\}$.

Sean X, Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se dice *continua* si para todo abierto $U \in Y$, la preimagen $f^{-1}(U) \subseteq X$ es un abierto de X.

Un *homeomorfismo* es una función biyectiva que es continua y cuya inversa también es continua.

4.2. Topología algebraica

Sean $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas. Una *homotopía* de f a g es una función continua $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$, donde I denota el intervalo $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Una homotopía se puede pensar como una deformación continua que transforma la función f (en el instante de tiempo $t = 0$) en g (en el instante $t = 1$).

Si hay una homotopía entre f y g, se dice que son *homotópicas*, y se nota $f \simeq g$. Ésto define una relación de equivalencia en las funciones de X a Y.

Las funciones continuas $\gamma : I \to X$ se llaman *curvas*, y las que satisfacen $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ (curvas cerradas) se llaman *lazos* (con punto base x_0).
Dos lazos en X con punto base x_0 se dicen *homotópicos como lazos* si existe una homotopía H entre ellos (vistos como funciones), tal que la homotopía deja fijo al punto x_0 en todo instante de tiempo t.

Una función continua $f : X \to Y$ es una *equivalencia homotópica* si existe una función continua $g : Y \to X$ tal que $fg \simeq 1_Y$, $gf \simeq 1_X$, donde $1_X, 1_Y$ denotan las identidades de X e Y.
Dos espacios son *homotópicamente equivalentes* si hay una equivalencia homotópica entre ellos. Esto se nota $X \simeq_{he} Y$. Dos espacios son homotópicamente equivalentes si se puede deformar uno en el otro en forma continua.

Un espacio X se dice *contráctil* si es homotópicamente equivalente al singleton (espacio de un solo punto): $X \simeq_{he} *$.

Ejemplos.

- $\mathbb{R}$ es contráctil.
- $\mathbb{R}^n - 0 \simeq S^n$.

Dos puntos $x, y \in X$ están *conectados* por un camino si hay una curva $\gamma : I \to X$ con $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$. Esto define una relación de equivalencia en X. Las clases de equivalencia se llaman *componentes arcoconexas*. El conjunto de componentes arcoconexas de X se nota $\pi_0(X)$.
Un espacio topológico X se dice *arcoconexo* si tiene una sola componente arcoconexa.

Dado un espacio topológico X y un elemento $x \in X$, se define su *grupo fundamental* como $\pi_1(X, x) = \{\gamma : I \to X : \gamma(0) = \gamma(1) = x\}/\sim$, el conjunto de clases de equivalencia de lazos con punto base x, donde dos lazos se dicen equivalentes si son homotópicos (como lazos). La estructura de grupo se define a partir de la concatenación de lazos.

Un lazo con punto base x es lo mismo que una función de S^1 (la esfera unidimensional) en X que manda un punto base $s \in S^1$ en el punto x. Y dos lazos son homotópicos como lazos si y sólo si son homotópicos como funciones con domino S^1, con una homotopia que deja fijo el punto base durante toda la deformación. De modo que el grupo fundamental se puede pensar como las clases de equivalencia de funciones de S^1 en X que respetan el punto base elegido.

Cuando el espacio X es arcoconexo, los grupos $\pi_1(X, x)$ con distinto punto base, son todos isomorfos, y por lo tanto se habla del grupo $\pi_1(X)$ (sin especificar cuál es el punto base elegido).

Dado un espacio topológico X, se definen los *grupos de homotopía* de orden superior como $\pi_n(X, x) = \{f : (S^n, s) \to (X, x)\}/\sim$, las clases de funciones continuas de S^n (la esfera n-dimensional) en X que respetan el punto base, identificando las funciones homotópicas.
Cuando el espacio X es arcoconexo, también se pueden considerar los grupos $\pi_n(X)$ sin referirse al punto base.

Una función continua $f : X \to Y$ induce morfismos de grupos en todos los grupos de homotopía $f_n : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$, $n \geq 1$.

Una *equivalencia débil* es una función que induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía.
Uno de los teoremas clásicos de la topología algebraica es el Teorema de Whitehead, que afirma lo siguiente.

Teorema 4.2.1. *Si $f : X \to Y$ equivalencia débil entre CW-complejos, entonces es una equivalencia homotópica.*

Un CW-complejo es un espacio topológico con buenas propiedades, que se construye pegando celdas (discos) por medio de funciones continuas, generalizando la noción de poliedro. Todo poliedro es un CW-complejo. El teorema anterior dice, por ejemplo, que para ver si dos poliedros son homotópicamente equivalentes (es decir, si uno se puede deformar continuamente en el otro), basta ver que hay una función continua entre ellos que induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía.
Otro de los teoremas clásicos de la topología algebraica es el Teorema de Hurewicz, que relaciona los grupos de homotopía y los de homología:

Teorema 4.2.2. *Sea X un espacio topológico tal que sus primeros n grupos de homotopía ($n \geq 1$) son triviales $\pi_k(X) = 0 \ \forall\ k \leq n$. Entonces sus primeros n grupos de homología $H_k(X)$ son también triviales (para $k \leq n$), y hay un isomorfismo $\pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X)$.*

Bibliografía

[AK] Akbulut, S.; Kirby, R. *A potential smooth counterexample in dimension 4 to the Poincare conjecture, the Schoenflies conjecture, and the Andrews-Curtis conjecture.* Topology **24** (1985), 375-390.

[AC] Andrews, J.J.; Curtis, M.L. *Free groups and handlebodies.* Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965) 192-195.

[B1] Barmak, J.A. *Algebraic topology of finite topological spaces and applications.* Lecture Notes in Mathematics Vol. 2032 (2011).

[BM1] Barmak, J.A.; Minian, E.G. *Minimal Finite Models.* J. Homotopy Relat. Struct. **2** (2007), no. 1, 127-140.

[BM2] Barmak, J.A.; Minian, E.G. *Simple homotopy types and finite spaces.* Adv. Math. **218** (2008), no. 1, 87-104.

[BM3] Barmak, J.A.; Minian, E.G. *One-point reductions of finite spaces, h-regular CW-complexes and collapsibility.* Algebr. Geom. Topol. **8** (2008), no. 3, 1763-1780.

[BM4] Barmak, J.A; Minian, E.G. *Strong homotopy types, nerves and collapses.* Discrete and Computational Geometry **47** (2012), 301-328..

[BuM] Burns, R.G.; Macedonska, O. *Balanced presentations of the trivial group.* Bulletin London Math. Soc. **25** (1993), 513-526.

[CaM] Capitelli, N.A.; Minian, E.G. *Notas de topología combinatoria*. Notas de un curso dictado en la reunión anual de la UMA 2009. Disponible electrónicamente en `mate.dm.uba.ar/~gminian/notastopcomb.pdf`.

[CM] Cerdeiro, M.A.; Minian, E.G. *A new approach to Whitehead's asphericity question*. J. Homotopy Relat. Struct. (En prensa). Disponible en ArXiv. `http://arxiv.org/abs/1203.5348`.

[Co] Cohen, M.M. *A Course in Simple Homotopy Theory.* Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin (1970).

[Gl] Glaser, L.C. *Geometrical combinatorial topology I*, Van Nostrand (1970).

[GR] Gillman, D.; Rolfsen, D. *The Zeeman conjecture for standard spines is equivalent to the Poincaré conjecture.* Topology **22** (1983), no. 3, 315-323.

[Ha] Hatcher, A. *Algebraic topology*, Cambridge University Press (2002).

[HMS] Hog-Angeloni, C.; Metzler, W.; Sieradski, A.J. *Two-Dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory.* London Mathematical Society Lecture Note Series. **197**

[Ma1] May, J.P. *Finite topological spaces*. Notes for REU (2003). Disponible en `http://www.math.uchicago.edu/~may/MISCMaster.html`

[Ma2] May, J.P. *Finite spaces and simplicial complexes*. Notes for REU (2003). Disponible en `http://www.math.uchicago.edu/~may/MISCMaster.html`

[Ma3] May, J.P. *Finite groups and finite spaces*. Notes for REU (2003). Disponible en `http://www.math.uchicago.edu/~may/MISCMaster.html`

[Mc] McCord, M.C. *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces*. Duke Math. J. 33 (1966) 465–474.

[Mi] Minian, E.G. *Some remarks on Morse theory for posets, homological Morse theory and finite manifolds.* Topology Appl. 159 (2012) 2860-2869.

[Mu] Munkres, J.R. *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley (1984).

[Mu2] Munkres, J.R. *Topology*, Prentice-Hall (1975).

[O] Osaki, T. *Reduction of finite topological spaces.* Interdiscip. Inform. Sci. **5** (1999), no. 2, 149-155.

[St1] Stong, R.E. *Finite topological spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **123** (1966), 325-340.

[St2] Stong, R.E. *Group actions on finite spaces.* Discrete Math. **49** (1984), no. 1, 95-100.

[Z] Zeeman, E.C. *On the dunce hat.* Topology **2** (1964), 341-358.