Análisis Funcional

Un curso avanzado

Gabriel Larotonda

"La música está *entre* las notas". C. Debussy.

Índice general

1. Espacios vectoriales y convergencia **1**

1.1. Espacios vectoriales topológicos 1

1.1.1. Espacio dual, topologías débiles 7

1.2. Espacios localmente convexos 7

1.2.1. De seminormas a abiertos convexos 8

1.2.2. De abiertos convexos a seminormas 9

1.2.3. Espacios de funciones en $\mathbb{R}^n$ 10

1.2.4. Topologías débiles 10

1.2.5. Bases numerables, Metrización 11

1.2.6. Conjuntos acotados 12

1.2.7. Conjuntos convexos y balanceados 13

1.3. Operadores lineales 15

1.3.1. Espacios normados 16

1.4. Espacios con producto interno 16

1.4.1. Bases ortonormales 17

1.5. Ejercicios 17

2. Teoremas de Hahn-Banach y aplicaciones **23**

2.1. Teoremas de extensión 23

2.2. Teoremas de separación 27

2.3. Aplicación: Teorema de Krein-Milman 29

2.4. Aplicación: Teorema de Riesz-Markov 32

2.4.1. Teorema de Riesz-Markov, caso general 34

2.5. Aplicación: Teorema de Runge 35

2.6. Ejercicios 38

3. Espacios normados **43**

3.1. Espacio dual y doble dual 43
3.2. Completación 45
3.3. Espacios de Hilbert 47
3.3.1. Proyecciones 47
3.3.2. Identidad de Bessel y existencia de bases ortonormales 48
3.3.3. Teoremas de representación de Riesz 49
3.4. Teorema de Alaoglu: compacidad débil 51
3.4.1. Espacios separables 51
3.4.2. Caso general 52
3.4.3. Resultados adicionales: compacidad y reflexividad 56
3.5. Ejercicios 57

4. Operadores lineales 59
4.1. Principio de acotación uniforme 59
4.2. Teorema de la función abierta 62
4.2.1. Bases de Schauder 64
4.3. Teorema del Gráfico cerrado 67
4.3.1. Proyecciones 67
4.4. Operador traspuesto 68
4.4.1. El traspuesto en espacios localmente convexos 70
4.5. Transformada de Fourier 70
4.5.1. La transformada como operador de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 74
4.5.2. Extensión de $\mathcal{F}$ a espacios clásicos de funciones 80
4.5.3. Extensión a espacios L^p 82
4.6. Ejercicios 88
4.7. Operadores compactos en espacios de Banach 92
4.7.1. Aproximación por rango finito 93
4.7.2. Alternativa e índice de Fredholm 95
4.7.3. Operadores de Fredholm 97
4.8. Ejercicios 100

5. Teoría espectral en espacios de Banach 103
5.1. Espectro, autovalores, radio espectral 104
5.1.1. Propiedades del espectro 105
5.1.2. Radio espectral 106
5.2. Cálculo funcional holomorfo 110
5.2.1. Integración de curvas en espacios de Fréchet 110

5.2.2. Integrales de linea en $\mathcal{L}(E)$ 112
5.2.3. Radio espectral y fórmula de Riesz 112
5.2.4. Aproximación por polinomios y funciones racionales 114
5.3. Teorema espectral 115
5.3.1. Proyectores espectrales 118
5.3.2. Operadores compactos 119
5.3.3. Operadores Hermitianos 120
5.4. Resultados complementarios: álgebras de Banach 121
5.4.1. Representación como operadores lineales acotados 122
5.5. Ejercicios 122

6. Operadores en espacios de Hilbert **127**
6.1. Cálculo funcional continuo 129
6.1.1. Elementos positivos, orden parcial 131
6.2. Descomposición polar 134
6.2.1. Operadores compactos 135
6.2.2. Valores singulares 136
6.3. Cálculo funcional Boreliano 138
6.3.1. Funciones borelianas de un operador autoadjunto 139
6.3.2. Medida espectral, proyectores espectrales 143
6.3.3. Teorema espectral, operadores de multiplicación 145
6.4. Resultados adicionales, conclusiones 147
6.5. Ejercicios 147

Bibliografía **153**

Índice de símbolos **155**

1. Espacios vectoriales y convergencia

Cuál es tu rol y lugar: es un lugar entre los más grandes matemáticos de nuestro tiempo, es el rol de un verdadero maestro.

Carta de A. Alexandrov a M. Fréchet, 1967.

En este primer capítulo estudiaremos los fundamentos de topología y convergencia en espacios vectoriales donde las operaciones suma de vectores y producto por escalares del cuerpo base resultan continuas. Estas nociones extienden la idea de espacio normado de manera natural, y son de vital importancia en el estudio de espacios de funciones suaves, asi como en las distintas topologías relevantes en los espacios duales y preduales. La noción de espacio métrico fue introducida por Maurice Frechét en sus tesis doctoral de 1902 [5], y su interés se centraba precisamente en los espacios de funciones.

1.1. Espacios vectoriales topológicos

Definición 1.1 (e.v.t). Un espacio vectorial E sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ provisto de una topología donde los puntos son cerrados (T1), el producto por escalares y la suma son continuos, se denomina *espacio vectorial topológico*. Lo denotaremos con la sigla *e.v.t*.

§ Notemos que pedir que los puntos sean cerrados implica que necesariamente toda red convergente tiene un *único* límite.

Definición 1.2 (Base y subbase local). Una *subbase local* de E es una familia $(V_j)_{j\in J}$ de entornos abiertos de $0 \in E$ tales que para todo abierto $U \subset E$ entorno de 0, existen *finitos* $j_k \in J$ $(k = 1, \dots, n)$ de manera tal que $\cap_{k=1}^{n} U_{\alpha_{j_k}} \subset U$.

Una *base local* de E es una familia $(U_i)_{i\in I}$ de entornos abiertos de 0 de manera tal que para todo abierto $U \subset E$ entorno de 0, existen $i \in I$ de manera tal que $U_i \subset U$.

§ Equivalentemente, una base local está formada por las intersecciones finitas de elementos de una subbase local.

Observación 1.3. Como para cada $x \in E$, la traslación $t_x : E \to E$ dada por $t_x(y) = x + y$ es un homeomorfismo (con inversa t_{-x}), todo entorno U de 0 se traslada a un entorno de x dado por $x + U$ y viceversa.

Dado $W \subset E$ y un abierto U entorno de 0, el conjunto

$$W + U = \bigcup_{w \in W} (w + U)$$

es un entorno abierto de W.

Asimismo, si $W \subset E$ es abierto, entonces para cada $w \in W$ el conjunto $W - w$ es un entorno abierto de 0. Y si $(U_i)_{i \in I}$ es base local, entonces para cada $w \in W$ existe $i = i_w$ tal que $U_{i_w} \subset W - w$, luego

$$W = \bigcup_{w \in W} (w + U_{i_w}) .$$

§ Esto prueba que los trasladados de toda base local forman una base de la topología de E.

Definición 1.4 (Base numerable). Si el espacio tiene una base local *numerable* (equivalente, una subbase numerable) diremos que E tiene base numerable.

Definición 1.5 (Redes, subredes). Una *red* $(x_l)_{l \in L}$ en E, es una función $x : L \to E$, donde L es un conjunto dirigido (parcialmente ordenado y dados $l, j \in L$ existe $k \in L$ tal que $k \geq l, j$).

Decimos que la red es *convergente* al punto $x \in E$ (denotado $x_l \xrightarrow{l} x$) si para cada abierto U entorno de x existe $l_0 \in L$ tal que $x_l \in U$ para todo $l \geq l_0$.

Una subred es una función $l : J \to L$ donde J es otro conjunto dirigido y la función l es *monótona* ($j \leqslant j' \Rightarrow l(j) \leqslant l(j')$) y *final* (para cada $l \in L$ existe $j \in J$ tal que $l(j) \geq l$). Generalmente se denota $x_{l(j)} = x_{l_j}$.

§ Notemos que por las observaciones previas,

$$x_l \xrightarrow{l} x \iff x_l - x \xrightarrow{l} 0.$$

Asimismo, observamos que esto es equivalente a que para todo $j \in J$ y todo U_j de la subbase local, se verifique que existe $l_0 \in L$ de manera tal que $x_l - x \in U_j$ si $l \geq l_0 = l_0(j)$.

Definición 1.6 (Redes de Cauchy). Dada una red $(x_l)_{l \in L} \subset E$, diremos que la red *es de Cauchy* si para todo U_i de la base local (equivalentemente, de la subbase) existe $l_0 = l_0(i)$ de manera tal que $x_l - x_j \in U_i$ para todo $l, j \geq l_0$.

§ Notamos que toda red convergente es de Cauchy.

Definición 1.7 (Conjuntos cerrados, clausura). Un conjunto $C \subset E$ es *cerrado* cuando toda red de elementos de C, convergente en E, tiene su límite en C. Un conjunto resulta cerrado si y solo si su complemento es abierto.

La *clausura* $\overline{C}$ es la unión de C con todos los puntos límite por *redes* convergentes, de elementos de C. Equivalentemente, la clausura es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a C:

$$\overline{C} = \bigcap \{A : A \supset C \text{ cerrado}\} = \left\{ x \in E : \exists\, (x_l)_{l \in L} \subset C,\ x_l \xrightarrow{l} x \right\}.$$

Observación 1.8. Si el espacio E tiene base numerable, entonces todo punto x de la clausura de un conjunto $A \subset E$ se alcanza *con una sucesión*. Porque si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local numerable de E, y $x_l \xrightarrow{l} x$, basta tomar para cada $n \in \mathbb{N}$, y de manera creciente, un $l(n) \in L$ tal que $x_{l(n)} - x \in U_n$. Se tiene entonces que $z_n = x_{l(n)}$ es una sucesión, y que $z_n \xrightarrow{n} x$.

§ Como consecuencia, en un espacio E con base numerable, una función $f : E \to Y$ tiene límite $y \in X$ si y solo si para toda sucesión $(x_n)_n \subset E$, $x_n \neq x$, se tiene $\lim_n f(x_n) = y$.

Se puede probar aún más:

Observación 1.9 (Metrizabilidad). Un e.v.t. con base numerable es metrizable. Esto es, existe una métrica en E de manera tal que la distancia es *invariante* (esto es $d(x, y) = d(x - y, 0)$) y de manera tal que para $n \in \mathbb{N}$, las bolas abiertas métricas

$$B_n = \{x \in E : d(x, 0) < {}^1\!/{}_n\}$$

forman una base local numerable de E.

≀ No daremos esta demostración general, nos limitaremos a probar este hecho en la próxima sección, en el caso de espacios localmente convexos (Teorema 1.36). El lector interesado puede ver la prueba general en el libro de Rudin [13, Theorem 1.24].

Lema 1.10 (Subredes convergentes). *Si $(x_l)_{l\in L}$ es una red, entonces*

1. *Tiene una subred convergente a un punto $x \in E$ si y solo si*

$$x \in \bigcap_{l\in L} \overline{\{x_i : i \geq l\}}.$$

2. *Si es de Cauchy, y tiene una subred convergente, entonces es convergente.*

≀ Esta demostración también es algo técnica y la omitimos (ver el libro de Kelley [8, Chapter 2,Theorem 6]). Invitamos al lector a demostrar este lema en el caso de las *sucesiones*.

Definición 1.11 (Continuidad). Una función $f : E \to Y$ donde E, Y son e.v.t. es *continua* cuando la preimagen de todo abierto es abierta. Equivalentemente, si para toda red $(x_l)_{l\in L}$ con $x_l \neq x$ y $x_l \xrightarrow{l} x$, se verifica $f(x_l) \xrightarrow{l} f(x)$.

§ Si el espacio E tiene base numerable, se pueden reemplazaer las redes por sucesiones para caracterizar la continuidad, como consecuencia de la Observación 1.8.

Definición 1.12 (Conjuntos compactos, completos, totalmente acotados, acotados). Diremos que $K \subset E$ es *compacto* si todo cubrimiento por abiertos $K \subset \cup_{j\in J} V_j$ tiene un subcubrimiento finito, es decir existen $j_1, \ldots, j_m$ de manera tal que $K \subset \cup_{i=1}^{m} V_{j_i}$.

El conjunto $C \subset E$ es *completo* si toda sucesión de Cauchy en C converge a un elemento en C.

El conjunto $T \subset E$ es *totalmente acotado* si dado un entorno V abierto de 0, existen finitos puntos $t_i \in T$, $i = 1, \ldots, n$ de manera tal que

$$T \subset \{t_1, \ldots, t_n\} + V = \bigcup_{i=1}^{n} (t_i + V).$$

§ Notar que se puede reemplazar "V abierto" por "V de la base local" o por "V de la subbase local" en la definición de totalmente acotado.

El conjunto $A \subset E$ es *acotado* si para todo entorno V de 0 existe $t > 0$ de manera tal que $A \subset sV$ para todo $s \geq t$.

§ Notar que podemos reemplazar la frase "V entorno de 0" por "V de la base local" o por "V de la subbase local" en la definición de acotado.

Observación 1.13. Los conjuntos acotados se pueden caracterizar usando sucesiones, aun en el caso que E no tenga base numerable. Más precisamente, un conjunto $A \subset E$ es acotado si y solo si para toda sucesión $(a_n)_n \subset A$ y toda sucesión $\lambda_n \to 0$ en $\mathbb{K}$, se verifica $\lambda_n a_n \xrightarrow{n} 0$. Este hecho tiene una prueba elemental y queda como ejercicio.

Observación 1.14 (Compacidad: redes, PIF). Sea $K \subset E$. Son equivalentes:

1. K es compacto.
2. Toda red $(x_l)_{l \in L}$ tiene una subred convergente a un elemento $x \in K$.
3. K tiene la Propiedad de Intersección Finita: toda colección $\mathcal{F}$ de conjuntos cerrados en K, tal que las intersecciones finitas son no vacias, tiene intersección total no vacía.

§ Veremos más adelante que todo e.v.t. es Hausdorff. Por la unicidad del límite, todo conjunto compacto es cerrado.

§ Si el espacio E tiene base numerable, el Teorema 1.9 nos dice que un conjunto es compacto si y solo si toda *sucesión* en K tiene una *subsucesión* convergente en K.

Definición 1.15 (Conjuntos absorbentes y balanceados). Sea $0 \in B \subset E$, diremos que B es *absorbente* si para todo $x \in E$ existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda x \in B$. Diremos que B es *balanceado* si para todo $x \in B$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leqslant 1$, $\lambda x \in B$.

Lema 1.16. *Sea $0 \in U \subset E$ abierto, $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\lambda_n \to +\infty$. Entonces*

1. *$E = \cup_n \lambda_n U$ y U es absorbente.*
2. *Si además U es acotado, entonces $\{\lambda_n^{-1} U : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local de E.*

Demostración. Dado $x \in E$, como el producto por escalares es continuo, la sucesión $x_n = \lambda_n^{-1} x$ converge a $0 \in E$. Luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_N^{-1} x \in U$; equivalentemente $x \in \lambda_N U$.

Si U es acotado, supongamos que W es un entorno de abierto de 0. Existe $t > 0$ tal que $U \subset sW$ para todo $s \geq t$. Tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_N > t$ y entonces $U \subset \lambda_N W$; equivalentemente $\lambda_N^{-1} U \subset W$. □

Corolario 1.17. *Si E tiene un abierto acotado, entonces es metrizable.*

Demostración. Combinando el segundo item del lema previo y el Teorema 1.9. □

§ Es fácil ver que todo subconjunto de un conjunto totalmente acotado es a su vez totalmente acotado. Luego, si un conjunto tiene clausura compacta, resulta totalmente acotado. Utilizaremos este hecho sin más aclaraciones en adelante (ver por ejemplo, Lema 1.39).

Definición 1.18 (Conjuntos convexos). Si $C \subset E$ diremos que C es *convexo* si dados $x, y \in C$, entonces $tx + (1-t)y \in C$ para todo $t \in [0,1]$. Si C es cerrado esto es equivalente a requerir $\frac{x+y}{2} \in C$ para todo $x, y \in C$.

§ Notemos que la intersección $\cap_i C_i$ arbitraria de conjuntos convexos es convexa, que la suma de convexos $C_1 + C_2$ es convexa, y que si C es convexo y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces λC es convexo.

Lema 1.19. *Si $U \subset E$ es un entorno abierto de 0, existe V de entorno de 0 simétrico ($V = -V$) tal que $V^n = V + \cdots + V \subset U$.*

Demostración. Basta hacer la prueba para $n = 2$. Por la continuidad de la suma $s : E \times E \to E$, $(x, y) \mapsto x + y$, la preimagen de U es abierta y entonces contiene un entorno abierto de 0×0 de la forma $V_1 \times V_2$; esto es $V_1 + V_2 \subset U$. Tomando $V = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$ es fácil ver que U es un entorno abierto y simétrico de 0. Claramente $V + V \subset V_1 + V_2 \subset U$. □

Proposición 1.20 (Separación de conjuntos). *Si $K, C \subset E$ con $K \cap C = \emptyset$, K es compacto y C es cerrado, entonces existe $V \subset E$ de la base local tal que $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$.*

Demostración. Si $K = \emptyset$, entonces $K + V = \emptyset$ para cualquier entorno abierto de 0. Si no es así, para cada punto $x \in K$ existe un abierto de la base local U_x tal que $x + U_x \subset C^c$ (pues C es cerrado). Tomamos V_x entorno abierto simétrico de 0 de manera que $V_x + V_x + V_x \subset U_x$. Entonces $K \subset \cup_{x \in K}(x + U_x)$ pero además afirmamos que

$$(x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \emptyset. \tag{1.1}$$

En caso contrario sea $y = x + v_1 + v_2 = c + v_3$ con $v_i \in V_x$. Despejando obtenemos $x + v_1 + v_2 + (-v_3) = c$. Esto es, $c \in x + V_x + V_x + V_x \subset x + U_x \subset C^c$ y esto es absurdo. Extraemos un subcubrimiento finito de K,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i}),$$

y definimos $V = \cap_{i=1}^n V_{x_i}$. Entonces

$$K + V \subset \bigcup_{i=1}^{n}(x_i + V_{x_i}) + V \subset \bigcup_{i=1}^{n}(x_i + V_{x_i} + V_{x_i}).$$

Este último término no interseca $C+V$, pues de hacerlo tendríamos $y = x_i+v_1+v_2 = c+v_3$ para algún i, con $v_1, v_2, v_3 \in V_{x_i}$, y esto contradice (1.1). $\square$

Como los conjuntos $K = \{x\}$ son compactos para cada $x \in E$, tenemos que

Corolario 1.21. *Si E es un e.v.t. entonces E es $T2$ (Hausdorff), es decir dados $x \neq y \in E$ existen abiertos disjuntos $U, V \subset E$ de manera tal que $x \in U$, $y \in V$.*

Observación 1.22. Como $K + V, C + V$ son abiertos, podemos separar también

$$\overline{(K + V)} \cap (C + V) = \emptyset, \quad (K + V) \cap \overline{(C + V)} = \emptyset.$$

§ Dado U entorno abierto de 0 existe siempre entonces V entorno abierto de 0 tal que $\overline{V} \subset U$ (puesto que $C = U^c$ es cerrado y no interseca $K = \{0\}$).

Observación 1.23 (Completo implica cerrado). Notemos que todo conjunto $C \subset E$ completo es cerrado pues E es Hausdorff: si $x_l \xrightarrow{l} x$ con $x_l \in C$, entonces $(x_l)_{l\in L}$ es de Cauchy en C y por ende convergente a un $x' \in C$. Por la unicidad del límite se deduce que $x = x' \in C$.

Lema 1.24 (Cerrados). *Si $C \subset X \subset E$ es cerrado y X es compacto (resp. completo) entonces C es compacto (resp. completo).*

Demostración. Si $(x_l)_l$ es una red (resp. red de Cauchy) en C, entonces también lo es en X por ende tiene una subred convergente (resp. es convergente), a un punto $x \in X$. Pero como C es cerrado en X, el limite está en C, y esto prueba que C es compacto (resp. completo). $\square$

Teorema 1.25. *Un conjunto $K \subset E$ es compacto si y solo si es completo y totalmente acotado.*

Demostración. Demostraremos solamente una implicación: supongamos que K es compacto. Dado V de la base local, y $K \subset E$ compacto, consideramos $K \subset \cup_{k\in K} k + V = K + V$. Este es un cubrimiento abierto de K, extraemos un subcubrimiento finito, se tiene que K es totalmente acotado. Sea $(x_l)_{l\in L}$ una red de Cauchy en K, tiene entonces una subred convergente; por el Lema 1.10 es convergente a un punto $x \in E$. Como K es cerrado, el límite está en K, luego la red era convergente y K resulta completo. $\square$

≀ La demostración de la otra implicación, en el caso de espacios métricos, queda a cargo del lector. El caso general requiere de la noción de *filtro* que no utilizaremos en estas notas.

1.1.1. Espacio dual, topologías débiles

Dado E e.v.t., definimos E' como el conjunto de todas las funcionales lineales continuas $\varphi : E \to \mathbb{K}$. Este espacio se conoce como *dual continuo* o simplemento *dual* de E.

Definición 1.26 (Convergencia débil). Decimos que $(x_l)_{l\in L} \subset E$ *converge débilmente* a $x \in E$ si para cada $\varphi \in E'$, $\varphi(x_l) \xrightarrow{l} \varphi(x)$. Lo denotaremos $x_l \xrightarrow{\omega} x$.

Decimos que $(\varphi_l)_{l\in L} \subset E'$ *converge débil** a $\varphi \in E'$ si para cada $x \in E$, $\varphi_l(x) \xrightarrow{l} \varphi(x)$. Lo denotaremos $\varphi_l \xrightarrow{\omega^*} \varphi$.

§ Si $x_l \xrightarrow{l} x$ en E, entonces dada $\varphi \in E'$ y $\varepsilon > 0$, tomamos $U = \varphi^{-1}(B_\delta)$, donde $B_\delta = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < \delta\}$. Entonces $U \subset E$ es un entorno abierto de 0, y existe $l_0 \in L$ tal que $x_l - x \in U$ para todo $l \geq l_0$. Pero esto dice que $|\varphi(x_l - x)| < \varepsilon$ si $l \geq l_0$, y en consecuencia

$$\varphi(x_l) - \varphi(x) = \varphi(x_l - x) \xrightarrow{l} 0.$$

Resumiendo, *la convergencia en E implica la convergencia débil.*

1.2. Espacios localmente convexos

Definición 1.27 (e.l.c.). Diremos que el espacio e.v.t. E es *localmente convexo* si E tiene una base local de abiertos convexos. Como toda intersección finita de abiertos convexos que contiene al 0 es un abierto convexo que contiene al cero, se puede definir equivalentemente un e.l.c. como un e.v.t. tal que exista alguna subbase local de abiertos convexos.

Con la misma demostración que la Proposición 1.20, notando que la intersección y la suma de convexos es convexa, tenemos que

Proposición 1.28. *Sean $K, C \subset E$ e.l.c. Si $K \cap C = \emptyset$, K es compacto y C es cerrado, entonces existe $V \subset E$* convexo *de la base local tal que $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$.*

Definición 1.29 (Funcional de Minkowski). Sea $0 \in B \subset E$ convexo absorbente, con E espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Definimos

$$p_B(x) = \inf \{\mu \in \mathbb{R}, \mu > 0 : x \in \mu B\},$$

la *funcional de Minkowski* de B. Esta funciona como una seminorma que tiene a B como bola unitaria; dejamos algunas propiedades interesantes como ejercicio para el lector (Ejercicio 1 y subsiguientes).

1.2.1. De seminormas a abiertos convexos

Supongamos que existe en E una familia de seminormas (que denotaremos indistintamente $\|\cdot\|_\alpha = p_\alpha(\cdot)$, con $\alpha \in \Lambda$, dependiendo de la conveniencia) de manera tal que convergencia en E está dada por la convergencia en todas las $\|\cdot\|_\alpha$. Esto es

$$x_l \xrightarrow{l} x \iff \|x_l - x\|_\alpha \xrightarrow{l} 0$$

para cada $\alpha \in \Lambda$.

Supongamos también que para todo $x \in E$ no nulo existe α tal que $\|x\|_\alpha \neq 0$ (diremos en este caso que la familia *separa puntos*).

§ Esto último dice que el espacio E es $T1$ puesto que si $x \neq y$ existe α tal que $\|x-y\|_\alpha \neq 0$. Pero entonces si $(x_l)_l \subset E$ es una red constante con valor $x_l = x$ para todo $l \in L$, la red sólo puede converger a x, y como consecuencia los puntos de E son conjuntos cerrados.

Por otro lado, dados $x, y \in E$, $a, b \in \mathbb{K}$,

$$\|ax + by\|_\alpha \leqslant |a|\,\|x\|_\alpha + |b|\,\|y\|_\alpha$$

y esto dice que E es un espacio vectorial topológico pues la suma y el producto por escalares son funciones continuas.

Definición 1.30 (Abiertos dados por seminormas). Definimos

$$U_\alpha = \{x \in E : \|x\|_\alpha < 1\},$$

y de la definición de convergencia deducimos que su complemento es cerrado. Por ende U_α es un conjunto abierto, entorno de 0. Tomamos para cada $\delta > 0$ y cada $\alpha \in \Lambda$ el conjunto

$$\delta U_\alpha = \{x \in E : \|x\|_\alpha < \delta\}.$$

Entonces estos conjuntos δU_α forman una subbase local de E, y además dado que un conjunto de la base local se expresa entonces como

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} \delta_i U_{\alpha_i}$$

tomando $\delta = \min_{i=1,\dots,n} \delta_i$ tenemos que

$$\delta \bigcap_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \delta U_{\alpha_i} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \delta_i U_{\alpha_i} = U.$$

§ Esta observación nos dice que los conjuntos

$$\delta \bigcap_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}, \quad \alpha_i \in \Lambda, \delta > 0$$

son *base local* de E.

En cualquier caso notemos que los conjuntos δU_α *son convexos* pues

$$\|tx + (1-t)y\|_\alpha \leqslant t\|x\|_\alpha + (1-t)\|y\|_\alpha < t\delta + (1-t)\delta = \delta$$

si $x, y \in \delta U_\alpha$ y $t \in [0,1]$.

Luego si la convergencia está dada por una familia de seminormas, el espacio E tienen una base local de abiertos convexos, y E es un e.l.c.

Definición 1.31 (Familias dirigidas). Una familia de seminormas está *dirigida* si dadas $\alpha, \beta \in \Lambda$ existe $\gamma \in \Lambda$ tal que $p_\alpha + p_\beta \leqslant C p_\gamma$ para alguna constante $C > 0$.

Observación 1.32. Toda familia de seminormas se puede reemplazar por una familia *dirigida* de seminormas, tomando para cada subconjunto finito $F \subset \Lambda$, la seminorma de la suma $q_F = \sum_{\alpha \in F} p_\alpha$. El nuevo conjunto de índices es el conjunto I de subconjuntos finitos de Λ.

En una familia dirigida, los abiertos de cada seminorma dan los abiertos *básicos* de la topología, es decir, no hace falta tomar intersecciones finitas, ya que dado un abierto básico original de la forma $\delta \cap_{i=1}^n U_{\alpha_i}$, si $F = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$, entonces

$$\delta V_F = \{x \in E : q_F(x) < \delta\} \subset \delta \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i}.$$

Equivalentemente, para armar una familia dirigida, se pueden reemplazar las sumas finitas de seminormas por el máximo de un conjunto finito de seminormas.

§ Notemos que el procedimiento de formar una familia dirigida de seminormas se corresponde a agregarle a la base local de convexos, las intersecciones finitas de todos los elementos de la base. Salvo en algunos casos, no suele ser muy práctica esta construcción, ya que ahora la convergencia y la topología están formados por familias muy grandes de abiertos, que resultan más difíciles de caracterizar. Una excepción a esta consideración se da en el Ejercicio 23, Sección 1.5.

1.2.2. De abiertos convexos a seminormas

Recíprocamente, podemos construir para un espacio E e.l.c. dado, y una base local de abiertos convexos, una familia de seminormas que defina la convergencia, de manera tal que al recuperar la base con el procedimiento recién indicado, obtenemos nuevamente la base local de convexos con la que comenzamos.

Supongamos entonces que $(U_i)_i$ es una base local de E, tomando un entorno abierto convexo $V_i \subset U_i$, obtenemos una base local convexa, pero a su vez todo abierto convexo tiene dentro un abierto convexo *balanceado* (ver Lema 1.41).

Entonces todo espacio E localmente convexo tiene una base local $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de abiertos convexos balanceados. Si p_α denota la funcional de Minkowski de U_α, entonces la convergencia en E es equivalente a la convergencia en las seminormas, esto es

$$x_l \xrightarrow{l} 0 \iff p(x_l)_\alpha \xrightarrow{l} 0 \text{ para cada } \alpha \in \Lambda.$$

Como mencionamos en el final de la sección anterior, podemos agregarle a la base local de convexos todas las intersecciones finitas de los mismos, para obtener así una familia dirigida de seminormas.

1.2.3. Espacios de funciones en $\mathbb{R}^n$

Muchos espacios de funciones están modelados por familias de seminormas. Como muchas veces las seminormas están definidas sobre conjuntos compactos (para poder tomar supremos), es bueno tener presente el siguiente resultado:

Lema 1.33 (Uniones exhaustivas de compactos). *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces existe una sucesión de compactos $K_n \subset \Omega$ tales que*

1. *$K_n \subset int(K_{n+1})$ para todo n,*
2. *Si $C \subset \Omega$ es compacto entonces $C \subset K_n$ para algún n,*

Demostración. Para cada n, consideramos el abierto en $\mathbb{R}^n$

$$V_n = \{x : \|x\| > n\|\} \cup \bigcup_{x \notin \Omega} B_{1/n}(x),$$

y el conjunto $K_n = \mathbb{R}^n - V_n$. Como retiramos todos los puntos que no están en Ω, $K_n \subset \Omega$. Claramente K_n es cerrado y acotado, así que es compacto. El resto de las verificaciones queda a cargo del lector. □

1.2.4. Topologías débiles

Los dos ejemplos más importantes de espacios localmente convexos son E con la topología débil, y E' con la topología débil*, donde E es cualquier e.v.t:

Definición 1.34 (Topologías débil y débil*). Para cada $\varphi \in E'$, sea $p_\varphi : E \to \mathbb{R}$ la seminorma dada por $p_\varphi(x) = |\varphi(x)|$. Entonces el espacio E con la familia de seminormas $(p_\varphi)_{\varphi \in E'}$ es exactamente E con la topología débil, y lo denotaremos E_ω.

De manera similar, para cada $x \in E$, podemos definir $p_x : E' \to \mathbb{R}$ la seminorma dada por $p_x(\varphi) = |\varphi(x)|$. El espacio E' con esta familia de seminormas $(p_x)_{x\in E}$ es exactamente E' con la topología débil*.

Definición 1.35 (Topología fuerte). Si E es un e.v.t., la topología *fuerte* en E' es la dada por la familia de seminormas

$$p_A(\varphi) = \sup\{|\varphi(x)| : x \in A\}$$

donde A recorre la familia de todos los conjuntos acotados de E; se suele denotar (E', β) o E'_β. Como los puntos $A = \{x\}$ son conjuntos acotados, la convergencia fuerte implica la convergencia débil* y además la familia separa puntos. Luego E'_β es un espacio localmente convexo.

No ahondaremos en el caso general de esta convergencia en E', nos concentraremos en el caso en el que E es normado, y entonces E' con esta convergencia es normado (ver la Sección 3.1).

1.2.5. Bases numerables, Metrización

Recordemos que en un e.v.t. con base numerable la convergencia está caracterizada por las sucesiones (Observación 1.8). Si E tiene base local numerable $(U_n)_n$ y es localmente convexo, tomando dentro de cada U_n un abierto convexo V_n que contenga al cero, podemos suponer que la base numerable está formada por conjuntos convexos balanceados (como en la Sección 1.2.2).

De ser necesario, y procediendo inductivamente, podemos definir la familia dirigida de seminormas $\|\cdot\|_n = \sum_{j=1}^n p_j(\cdot)$, y la familia $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la original $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pero con la virtud adicional de que

$$\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2 \leq \cdots \leqslant \|\cdot\|_n \leqslant \|\cdot\|_{n+1}$$

y en consecuencia los nuevos abiertos convexos balanceados V_n de la subbase verifican

$$V_{n+1} \subset V_n \subset \cdots \subset V_2 \subset V_1,$$

es decir están encajados, luego ya no son sólo subbase sino que $(V_n)_n$ resulta una base local de E.

En cualquier caso, daremos a continuación una fórmula explícita para metrizar E cuando tiene base numerable.

Teorema 1.36 (Metrizabilidad). *Si E es un e.l.c. con base numerable, y $\|\cdot\|_n$ es una familia numerable de seminormas que define la convergencia, entonces dados $x, y \in E$*

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n}$$

es una métrica invariante en E (es decir $d(x,y) = d(x-y,0)$), y la topología inducida por d es la misma que la original de E con las seminormas. Además:

1. *Una sucesión es de Cauchy en E si y solo si es de Cauchy en (E,d).*
2. *Las bolas abiertas métricas $B_n = \{x \in E : d(x,0) < 1/n\}$ son base local de E.*

Demostración. Que d es una métrica es una verificación sencilla, el paso clave para probar la desigualdad triangular es observar que la función $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ es subaditiva para $t \geq 0$.

Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ de Cauchy en (E,d). Veamos que la sucesión es de Cauchy en E, para ello fijamos $N \in \mathbb{N}$ y dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2^N(1+\varepsilon)}$. Existe entonces $k_0 = k_0(\delta)$ tal que si $k, j \geq k_0$ entonces $d(x_k, x_j) < \delta$. A partir de la definición de d es inmediato obtener que $\|x_k - x_j\|_N < \varepsilon$, y en consecuencia $(x_k)_k$ es de Cauchy en E. Recíprocamente, si comenzamos con una sucesión de Cauchy en E, y dado $\varepsilon > 0$, tomamos N_0 tal que

$$\sum_{n>N_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n} \leqslant \sum_{n>N_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon/2.$$

Ahora para cada $n \leqslant N_0$, tomamos $k_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_k - x_j\|_n < \frac{\varepsilon}{2N_0} \quad \forall k, j \geq k_n.$$

Si $k_0 = \max_{n=1\dots N_0} k_n$, entonces

$$\begin{aligned} d(x_k, x_j) &= \sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{2^n} \frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n} + \sum_{n>N_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n} < \sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{2^n} \frac{\varepsilon}{2N_0} + \varepsilon/2 \\ &\leqslant N_0 \frac{\varepsilon}{2N_0} + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned} \tag{1.2}$$

siempre que $k, j \geq k_0$. Esto prueba que la sucesión es de Cauchy en (E, d).

Por lo recién demostrado, la convergencia en E es equivalente a la convergencia en (E, d), en particular tienen los mismos cerrados y en consecuencia las bolas métricas son conjuntos abiertos. Si U es un abierto de E que contiene al 0, entonces su complemento es cerrado. Luego $d = d(0, U^c) > 0$; tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < d$, se tiene $B_n \subset U$ y esto prueba que las bolas métricas B_n son una base local de E. □

§ En particular la convergencia en un espacio con base numerable está caracterizada por sucesiones, y la convergencia original es equivalente a la convergencia en d.

§ Atención que las bolas métricas así definidas *no tienen por qué ser acotadas ni convexas*. El uso práctico de la distancia introducida es entonces anecdótico y se limita mayormente a la observación previa y a las propiedades generales que poseen los espacios métricos.

Definición 1.37 (Espacios de Fréchet). Si E es un espacio vectorial localmente convexo con base numerable y completo, decimos que E es un *espacio de Fréchet*.

1.2.6. Conjuntos acotados

Proposición 1.38. *Sea E e.l.c. entonces $A \subset E$ es acotado si y solo si para todo $\alpha \in \Lambda$ existe $c_\alpha > 0$ tal que $\|x\|_\alpha < c_\alpha$ para todo $x \in A$.*

Demostración. Si A es acotado entonces para cada $U_\alpha = \{x \in E : \|x\|_\alpha < 1\}$ existe $c_\alpha > 0$ tal que $A \subset c_\alpha U_\alpha$, o equivalentemente, $\|x\|_\alpha < c_\alpha$ para todo $x \in A$.

Recíprocamente, si vale esta condición y U es un entorno abierto de cero, existen finitos α_i $(i = 1 \dots n)$ y $\delta > 0$ tales que

$$\delta \bigcap_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \subset U.$$

Sea $t = \delta^{-1} \text{máx}_{i=1..n} c_{\alpha_i} > 0$, y dado $x \in A$, $s \geq t$, tomamos $y = s^{-1}x$. Se tiene

$$\|y\|_{\alpha_i} < \frac{c_{\alpha_i}}{s} \leqslant s^{-1} \max_{i=1...n} c_{\alpha_i} \leqslant \delta,$$

luego $y = s^{-1}x \in U$. Esto prueba que $A \subset sU$ para todo $s \geq t$. □

Lema 1.39. *En un espacio localmente convexo E, todo conjunto totalmente acotado es acotado. En particular todo conjunto compacto es cerrado y acotado.*

Demostración. Sea U_α abierto de la subbase local, luego $T \subset \bigcup_{i=1}^n (t_i + U_\alpha)$ para algún subconjunto finito $\{t_i\}_{i=1..n} \subset T$. Luego si $x \in T$, $x = t_i + v$ para algún i, algún $v \in U_\alpha$.

$$\|x\|_\alpha = \|t_i + v\|_\alpha < \|t_i\| + 1 \leqslant c_\alpha$$

donde $c_\alpha = \text{máx}_{i=1...n} \|t_i\|_\alpha + 1$. Por la proposición anterior, T es acotado. □

§ En general no es cierto que una red de Cauchy sea acotada, pues dado $l_0 \in L$ (el conjunto dirigido), puede haber infinitos $l \in L$ que no verifican esto. Sin embargo, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión* de Cauchy, entonces es acotada: dado $\alpha \in \Lambda$ (el conjunto de índices de las seminormas), existe N_0 tal que $n \geq N_0$ implica

$$\|x_n\|_\alpha \leqslant \|x_n - x_{N_0}\|_\alpha + \|x_{N_0}\|_\alpha < 1 + \|x_{N_0}\|_\alpha.$$

tomamos $c_\alpha = \text{máx}_{i=1...N_0}\{1 + \|x_n\|_\alpha\}$, claramente $\|x_n\|_\alpha < c_\alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es $(x_n)_n \subset c_\alpha U_\alpha$.

1.2.7. Conjuntos convexos y balanceados

Lema 1.40. *Si C es un subconjunto convexo de un e.v.t. E, entonces $\overline{C}$ e int(C) son convexos.*

Demostración. Si $x, y \in \text{int}(C)$, entonces

$$\frac{x+y}{2} \in \frac{1}{2}\text{int}(C) + \frac{1}{2}\text{int}(C) \subset \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C \subset C$$

pues C es convexo. Pero

$$\frac{1}{2}\text{int}(C) + \frac{1}{2}\text{int}(C) = \bigcup_{z\in\frac{1}{2}\text{int}(C)} \left(z + \frac{1}{2}\text{int}(C)\right),$$

luego es un conjunto abierto contenido en C. Como el interior de C es la unión de todos los abiertos contenidos en C, se deduce que

$$\frac{1}{2}\text{int}(C) + \frac{1}{2}\text{int}(C) \subset \text{int}(C),$$

y entonces $\frac{x+y}{2} \in \text{int}(C)$.

La prueba de que la clausura de un convexo es convexa, queda como ejercicio. □

Lema 1.41 (Convexos balanceados). *Sea U entorno abierto convexo de $0 \in E$, entonces existe $V \subset U$ entorno abierto convexo balanceado de $0 \in E$.*

Demostración. Si E es real, basta tomar $V = U \cap (-U)$, es fácil ver que este conjunto es abierto convexo y balanceado. Si E es complejo, tomamos

$$A = \bigcap_{|\lambda|=1} \lambda U.$$

Claramente A es convexo, contiene al 0 y es un subconjunto de U. De la definición no es difícil ver que es balanceado: si $\mu = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ con $0 < r \leqslant 1$, $x \in V$, y $|\lambda| = 1$, entonces $x = \lambda e^{-i\theta} y$ para algún $y \in U$, como U es convexo y contiene al 0, $ry \in U$. Luego $\mu x = r\lambda y = \lambda r y \in \lambda U$, esto es $\mu x \in \cap \lambda U = V$.

Definimos $V = \operatorname{int}(A)$, es inmediato de la definición que V es un abierto balanceado contenido en U; por el lema previo resulta también convexo. Tenemos que ver que $0 \in V$ (V podría ser vacío). Consideramos la función $m : \mathbb{K} \times E \to E$ dada por $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$; como $(0,0) \in m^{-1}(U)$ y este es abierto pues U es abierto y m es continua, existe un entorno básico $(-\delta, \delta) \times Z \subset m^{-1}(U)$, con $Z \in E$ entorno abierto de 0. Notemos que esto dice que $\lambda Z \subset U$ si $|\lambda| < \delta$. Sea $W = \cup_{|\lambda|<\delta} \lambda Z \subset U$ que es un entorno abierto balanceado de 0. Entonces $W = \lambda W \subset \lambda U$ si $|\lambda| = 1$, en consecuencia $W \subset \cap_{|\lambda|=1} \lambda U = A$, y esto prueba que V es no vacío. □

Lema 1.42. *Si E es un e.l.c. y tiene un abierto acotado A, entonces E es normable.*

Demostración. Trasladando, podemos suponer que A es un entorno de 0; tomamos un abierto convexo U de la base local dentro de A, U resulta convexo y acotado por ser subconjunto de un acotado. Tomamos dentro de U un abierto convexo y balanceado V (Lema 1.41), resulta también acotado V. Sea p la funcional de Minkowski de V. La misma es una seminorma pues V es balanceado. Si $p(x) = 0$ existe $\lambda_n \to 0^+$ tal que $x \in \lambda_n V$; esto es $x = \lambda_n v_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como V es acotado, esto prueba que $x = 0$ (Observación 1.13), es decir p es una norma. Ahora por el Lema 1.16, la familia $U_n = \frac{1}{n} V$, con $n \in \mathbb{N}$, es una base local de E, y en particular E es metrizable.

Sea entonces $x_k \xrightarrow{k} 0$ en E. Dado $n \in \mathbb{N}$ la sucesión está eventualmente dentro de U_n para $k \geq k_0(n)$, lo que nos dice que $x_k = \frac{1}{n} v_k$ con $v_k \in V$. Luego $p(x_k) = {}^1\!/\!_n\, p(v_k) < {}^1\!/\!_n$ si $k \geq k_0$, es decir $p(x_k) \xrightarrow{k} 0$. Esto prueba que p es continua.

Recíprocamente, supongamos que $p(x_k) \to 0$. Sea W entorno abierto de 0, y sea n tal que $U_n \subset W$. Como también $p(nx_k) \xrightarrow{k} 0$ para cada n fijo, esto dice que a partir de un cierto k_0, $nx_k \in V \subset nW$ si $k \geq k_0$. Equivalentemente, $x_k \in W$ para todo $k \geq k_0$, lo que prueba que $x_k \to 0$ en E. □

Definición 1.43 (PHB). Diremos que el e.l.c E tiene la Propiedad de Heine Borel si todo conjunto cerrado y acotado es compacto.

§ Dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicios 19, 20, Sección 1.5) probar que las funciones suaves en un dominio de $\mathbb{R}^n$ tienen la PHB, consecuencia del Teorema de Arzelá-Ascoli.

Definición 1.44 (Espacios localmente compactos). Si E es un e.v.t., diremos que E es localmente compacto si existe un entorno V de 0 de manera tal que $\overline{V}$ es compacto.

Lema 1.45. *Sea E e.l.c. entonces E es localmente compacto si y solo si $dim E < \infty$.*

Demostración. Si E tiene dimensión finita entonces es isomorfo a $\mathbb{R}^n$, como la suma y el producto por escalares son continuos y toda función lineal entre espacios de dimensión finita es continua, se sigue que E y $\mathbb{K}^n$ son homeomorfos, luego E es localmente compacto.

Supongamos que E es localmente compacto, tomamos un entorno local V de 0 con clausura compacta, y tomamos abierto U de la base local convexa de manera tal que $U \subset V \subset \overline{V}$. Como $\overline{V}$ es acotado, U es abierto y acotado, luego E es normable. Pero un espacio normado de dimensión infinita no puede ser localmente compacto, puesto que la bola no es compacta (Teorema de Riesz). Se deduce que E tiene dimensión finita. □

§ También es cierto que todo e.v.t. localmente compacto tiene dimensión finita (con otra prueba).

1.3. Operadores lineales

En esta sección E, F denotan espacios vectoriales topológicos. Al conjunto de todos los operadores lineales continuos de E en F lo denotaremos $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposición 1.46. *Sea $T : E \to F$ operador lineal, son equivalentes*

1. *T es continuo.*

2. *T es continuo en 0 (para todo entorno abierto V de $0 \in F$ existe un entorno abierto U de $0 \in E$ tal que $U \subset T^{-1}(V)$).*

3. *Para toda red $(x_l)_{l\in L} \subset E$ tal que $x_l \xrightarrow{l} 0$, se tiene $T(x_l) \xrightarrow{l} 0$.*

Demostración. Si T es continuo la preimagen de todo abierto V es abierta, tomando $U = T^{-1}V$ se tiene la segunda afirmación. Supongamos ahora que vale la segunda afirmación y sea $x_l \xrightarrow{l} 0$. Dado $V \subset F$ entorno abierto de 0, tomamos U abierto con $U \subset T^{-1}(V)$ y tomamos l_0 tal que $x_l \in U$ si $l \geq l_0$. Entonces $T(x_l) \subset V$ si $l \geq l_0$, y esto prueba que $T(x_l) \to 0$. Por último, suponiendo que vale la tercera afirmación sea $y_l \xrightarrow{l} y$ en E, tomamos $x_l = y_l - y$. Se tiene $T(x_l) \to 0$, pero entonces $T(y_l) = T(x_l + y) = T(x_l) + T(y) \to T(y)$, lo que prueba que T es continuo. □

§ Si E es metrizable puede probarse que un operador lineal $T : E \to F$ es continuo si y solo si envia conjuntos acotados de E en conjuntos acotados de F (se suele decir que T es *acotado*).

1.3.1. Espacios normados

Para un espacio normado E denotaremos con B_E la bola unitaria cerrada,

$$B_E = \{x \in E : \|x\| \leqslant 1\}.$$

Lema 1.47 (Operadores lineales en espacios normados). *Si $T : E \to F$ es lineal y E, F son normados, entonces son equivalentes*

1. *T es continuo*
2. $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in B_E\} < \infty$
3. *Existe $C \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ para todo $x \in E$.*

Demostración. Supongamos que T es continuo, y que no vale la segunda afirmación. Existe entonces $(x_n) \subset B_E$ tal que $\|Tx_n\| \geq n^2$. Pero esto contradice la continuidad de T, puesto que $y_n = n^{-1}x_n \xrightarrow{n} 0$ pero $Ty_n \not\to 0$. Claramente la segunda afirmación implica la tercera escribiendo para $x \neq 0$

$$\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| \leqslant \|T\|,$$

luego $\|Tx\| \leqslant \|T\|\,\|x\|$. La última afirmación dice que si una sucesión tiende a cero en E, su imagen también tiende a cero en F, y vimos en la proposición anterior que esto implica la continuidad de T. □

§ Queda para el lector verificar que para todo operador lineal,

$$\sup\{\|Tx\| : x \in B_E\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} = \sup\left\{\|Tx\|\,\|x\|^{-1} : x \neq 0\right\}.$$

1.4. Espacios con producto interno

Sea E espacio con producto interno, que supondremos lineal en la primera variable y anti-lineal en la segunda:

$$\langle \alpha x, \beta y\rangle = \alpha\overline{\beta}\langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

(en particular si $K = \mathbb{R}$, el producto interno es bilineal).

Diremos que H, espacio con producto interno, es *espacio de Hilbert*, si H es completo, y por eso a un espacio con producto interno se lo suele llamar también **pre-Hilbert**.

Claramente

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \qquad \forall x, y \in E,$$

y si $K = \mathbb{R}$, $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$, luego el producto interno se recupera de la norma con la *identidad de polarización*:

$$2\langle x, y\rangle = \|x - y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2.$$

Si $K = \mathbb{C}$, también hay una identidad de polarización que recupera el producto interno a partir de la norma:

$$4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right). \tag{1.3}$$

Dado un subespacio $S \subset H$, su *complemento ortogonal* es

$$S^\perp = \{x \in H : \langle x, s\rangle = 0 \quad \forall s \in S\}.$$

Es fácil ver que $S^\perp$ siempre es un subespacio cerrado de H. Si $x \in S^\perp$ diremos que $x \perp S$.

1.4.1. Bases ortonormales

Diremos que un conjunto ortogonal $\{e_i\}_{i\in I} \subset H$ (con H espacio de Hilbert) es *completo* si el subespacio generado es denso. Si además los vectores son unitarios (i.e. es un conjunto ortonormal) diremos que forman una *base ortonormal*, abreviado b.o.n.

Observación 1.48. Si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto ortonormal, y $(\alpha_n)_n \in \ell^2$, la suma

$$\sum_n \alpha_n e_n$$

es convergente en H pues para $p \geq 0$,

$$\|\sum_{j=1}^{n+p} \alpha_j e_j - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\|^2 = \|\sum_{j=n+1}^{n+p} \alpha_j e_j\|^2 = \sum_{j=n+1}^{n+p} |\alpha_j|^2 < \varepsilon$$

si $n \geq n_0$, luego la suma es de Cauchy en H y por ende convergente.

Lema 1.49 (Desigualdad de Parseval). *Si $\{e_n\}_n$ es un conjunto ortonormal, entonces para todo $x \in H$ y todo $N \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Demostración. Sea $y = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n$, es fácil ver que $x - y \perp y$ escribiendo el producto interno. Luego

$$\|x\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y\|^2 \geq \|y\|^2$$

y esto prueba la desigualdad. □

1.5. Ejercicios

En esta sección de ejercicios, E denota un espacio vectorial, $\mathbb{K}$ denota el cuerpo base de E, y en todos los casos, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Sea $0 \in B \subset E$ convexo absorbente, con E espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Definimos $p_B(x) = \inf\{\mu \in \mathbb{R}, \mu > 0 : x \in \mu B\}$,

$$B_0 = \{x \in E : p_B(x) < 1\}, \ \overline{B_0} = \{x \in E : p_B(x) \leqslant 1\}.$$

   a) Probar que p_B es *subaditiva* y *positivamente homogénea* (saca escalares positivos), y que $B_0 \subset B \subset \overline{B_0}$.
   b) Probar que p_B es *homogénea* ($p_B(\lambda x) = |\lambda|\, p_B(x)$ para todo $\lambda \in K$) sii B es balanceado. En este caso decimos que p_B es una *seminorma*.
   c) Probar que p_B es una norma sii B es balanceado y no contiene semirrectas por el origen.

2. Sea $0 \in B \subset E$ convexo absorbente. Probar que

   a) $B = B_0$ (resp. $B = \overline{B_0}$) si y solo si B tiene la propiedad

$$1 \leqslant \lambda_n, \lambda_n \to 1 \text{ y } \lambda_n x \in B^c \ \forall\, n \in \mathbb{N} \implies x \in B^c$$
$$(\text{respectivamente } 0 \leqslant \lambda_n \leqslant 1, \lambda_n \to 1 \text{ y } \lambda_n x \in B \ \forall\, n \in \mathbb{N} \implies x \in B).$$

   b) Si $t > 0$, tB es convexo y absorbente, y además $p_{tB} = t^{-1} p_B$.
   c) Si E es un e.v.t. y B es abierto, entonces $B = \{x \in E : p_B(x) < 1\}$ y además p_B es continua en 0.
   d) Si E es un e.v.t. y B es abierto y balanceado, entonces p_B es continua (*sug.: desigualdad triangular inversa*).

3. Sea E espacio vectorial y $p_\alpha : E \to \mathbb{R}$ seminorma, para $r > 0$ definimos

$$U_\alpha = \{x \in E : p_\alpha(x) < 1\}, \quad rU_\alpha = \{x \in E : p_\alpha(x) < r\}.$$

   a) Probar que $N_\alpha = \{x \in E : p_\alpha(x) = 0\}$ es un subespacio.
   b) Probar que rU_α es convexo, balanceado y absorbente, y que si tomamos $B = U_\alpha$ como en el Ejercicio 1, entonces $p_B = p_\alpha$ (y luego $B_0 = B = U_\alpha$).

4. a) Sea E un espacio vectorial. Probar que posee una base algebraica.
   b) Probar que a todo espacio vectorial se lo puede normar.
   c) Probar que un espacio de Banach tiene dimensión finita si y solo si todo subespacio es cerrado.
   d) Probar que todo espacio vectorial de dimensión infinita posee dos normas no equivalentes.

5. Sea $S \subset E$ subespacio propio de un e.v.t., entonces $\text{int}(S) = \emptyset$.

6. Sea $\{x_n\}_n$ una b.o.n de H espacio de Hilbert e $\{y_n\}_n$ una sucesión ortogonal tal que

$$\sum_{n\geq 1} \|x_n - y_n\|^2 < 1.$$

   Probar que el subespacio generado por $\{y_n\}_n$ es denso.

7. Sea $x \in H$ un Hilbert y $A \subset H$ convexo y cerrado, $d = \operatorname{dist}(x, A) \geq 0$.

   a) Probar usando la ley del paralelogramo que para todo $a, b \in A$ y $x \in H$,

   $$\|a-b\|^2 = 2\|x-a\|^2 + 2\|x-b\|^2 - 4\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2 \leqslant 2\|x-a\|^2 + 2\|x-b\|^2 - 4d^2.$$

   b) Probar que existe un único $a_0 \in A$ que realiza la distancia $d(x, A)$, esto es $\|a_0 - x\| \leqslant \|a - x\|$ para todo $a \in A$. ¿Esta afirmación vale en Banach?

   c) Denotando $a_0 = \Pi(x)$, probar que si A es un subespacio cerrado entonces $x - \Pi(x) \in A^\perp$ para todo $x \in H$.

8. *a*) Sean H espacio de Hilbert, $D \subset H$ un subconjunto. El subespacio generado por D es denso en H si y sólo si se verifica $\langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in D \Rightarrow x = 0$.

   b) En ℓ^2 sea $S = \left\{x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^\infty x_n = 0\right\}$. Probar que S es denso en ℓ^2.

9. Si E es un espacio vectorial normado, E es de Banach si y solo si $\forall (x_n)_n \subset E$, $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$ implica que $\sum_{n=1}^\infty x_n$ converge en E.

   Observación: Dado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}_0^k$ un multi-índice con $|\alpha| = \sum \alpha_i$, y una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$, denotamos con $\partial^\alpha f = \frac{\partial^j f}{\partial x_{\alpha_1} \cdots \partial x_{\alpha_k}}$.

10. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ región acotada. Probar que los siguientes espacios son de Banach.

    a) $C^k(\overline{\Omega}) \quad \|f\| = \|f\|_\infty + \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|\partial^\alpha f\|_\infty \quad (k \in \mathbb{N})$.

    b) $Lip(\overline{\Omega}) \quad \|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{x,y \in \Omega} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}$.

    c) $C^\alpha(\overline{\Omega}) \quad \|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{x,y \in \Omega} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. ¿Qué sucede si $\alpha > 1$?

    d) $BV[0,1] \quad \|f\| = \|f\|_\infty + \sup\left\{\sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| : \ 0 = a_0 < \cdots < a_n = 1\right\}$.

11. Sean E un espacio de Banach, $S \subset E$ un subespacio cerrado.

    a) Probar que E/S es un espacio vectorial con $[x] + [y] := [x+y]$ y $\lambda[x] := [\lambda x]$.

    b) Si definimos en E/S la norma $\|[x]\| = \operatorname{dist}(x, S)$, probar que está bien definida y que es, efectivamente, una norma.

    c) Si $\pi : E \to E/S$ es la proyección $\pi(x) = [x]$, ver que π es lineal, y que $\|\pi\| \leqslant 1$.

    d) Probar que E/S es un espacio de Banach.

    e) Sean E un espacio vectorial normado, $F \subset E$ un subespacio de dimensión finita, entonces $\forall x \notin F \ \exists y_0 \in F$ que realiza la distancia, o sea

    $$\|x - y_0\| = \operatorname{dist}(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

12. Probar que en ℓ^∞/c_0 la norma de $[x]$ coincide con $\limsup_{n\to\infty} |x_n|$.

13. *a*) Buscar dos subespacios cerrados S y T en un espacio de Banach E tales que $S \oplus T$ no sea cerrado.

    b) Sean un espacio de Banach E, un subespacio cerrado S y un subespacio de dimensión finita T. Probar que $S + T$ es cerrado.

    c) Sean S y T subespacios cerrados y ortogonales de un espacio de Hilbert H. Probar que $S \oplus T$ es cerrado.

14. Si $1 \leqslant p \leqslant \infty$, sea $c_{(0)} = \{(x_n)_n \in \ell^p : x_n = 0 \text{ salvo para finitos } n\}$. Probar que $c_{(0)}$ es un subespacio de ℓ^p no cerrado y además

    a) $c_{(0)} \subset \ell_p$ es denso si y solo si $p < \infty$,

    b) calcular la clausura de ℓ_p en ℓ_∞ (con la norma infinito).

15. Sea E espacio normado y $p : E \to \mathbb{R}$ una seminorma. Probar que p es continua si y solo si $\|p\| = \sup_{x\in B_E} |p(x)| < \infty$, y en ese caso $p(x) \leqslant \|p\|\,\|x\|$ para todo $x \in E$.

    Observación: de aquí en más $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ denota una región (puede ser $\Omega = \mathbb{R}^n$) y $K_n \subset int(K_{n+1}) \subset \Omega = \cup_n K_n$ una familia numerable y creciente de compactos.

16. *Funciones continuas*. Sea $C(\Omega)$ con la familia de seminormas

$$p_n(f) = \sup_{x\in K_n} |f(x)|.$$

    Probar que $C(\Omega)$ es un espacio de Fréchet.

17. *Funciones holomorfas*. Sea $\mathcal{H}ol(\Omega)$ las funciones holomorfas en $\Omega \subset \mathbb{C}$, con la familia de seminormas del ejercicio anterior. Probar que $\mathcal{H}ol(\Omega)$ es un espacio de Frechét. Probar que no es normable (*sug.: usando el teorema de Montel, probar que la bola sería compacta*).

18. *Funciones suaves*. Denotamos $\mathcal{E}(\Omega)$ al espacio $C^\infty(\Omega)$ con la familia de seminormas $p_{n,\alpha}(f) = \sup_{x\in K_n} |\partial^\alpha f(x)|$, donde α es un multi-índice. Probar que $\mathcal{E}(\Omega)$ es un espacio de Fréchet.

19. *Funciones suaves en un compacto*. Si Ω es acotado y $K = \overline{\Omega}$, sea $C^\infty(K)$ las funciones C^∞ en algún abierto $V \supset K$, y las seminormas como en el Ejercicio 18. Probar que $C^\infty(K)$ es un espacio de Fréchet, y que no es normable (*sug.: usando el Ejercicio 15 y el teorema de Arzelá, probar que la bola sería compacta*).

20. Sea $C_c^\infty(\Omega)$ las funciones C^∞ de soporte compacto en Ω. Fijado $K \subset \Omega$ compacto, llamamos $\mathcal{D}_K(\Omega) \subset C_c^\infty(\Omega)$ al subconjunto de funciones con soporte en K, con la familia de seminormas del Ejercicio 18.

    a) Probar que $\mathcal{D}_K(\Omega)$ es un espacio de Fréchet, y que no es normable.

b) Considerar $C_c^\infty(\Omega)$ con la familia de seminormas $p_{K_n,\alpha}$. Probar que es localmente convexo, pero no es completo (*sugerencia: observar que* $C_c^\infty(\Omega) = \cup_n \mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$, *usar el teorema de Baire para llegar a un absurdo*).

21. *Funciones test*. Sea $\mathcal{D}(\Omega)$ el espacio $C_c^\infty(\Omega)$ con la topología: $V \ni 0$ es un abierto básico de $\mathcal{D}(\Omega)$ siempre que V sea convexo, balanceado, y $V \cap \mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$ sea abierto básico de $\mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    a) Probar que $\mathcal{D}(\Omega)$ es localmente convexo.

    b) Usar que $\mathcal{D}(\Omega)$ es completo por sucesiones para probar que no es Fréchet.

22. *Espacio de Schwarz*. Sea $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ el espacio de las funciones C^∞ en $\mathbb{R}^d$ tales que para todo $k \in \mathbb{N}$ y multi-índice α,

$$p_{(k,\alpha)}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}(1 + \|x\|)^k |\partial^\alpha f(x)| < \infty.$$

    Probar que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tiene dimensión infinita, que es Fréchet, y que no es normable.

23. Sea E un e.l.c., $(p_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ su familia *dirigida* de seminormas, y sea $S \subset E$ un subespacio. Considerar E/S como en el Ejercicio 11 y el mapa cociente $\pi : E \to E/S$.

    a) Para cada α, ver que $\widetilde{p}_\alpha(\pi(x)) = \inf_{s\in S} p_\alpha(x - s)$ está bien definido y es una seminorma que verifica $\widetilde{p}_\alpha(\pi(x)) \leqslant p_\alpha(x)$ para todo $x \in E$.

    b) Probar que la familia $(\widetilde{p}_\alpha)_\alpha$ separa puntos en E/S si y solo si $S \subset E$ es cerrado.

    c) Sea $\widetilde{U}_{\alpha,r} = \{\pi(x) \in E/S : \widetilde{p}_\alpha(\pi(x)) < r\}$. Probar que $\widetilde{U}_{\alpha,r} = \pi(U_{\alpha,r})$.

    d) Con S cerrado, probar que E/S es localmente convexo, y que π es abierta.

    e) Con S cerrado, probar que E es completo (resp. Fréchet, separable) si y solo si $S, E/S$ son ambos completos (resp. Frechét, separables).

24. Sea $(E, (p_\alpha))$ un espacio localmente convexo, $f : E \to \mathbb{K}$ una funcional lineal o una seminorma no nula. Probar que son equivalentes:

    a) f es continua.

    b) Para todo entorno V de $0 \in \mathbb{K}$ existe $U \subset E$ entorno de 0 tal que $U \subset f^{-1}(V)$.

    c) existen $C > 0$ y *finitos* α_n tales que $|f(x)| \leqslant C \sum_n p_{\alpha_n}(x)$ $\forall x \in E$.

    d) $\ker f$ no es denso.

    e) $\ker f$ es cerrado.

25. Probar que las siguientes funcionales son lineales, continuas y hallar sus normas:

a) $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\quad x \in c$ = sucesiones convergentes en ℓ^∞

b) $\varphi(f) = \int_{-1}^{1} t f(t)\, dt,\ f \in L^2[-1,1]$, $\quad$ *c*) $\varphi(f) = \int_{-1}^{1} t f(t)\, dt,\ f \in C[-1,1]$

d) $\varphi(x) = x_1 + x_2,\ x \in \ell^\infty$, $\quad$ *e*) $\varphi(x) = x_1 + x_2,\ x \in \ell^p, 1 \leqslant p < \infty$.

f) $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_k}{2^k},\ x \in c_0$, $\quad$ *g*) $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_k}{k},\ x \in \ell^p, 1 \leqslant p < \infty$.

En el siguiente ejercicio $x \in K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$ con K compacto y Ω región. Asimismo, α es un multi-índice y μ una medida de Borel finita en todos los compactos de Ω.

26. Probar que las siguientes funcionales son lineales y continuas en cada uno de los espacios $C^\infty(K), \mathcal{E}(\Omega), \mathcal{S}(\Omega), \mathcal{D}_K(\Omega), \mathcal{D}(\Omega), \mathcal{H}ol(\Omega)$:

a) $f \mapsto \delta_x(f) = f(x)$, $\quad$ la *delta* de *Dirac*.

b) $f \mapsto \partial^\alpha \delta_x(f) = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha f(x)$, $\quad$ las *derivadas* de la *delta*.

c) $f \mapsto \partial^\alpha g(f) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathrm{sop}(g)} g\, \partial^\alpha f$, $\quad$ *donde* $g \in C_c(\Omega)$.

d) $f \mapsto \mu_K(f) = \int_K f\, d\mu$. $\quad$ *e*) $f \mapsto \partial^\alpha \mu_K(f) = (-1)^{|\alpha|} \int_K \partial^\alpha f\, d\mu$.

27. Probar que las siguientes son funcionales lineales continuas en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

a) $f \mapsto H(f) = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt$, $\quad$ la *Heaviside*; probar que $H' = \delta_0$.

b) $f \mapsto \Delta_x(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(kx),\ (x \neq 0)$ $\quad$ el *peine* de *Dirac*.

c) $f \mapsto \{p.v.\tfrac{1}{x}\}(f) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \displaystyle\int_{|t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{t}\, dt$, $\quad$ el *valor principal* de $\frac{1}{x}$.

2. Teoremas de Hahn-Banach y aplicaciones

Los buenos matemáticos ven analogías entre teorías, los mejores ven analogías entre analogías.

S. Ulam, parafraseando a S. Banach.

En este capítulo estudiaremos los teoremas de extensión y separación de funciones a valores en el cuerpo base. Estos resultados, conocidos genéricamente como teoremas de Hahn-Banach (por Hans Hahn y Stephan Banach), pueden remontarse sin embargo a ideas de Eduard Helly [6] de 1912, sobre extensión de funcionales lineales en el espacio de funciones continuas $E = C[a, b]$.

Recordamos que si E es un espacio vectorial, una función $p : E \to \mathbb{R}$ es *subaditiva* si $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in E$, y que es *positivamente homogénea* si $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ para todo $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

2.1. Teoremas de extensión

Teorema 2.1 (Hahn-Banach, extensión. Caso real). *Sea E espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y $S \subset E$ subespacio. Sean $f : S \to \mathbb{R}$ lineal, p subaditiva y positivamente homogénea tales que $f(s) \leqslant p(s)$ para todo $s \in S$. Entonces existe $\varphi : E \to \mathbb{R}$ lineal que extiende a f y de manera que $\varphi(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in E$.*

Demostración. Si $S = E$ no hay nada que probar. Si no es así, sea $x_1 \in E$ tal que $x_1 \notin S$. Notamos que para todo $x, y \in S$ se tiene

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leqslant p(x + y) \leqslant p(x - x_1) + p(x_1 + y).$$

Luego para todo $x, y \in S$,

$$f(x) - p(x - x_1) \leqslant p(x_1 + y) - f(y).$$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ el supremo del lado izquierdo (tomando supremo sobre $x \in S$). Entonces

$$f(x) - p(x - x_1) \leqslant \alpha \leqslant p(x_1 + y) - f(y) \tag{2.1}$$

para todo $x, y \in S$, y en particular α es finito (notamos que en realidad podemos tomar cualquier número real encerrado entre las cantidades del extremo izquierdo y derecho).

Definimos $f_1(x_1) = \alpha$ y extendemos linealmente: $f_1 : S_1 = S \oplus \langle x_1 \rangle \to \mathbb{R}$ está dada por $f_1(x + \lambda x_1) = f(x) + \lambda\alpha$. Veamos que $f \leqslant p$ en S_1: claramente $f_1(x + 0x_1) = f(x) + 0 \leqslant p(x) = p(x + 0x_1)$ para todo $x \in S$, ahora tomamos $t > 0$ y cambiando x, y por $t^{-1}x, t^{-1}y$ en (2.1), y multiplicando por s obtenemos

$$f(x) - p(x - tx_1) \leqslant t\alpha \leqslant p(tx_1 + y) - f(y),$$

de donde se deduce

$$f_1(x - tx_1) = f(x) - t\alpha \leqslant p(x - tx_1), \quad f_1(y + tx_1) = f(y) + t\alpha \leqslant p(y + sx_1).$$

Hemos probado que $f_1(x + \lambda x_1) \leqslant p(x + \lambda x_1)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, esto es, $f_1 \leqslant p$ en S_1.

La demostración se termina usando el Lema de Zorn: todo conjunto parcialmente ordenado, cuyo orden es inductivo (toda conjunto totalmente ordenado tiene cota superior), tiene un elemento maximal. Para ello, sea

$$\mathcal{P} = \{(M, \psi) : S \subset M \subset E \text{ subespacio y } \psi : M \to \mathbb{R} \text{ lineal }, \psi \leqslant p \text{ en } M, \psi|_S = f\},$$

con el orden parcial dado por $(M_1, \psi_1) \leqslant (M_2, \psi_2)$ si $M_1 \subset M_2$ y $\psi_2|_{M_1} = \psi_1$. Sea $\Omega = \{(M_i, \psi_i)\}_i \in I \subset \mathcal{P}$ totalmente ordenada, tomamos $X = \cup_i M_i \subset E$, que es claramente un subespacio por el orden total. Definimos $\varphi(x) = \psi_i(x)$ si $x \in M_i$. Es inmediato que $\varphi : X \to \mathbb{R}$ es lineal, que $\varphi \leqslant p$ en X y que φ extiende a f. Esto dice que (X, φ) es cota superior para la cadena Ω. Sea ahora (X, φ) elemento maximal de $\mathcal{P}$. Necesariamente tiene que ser $X = E$, porque en caso contario, tomamos $x_1 \in E \setminus X$ y repetimos el procedimiento anterior, extendiendo φ y contradiciendo la maximalidad. □

§ Si $f \leqslant p$ en un subespacio $M \subset E$, y $f : M \to \mathbb{R}$ es lineal, entonces $-f(x) = f(-x) \leqslant p(-x)$, esto es

$$-p(-x) \leqslant f(x) \leqslant p(x) \qquad \forall x \in M. \tag{2.2}$$

En particular, si p es homogénea, $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, se tiene $|f| \leqslant p$ en M (este es el caso cuando p es una seminorma).

Observación 2.2. Si $z \in \mathbb{C}$, entonces $z = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Re}(iz)$. Luego si $F : E \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-lineal, entonces $u = \mathrm{Re}\, F : E \to \mathbb{R}$ es $\mathbb{R}$-lineal y además

$$F(x) = u(x) - iu(ix) \quad \forall x \in E. \tag{2.3}$$

Recíprocamente, si $U : E \to \mathbb{R}$ es $\mathbb{R}$-lineal, y definimos F con la fórmula de arriba, entonces F es $\mathbb{C}$-lineal y es fácil ver que $U = \mathrm{Re}\, F$.

Con esta observación podemos extender el Teorema de Hahn-Banach a funcionales complejas:

Teorema 2.3 (Hahn-Banach, extensión. Caso general). *Sea E espacio vectorial y $S \subset E$ subespacio. Sean $f : S \to K$ lineal, p seminorma tales que $|f(s)| \leqslant p(s)$ para todo $s \in S$. Entonces existe $\varphi : E \to K$ lineal que extiende a f y de manera que $|\varphi(x)| \leqslant p(x)$ para todo $x \in E$.*

Demostración. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tenemos $f(s) \leqslant |f(s)| \leqslant p(s)$ para todo $s \in S$, y por la observación que sigue al teorema anterior deducimos que existe $\varphi : E \to \mathbb{R}$ que extiende f y tal que $|\varphi| \leqslant p$ en E (pues ahora p es seminorma).

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, consideramos $u = \mathrm{Re}(f) : S \to \mathbb{R}$, como $u \leqslant |f| \leqslant p$ existe $U : E \to \mathbb{R}$ que extiende u y de manera que $U \leqslant p$ en E. Definimos $\varphi(x) = U(x) - iU(ix)$, entonces φ es $\mathbb{C}$-lineal y extiende a f. Ahora para cada $x \in E$ escribimos $\varphi(x) = e^{i\theta}|\varphi(x)|$, entonces

$$|\varphi(x)| = e^{-i\theta}\varphi(x) = \varphi(e^{-i\theta}x) = U(e^{-i\theta}x) \leqslant p(e^{-i\theta}x) = p(x).$$

□

Hasta ahora, los teoremas de Hahn-Banach no requieren de ninguna topología. Sin embargo, la relación con la misma es evidente si trabajamos en espacios normados o más generalmente, en espacios localmente convexos. El siguiente corolario es la primer (y muy importante) aplicación del mismo.

Observación 2.4. Sean E e.v.t., $p : E \to \mathbb{R}$ subaditiva y positivamente homogénea, $f : S \to \mathbb{K}$ lineal tal que $|f| \leqslant p$ en el subespacio S. Entonces la funcional $\varphi : E \to \mathbb{K}$ que extiende a f por el Teorema de Hahn-Banach es continua: si $x_l \xrightarrow{l} 0$ entonces como $|\varphi(x_l)| \leqslant p(x_l)$ para todo $l \in L$, se sigue que $\varphi(x_l) \xrightarrow{l} 0$. En particular esto ocurre si p es la funcional de Minkowski de un entorno abierto convexo de 0.

Corolario 2.5. *Si E es e.l.c., entonces E' separa puntos, esto es $\varphi(x) = \varphi(y)$ para toda $\varphi \in E'$ implica que $x = y$ en E.*

Demostración. Por hipótesis las seminormas separan puntos, existe una tal que $p(x-y) > 0$. Definimos $f : \langle x - y\rangle \to \mathbb{C}$ como $f(\lambda(x-y)) = \lambda p(x-y)$. Entonces $|f(\lambda(x-y))| = |\lambda| p(x-y) = p(\lambda(x-y))$, y por el teorema de Hahn-Banach y la observación previa, existe $\varphi \in E'$ que extiende a f. Pero entonces

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x-y) = f(x-y) = p(x-y) > 0.$$

□

Ejemplo 2.6. La hipótesis de que E es un e.l.c. es esencial para garantizar suficiente cantidad de funcionales del dual. Por ejemplo, si $0 < p < 1$, podemos considerar el e.v.t.

$L^p[0,1]$ dado por las funciones $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ tales que $\int_0^1 |f|^p < \infty$. Como $|x+y|^p \leqslant |x|^p + |y|^p$, resulta un espacio vectorial; si además consideramos la distancia invariante

$$d(f,g) = \int_0^1 |f-g|^p$$

esta tiene todas las propiedades de una métrica, y hace a la suma y al producto por escalares continuo. Luego $E = (L^p, d_p)$ es en efecto un espacio vectorial topológico, y no es difícil ver que tiene dimensión infinita (todos los polinomios están en E). Por otro lado, puede probarse que los únicos conjuntos abiertos convexos de E son $\emptyset$ y E (los detalles pueden verse en Rudin [13, 1.47]). Esto tiene una consecuencia importante: si tomamos una funcional lineal continua $\varphi : E \to \mathbb{K}$, la preimagen de la bola $B_1(0) \subset K$ es abierta y convexa, y como contiene al cero, debe ser $\varphi^{-1}(B_1(0)) = L^p$. Pero entonces $\varphi(L^p) \subset B_1(0)$ y esto sólo es posible si $\varphi \equiv 0$. En consecuencia, $(L^p)' = \{0\}$ si $0 < p < 1$.

§ En un espacio localmente convexo, hay suficiente cantidad de funcionales continuas como para separar puntos. Se deduce entonces que la topología débil de E (ver Definición 1.34), es una topología Hausdorff. En cambio, con el ejemplo anterior, vemos que hay e.v.t. donde E_ω, a pesar de estar siempre dado por una familia de seminormas, no es Hausdorff. De hecho en el ejemplo anterior la topología débil de $E = L^p[0,1]$ resulta ser la indiscreta: solo hay dos abiertos, que son $\emptyset$ y E.

Notamos también que la topología ω^* en E' siempre es localmente convexa (en cualquier e.v.t.) pues si $\varphi \neq 0$, es porque existe $x \in E$ tal que $\varphi(x) \neq 0$, luego $p_x(\varphi) = |\varphi(x)| \neq 0$, y como mencionamos en el comienzo del primer capítulo, con esto basta para que sea Hausdorff.

Terminamos esta sección para remarcar que en el caso de espacios normados, el teorema permite extender funcionales preservando la norma (esta suele ser la versión clásica del teorema cuando sólo se estudian espacios normados):

Teorema 2.7 (Hahn-Banach, espacios normados). *Sea E normado y $S \subset E$ subespacio. Si $f : S \to \mathbb{K}$ es lineal y continua, entonces existe $\varphi \in E'$ que extiende f con la misma norma.*

Demostración. La hipótesis dice que $\sup_{s \in B_S} |f(s)| = \|f\| < +\infty$, en consecuencia tenemos que $|f(s)| \leqslant \|f\|\,\|s\|$ para todo $s \in S$. Sea $p : E \to \mathbb{K}$ la seminorma $p(x) = \|f\|\,\|x\|$, entonces $|f| \leqslant p$ en S y por el teorema de extensión existe $\varphi : E \to \mathbb{K}$ lineal que extiende a f con la misma cota. Como $|\varphi(x)| \leqslant p(x) = \|f\|\,\|x\|$ en E, entonces $\|\varphi\| \leqslant \|f\|$ y en particular $\varphi \in E'$. Pero además

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in B_E} |\varphi(x)| \geqslant \sup_{s \in B_S} |\varphi(s)| = \sup_{s \in B_S} |f(s)| = \|f\|,$$

luego $\|\varphi\| = \|f\|$. □

2.2. Teoremas de separación

Pasaremos ahora a describir las versiones *geométricas* del teorema de Hahn-Banach, conocidas como teoremas de separación. En este caso, los espacios involucrados son necesariamente topológicos. Para ello primero probaremos tres hechos elementales que son de interés independiente.

Lema 2.8. *Sea E e.v.t.*

1. *Si $x \in U \subset E$ abierto, $y \in E$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $x + ty \subset U$ para todo $|t| < \varepsilon$.*
2. *Si $\varphi : E \to \mathbb{K}$ es lineal y no idénticamente nula, entonces es abierta.*
3. *Si $\varphi : E \to \mathbb{K}$ es lineal, entonces es continua si y solo si existe $M > 0$ y $W \subset E$ abierto entorno de cero tales que $|\varphi(x)| < M$ si $x \in W$.*

Demostración. Consideramos la función continua $m : \mathbb{K} \to E$ dada por $\lambda \mapsto x + ty$, como $0 \in m^{-1}(U)$ y este es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon \subset m^{-1}(U)$. Esto prueba la primera afirmación.

Si φ es lineal y no nula, sea $y \in E$ tal que $\varphi(y) \neq 0$. Dado $U \subset E$ abierto, $\varphi(x) \in \varphi(U)$, tomamos $\varepsilon > 0$ como en el item anterior y observamos que, como $x + ty \subset U$, entonces

$$\varphi(x) + t\varphi(y) = \varphi(x + ty) \in \varphi(U) \quad \forall |t| < \varepsilon.$$

Luego $B_\delta(\varphi(x)) \subset \varphi(U)$ (donde $\delta = \varepsilon|\varphi(y)| > 0$), lo que prueba que $\varphi(U)$ es abierto en $\mathbb{K}$.

Si φ es continua, $W = \varphi^{-1}(B_M) \subset E$ es un entorno abierto de cero que verifica lo pedido. Recíprocamente, si existen M, W como los enunciados, y $\varepsilon > 0$, entonces $V = \varepsilon M^{-1} W$ es un entorno abierto de 0 y además $|\varphi(y)| < \varepsilon$ si $y \in V$, así que φ es continua (Proposición 1.46). □

Teorema 2.9 (Hahn-Banach, separación de un abierto). *Sea E e.v.t., $A, B \subset E$ convexos disjuntos y no vacíos, con A es abierto. Existen entonces $\gamma \in \mathbb{R}$, $\varphi \in E'$ tales que*

$$Re\, \varphi(a) < \gamma \leqslant Re\, \varphi(b) \quad \forall a \in A, b \in B.$$

Demostración. Podemos suponer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ya que en caso contrario construimos una funcional real que verifique lo dicho, y si la extendemos mediante la fórmula (2.3), entonces su parte real verifica entonces lo pedido. Tomamos $a_0 \in A$, $b_0 \in B$, definimos $x_0 = b_0 - a_0$ y consideramos el conjunto $C = A - B + x_0$. Como A es abierto y $0 = a_0 - b_0 + x_0$, C es un entorno abierto de 0, que no contiene a x_0 puesto que en ese caso $x_0 = a - b + x_0$ y esto es imposible pues $A \cap B = \emptyset$. También,

$$\frac{a_1 - b_1 + x_0 + a_2 - b_2 + x_0}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{b_1 + b_2}{2} + x_0 \in A - B + x_0 = C$$

lo que prueba que C es convexo. Sea p la funcional de Minkowski de C, que es subaditiva y positivamente homogénea, además como $x_0 \notin C$ se tiene $1 \leqslant p(x_0)$. Definimos $f(\lambda x_0) =$

λ, entonces si $\lambda \geq 0$, $f(\lambda x_0) = \lambda 1 \leqslant \lambda p(x_0) = p(\lambda x_0)$, y si $\lambda < 0$ entonces $f(\lambda x_0) = \lambda < 0 \leqslant p(\lambda x_0)$. Luego $f \leqslant p$ en $S = \langle x_0 \rangle$, existe entonces por el Teorema 2.1 una $\varphi : E \to \mathbb{R}$ lineal que extiende f. Sea $W = C \cap (-C)$, entonces si $x \in W$, $\varphi(x) \leqslant p(x) < 1$ y además como $x = -c$ para algún $c \in C$, se tiene $\varphi(x) = \varphi(-c) = -\varphi(c) > -1$, esto es $-1 < \varphi(x) < 1$ para todo $x \in W$, luego $\varphi \in E'$ por el tercer item lema previo*. Ahora

$$\varphi(a) - \varphi(b) + 1 = \varphi(a - b + x_0) = \varphi(c) < 1,$$

luego $\varphi(a) < \varphi(b)$ para todo $a \in A, b \in B$. Como A es abierto y φ es lineal, obtenemos que $\varphi(A) \subset \mathbb{K}$ es abierto, luego tomando $\gamma = \inf_{b \in B} \varphi(b)$ hemos probado el teorema. □

§ El ejemplo elemental $A = (-\infty, 0)$, $B = [0, +\infty)$ en $E = \mathbb{R}$ muestra que la desigualdad del lado derecho no puede afinarse a una desigualdad estricta. Sin embargo, con hipótesis adicionales, podemos separar mejor los convexos. Es clave en el siguiente teorema, que el espacio sea localmente convexo.

Definición 2.10 (Semiespacios). Si $\varphi \in E'$ y $c \in \mathbb{R}$, decimos que

$$H(\varphi, c) = \{x \in E : \mathrm{Re}\varphi(x) = c\}$$

es un *hiperplano afín*. Al conjunto

$$S(\varphi, c) = \{y \in E : \mathrm{Re}\varphi(x) \leqslant c\}$$

se lo suele denominar *semiespacio*. El *semiespacio complementario u opuesto* está dado por

$$S(\varphi, c)^{op} = \{y \in E : \mathrm{Re}\varphi(x) \geqslant c\}.$$

Si $A \subset E$ y $\lambda = \sup\{\mathrm{Re}\varphi(a) : a \in A\}$, decimos que $H_\varphi(A) = H(\varphi, \lambda)$ *soporta* al conjunto A.

Decimos que $S_\varphi(A) = S(\varphi, \lambda)$ es un *semiespacio que soporta* al conjunto A, y si $\beta > \lambda$ decimos que $S(\varphi, \beta)$ *soporta estrictamente* a A.

§ No es difícil probar que si $C \subset E$ es un conjunto convexo, cerrado, no vacío, de un e.l.c., entonces C es la intersección de todos los semiespacios que lo soportan (Ejercicio 10).

§ El Teorema 2.9 nos dice que dados dos convexos disjuntos A, B de un e.v.t., con A abierto, existe un semiespacio que soporta A de manera que el semiespacio opuesto soporta a B.

Veamos ahora como separar estrictamente dos convexos utilizando la compacidad de uno de ellos.

Teorema 2.11 (Hahn-Banach, separación de compactos y cerrados). *Sean $K, C \subset E$ convexos disjuntos no vacíos en un e.l.c., con K compacto y C cerrado. Entonces existen $\gamma_1 < \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\varphi \in E'$ tales que*

$$Re\,\varphi(k) \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 \leqslant Re\,\varphi(c) \quad \forall k \in K, c \in C.$$

*También podríamos haber usado que p es continua en $0 \in E$ porque C es abierto, convexo (Ejercicio 2, Sección 1.5), y la ecuación (2.2) para ver que φ es continua

Demostración. Nuevamente podemos suponer que E es real. Tomamos V entorno abierto convexo de 0 de manera tal que $K+V$ y $C+V$ sean disjuntos (Proposición 1.28). Tomando $A = K + V$ (que es abierto y convexo por ser suma de convexos) y $B = C$, obtenemos por el teorema de separación de Hahn-Banach $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(A)$ está separado y a la izquierda de $\varphi(C)$ en $\mathbb{R}$. Tomamos $\gamma_2 = \gamma = \inf_{c\in C} \varphi(c)$ como hicimos anteriormente, y tomamos $\gamma_1 = \max_{k\in K} \varphi(k)$. Como K es compacto y $A = K + V$ es abierto la inclusión es propia y debe ser $\gamma_1 < \gamma_2$. □

§ El teorema anterior nos dice que dados dos convexos disjuntos K, C de un e.l.c., con K compacto y C cerrado, existe un semiespacio que soporta estrictamente K de manera que el semiespacio opuesto soporta estrictamente C.

Si queremos separar los conjuntos convexos tanto en parte real como imaginaria, necesitamos cierta simetría en alguno de ellos, por ejemplo:

Corolario 2.12. *Si E es e.l.c., $K, C \subset E$ son convexos disjuntos no vacios, K es compacto y balanceado, y C es cerrado, entonces existen $0 \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 \in \mathbb{R}$ y $\varphi \in E'$ tales que*

$$|\varphi(k)| \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 \leqslant |\varphi(c)|$$

para todo $k \in K$, $c \in C$.

Demostración. Por el teorema de separación, existe $\varphi \in E'$ tal que

$$\operatorname{Re}\varphi(k) \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 \leqslant \operatorname{Re}\varphi(c) \leqslant |\varphi(c)|$$

para todo $k \in K$, $c \in C$. Como $0 \in K$, tiene que ser $\gamma_1 \geq 0$. Ahora si $\varphi(k) = e^{i\theta}|\varphi(k)|$ entonces

$$|\varphi(k)| = e^{-i\theta}\varphi(k) = \varphi(e^{-i\theta}k) = \operatorname{Re}\varphi(e^{-i\theta}k) = \operatorname{Re}\varphi(k') \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 \leqslant |\varphi(c)|$$

para todo $k \in K$, $c \in C$. □

Observación 2.13. En un espacio normado, dada $\varphi \in E'$, por la misma definición de su norma, para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in E$ con $\|x\| = 1$ tal que $|\varphi(x)| > \|\varphi\| - \varepsilon$. Para no lidiar con los módulos, puede ser útil observar que como $\varphi(x) = e^{i\theta}|\varphi(x)|$, entonces $\varphi(e^{-i\theta}x) = |\varphi(x)|$.

Luego llamando $x_0 = e^{-i\theta}x$, también se tiene que para todo $\epsilon > 0$, existe x_0 vector unitario que verifica

$$\varphi(x_0) = \operatorname{Re}\varphi(x_0) = |\varphi(x_0)| > \|\varphi\| - \varepsilon.$$

Tener en cuenta esta observación para el Ejercicio 11 de esta sección.

2.3. Aplicación: Teorema de Krein-Milman

En esta sección caracterizaremos (utilizando el teorema de separación de Hahn-Banach) los conjuntos compactos convexos en espacios localmente convexos, como la cápsula convexa de sus extremales. En particular los conjuntos compactos tienen muchos extremales en espacios localmente convexos. Primero discutiremos las definiciones pertinentes.

Definición 2.14 (Extremales). Sea E un espacio vectorial, $K \subset E$. Diremos que $v \in K$ es un *punto extremal* de K si v no puede describirse como un punto interno de un segmento que comienza y termina en K. Es decir que v *no* es extremal si existen $x, y \in K$, $0 < t < 1$ tales que $v = tx + (1-t)y$. Este segmento se suele denotar $(x : y)$ y se denomina *segmento abierto*. Denotaremos $\text{ext}(K)$ al conjunto de puntos extremales de K.

Diremos que $S \subset K$ es un *conjunto extremal* si para cada par $x, y \in K$, se verifica

$$(x : y) \cap S \neq \emptyset \Longrightarrow x, y \in S.$$

Es decir que S es extremal si ningún punto de S es un punto interno de un segmento cuyos extremos están *ambos* en $K \setminus S$.

La *cápsula convexa* de un conjunto $A \subset E$, denotada $co\, A$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos de A, y la *cápsula convexa cerrada* es la clausura de este, denotada $\overline{co}\, A$.

§ Claramente, los puntos extremales $v \in K$ definen conjuntos extremales $S = \{v\} \subset K$ y recíprocamente si $S \subset K$ es un conjunto extremal con un solo punto, este punto es extremal de K.

§ Los conjuntos extremales $S \subset K$ pueden pensarse entonces como los vértices, las aristas, las caras, etc. de K.

Lema 2.15. *Sea $A \subset B \subset C \subset E$ con E espacio vectorial. Si A es extremal en B y B es extremal en C, entonces A es extremal en C.*

Demostración. Sean $x, y \in C$ y supongamos que $v \in (x : y) \cap A$. Como $A \subset B$, tenemos $v \in (x : y) \cap B$, y por la extremalidad de B en C, se deduce $x, y \in B$. Pero entonces, por la extremalidad de A en B, se deduce que $x, y \in A$, luego A es extremal en C. □

§ La cápsula convexa de $A \subset E$ es el menor conjunto convexo que contiene A, y de hecho es fácil ver que A es convexo si y solo si $A = co\, A$. Por el Lema 1.40 la cápsula convexa cerrada es el menor convexo cerrado que contiene A.

Teorema 2.16 (Krein-Milman). *Sea E un e.l.c. y sea $K \subset E$ un conjunto compacto, entonces*

1. *Si K es no vacío entonces $\text{ext}(K) \neq \emptyset$.*
2. *$K \subset \overline{co}\ \text{ext}(K)$*
3. *Si K es además convexo, $K = \overline{co}\ \text{ext}(K)$.*

Demostración. Consideramos la familia $\mathcal{P}$ de todos los subconjuntos cerrados, extremales y no vacios de K. Esta familia es no vacía pues K es extremal de si mismo. Le damos a $\mathcal{P}$ el orden parcial dado por la inclusión inversa ($S \leqslant S'$ si $S' \subset S$). Veamos que toda cadena $\Omega = \{S_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{P}$ (familia totalmente ordenada) tiene una cota superior. Para ello tomamos $S = \cap S_i$, que resulta claramente cerrado y no vacío en K por la compacidad de K y el orden total (estamos usando la P.I.F., propiedad de intersección finita). Si $x, y \in K$ y $(x, y) \cap S$ es no vacío, entonces $(x, y) \cap S_i$ es no vacío para cada i luego $x, y \in S_i$ para todo i lo que prueba que $x, y \in S$. Esto prueba que S es extremal, y por ende cota superior para la cadena Ω. Sea entonces S maximal en $\mathcal{P}$, afirmamos que S tiene un único punto. Si hubiere dos puntos distintos $x, y \in S$, tomamos $\varphi \in E'$ tal que los separa, y consideramos

$$E_\varphi(S) = \{v \in S : \mathrm{Re}\varphi(v) = \sup_{w \in S} \mathrm{Re}\varphi(w) = \gamma\} = H_\varphi(S) \cap S \subset S$$

que es un conjunto cerrado en K. Probaremos que es no vacío y extremal. Tomando una red $w_i \in S$ tal que $\lim_i \mathrm{Re}\varphi(w_i) = \gamma$ y pasando a una subred convergente (S es compacto) deducimos que $w_0 = \lim_i w_i \in S_\varphi$, esto es, $E_\varphi(S)$ es no vacío. Veamos ahora que $E_\varphi(S)$ es extremal en K: si $x, y \in K$, $v \in (x : y) \cap E_\varphi(S) \subset (x : y) \cap S$, entonces $x, y \in S$ pues S es extremal. Luego $\mathrm{Re}\varphi(x), \mathrm{Re}\varphi(y) \leqslant \gamma$, pero

$$\gamma = \mathrm{Re}\varphi(v) = t\mathrm{Re}\varphi(x) + (1-t)\mathrm{Re}\varphi(y) \leqslant \gamma$$

prueba que en realidad, $\mathrm{Re}\varphi(x) = \mathrm{Re}\varphi(y) = \gamma$, luego $x, y \in E_\varphi(S)$. Como $E_\varphi(S)$ no puede contener simultáneamente a x, y pues φ los separa, se deduce que la inclusión $E_\varphi(S) \subset S$ es estricta, contradiciendo la maximalidad de S. Hemos probado que S tiene un único punto, y entonces el conjunto de puntos extremales de K es no vacío.

Ahora sea $C = \overline{co}\,\mathrm{ext}(K)$ y supongamos que no vale la inclusión enunciada. Sea $x_0 \in K \setminus C$, y sea $A = C + V$ un entorno abierto convexo de C que no toca x_0 (Proposición 1.28), por el Teorema 2.9 aplicado a los conjuntos convexos disjuntos $\{x_0\}$, A se deduce que existe $\varphi \in E', \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathrm{Re}\varphi(x) < \beta \leqslant \mathrm{Re}\varphi(x_0)$$

para todo $x \in \mathrm{ext}(K)$. Consideramos $\gamma = \sup\limits_{w \in K} \mathrm{Re}\varphi(w)$ y observamos que $\mathrm{Re}\varphi(x_0) \leqslant \gamma$. Ahora consideramos el conjunto

$$E_\varphi(K) = \{v \in K : \mathrm{Re}\varphi(v) = \gamma\} \subset K$$

que argumentando como antes, es compacto, no vacío y extremal de K. Sea $x_1 \in \mathrm{ext}(E_\varphi(K))$ (probamos en el primer apartado que el conjunto de extremales es no vacío para cualquier compacto no vacío). Como $E_\varphi(K)$ es extremal en K, por el Lema 2.15 deducimos que x_1 es extremal en K. Luego

$$\gamma = \mathrm{Re}\varphi(x_1) < \beta \leqslant \mathrm{Re}\varphi(x_0) \leqslant \gamma$$

una contradicción. Debe ser entonces $K \subset C = \overline{co}\,\mathrm{ext}(K)$.

Si asumimos probada la inclusión del segundo item, se tiene

$$K \subset \overline{co}\,\mathrm{ext}(K) \subset \overline{co}K$$

y este último es el menor convexo cerrado que contiene K, luego debe coincidir con K si este es convexo y compacto, lo que prueba que la cadena es de igualdades. □

§ Argumentando ligeramente distinto, se puede reemplazar la hipótesis E es e.l.c. por E' separa puntos (ver [13, Teorema 3.21]). En el trabajo [12], Roberts da un ejemplo de un conjunto compacto convexo no vacío $K \subset E$ de un espacio vectorial topológico, tal que K no tiene puntos extremales.

2.4. Aplicación: Teorema de Riesz-Markov

En esta sección daremos una aplicación del teorema de extensión de Hahn-Banach para funcionales lineales en espacios normados.

Recordamos que si $[a,b] \subset \mathbb{R}$, una función $g : [a,b] \to \mathbb{K}$ es de *variación acotada* si

$$V(g) = \sup\left\{\sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)| \,:\; a = t_0 < \cdots < t_n = b\right\} < \infty,$$

donde $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ es una partición del intervalo. Definiendo $\|g\| = \|g\|_\infty + V(g)$, el espacio de funciones de variación acotada, $BV[a,b]$ resulta un espacio de Banach (Ejercicio 10, Sección 1.5).

Para cada $g \in BV[a,b]$ y cada $f \in C[a,b]$, podemos definir la integral de Riemann-Stieltjes

$$\varphi_g(f) = \int_a^b f\,dg = \lim_{\pi\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\{g(t_{i+1}) - g(t_i)\}.$$

Como vale

$$|\varphi_g(f)| \leqslant \|f\|_\infty V(g),$$

resulta $\varphi_g \in C[a,b]'$ y de hecho, tomando $f = 1$, $\|\varphi_g\| = V(g)$.

§ Notemos que dos funciones de variación acotada difieren en una constante si y solo si la variacion de la diferencia es nula, si y solo si inducen la misma integral de Riemann-Stieltjes (es decir, inducen la misma medida de Borel regular en $[a,b]$).

Veremos que toda funcional del dual de $C[a,b]$ tiene una representación de este tipo. Para ello introducimos primero el espacio de las funciones continuas a trozos.

Definición 2.17 (Funciones continuas a trozos). Sea $PC[a,b]$ el espacio de las funciones continuas a derecha a trozos en $[a,b]$, que son aquellas funciones f tales que

1. f es continua por la derecha, es decir $f(x) = \lim_{y\to x^+} f(y)$ para todo $x \in [a,b]$,
2. $\lim_{y\to x^-} f(y)$ existe para todo $x \in [a,b]$ y es igual a $f(x)$ salvo para *finitos* puntos $x \in [a,b]$.

Le damos a $PC[a,b]$ la norma $\|\cdot\|_\infty$ para hacer de este un espacio normado. Este espacio contiene a las funciones continuas, pero también contiene a todas las funciones escalonadas (con continuidad por la derecha) en $[a,b]$.

Teorema 2.18 (Riesz-Markov para un intervalo real). *Sea $\varphi \in C[a,b]'$, entonces existe una función de variación acotada $g : [a,b] \to \mathbb{K}$ tal que $V(g) = \|\varphi\|$ y*

$$\varphi(f) = \int_a^b f\, dg.$$

En particular $C[a,b]' = BV[a,b]$.

Demostración. Por el teorema de Hahn-Banach, φ se extiende a una funcional lineal continua ψ en $PC[a,b]$, con la misma norma. Definimos $g(a) = 0, g(b) = \psi(\chi_{[a,b]}) = \varphi(1)$, y para $a \leqslant x < b$ definimos

$$g(x) = \psi(\chi_{[a,x)}),$$

de esta manera tenemos $g : [a,b] \to \mathbb{K}$ continua a izquierda. Veamos que g es de variación acotada. Dada una partición π de $[a,b]$, sea $\chi_i = \chi_{[t_i,t_{i+1})}$ para $i = 0...n-1$, y $\chi_n = \chi_{[t_{n-1},b]}$. Entonces si $(a_i)_{i=0...n-1} \subset \mathbb{K}$,

$$|\sum_{i=0}^{n-1} a_i\{g(t_{i+1}) - g(t_i)\}| = |\psi(\sum_i a_i\chi_i)| \leqslant \|\psi\| \max_i |a_i| = \|\varphi\| \max_i |a_i|.$$

Tomando $a_i = \operatorname{sgn}\{g(t_{i+1}) - g(t_i)\}$, deducimos que

$$\sum_i |g(t_{i+1}) - g(t_i)| \leqslant \|\varphi\|,$$

y esto prueba que g es de variación acotada.

Si $f \in C[a,b]$, tomamos la partición $t_i = a + i(b-a)/n$, y consideramos la función escalera

$$f_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\chi_i,$$

esta resulta continua a trozos a derecha, y además $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n} 0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\psi(f_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\psi(\chi_i) = \sum_i f(t_i)\psi(\chi_i) = \sum_i f(t_i)\{\psi(\chi_{[a,t_{i+1})}) - \psi(\chi_{[a,t_i)})\} \\
&= \sum_i f(t_i)\{g(t_{i+1}) - g(t_i)\} = \int_a^b f_n\, dg.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\varphi(f) = \psi(f) = \lim_n \psi(f_n) = \lim_n \int_a^b f_n\, dg = \int_a^b f\, dg.$$

Ahora bien, como φ se realiza integrando contra la función de variación acotada g, por la observación previa al teorema, tenemos $\|\varphi\| = V(g)$. □

§ Dejamos aquí señalado (y a verificar por el lector) que en el caso en que $\varphi = \delta_c$ con $c \in [a, b]$ (esto es, $\varphi(f) = f(c)$), entonces la única función de variación acotada continua a izquierda, con $g(a) = 0$, que representa a δ_c es la función de Heavyside con salto en c

$$g(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x \leqslant c \\ 1 & c < x \leqslant b. \end{cases}$$

Comparar con el Ejercicio 27, Sección 1.5.

2.4.1. Teorema de Riesz-Markov, caso general

En esta sección enunciamos (sin demostración) los teoremas de Riesz-Markov que describen funcionales positivas y funcionales continuas en espacios localmente compactos. Utilizaremos el teorema de Riesz-Markov para el cálculo funcional Boreliano (Proposición 6.28 y Teorema 6.29).

Seguimos los lineamientos del recomendable artículo de Arveson [1] donde estas ideas están desarrolladas y las demostraciones se dan con detalle.

§ Denotaremos con $C_c(X)$ a las funciones continuas (a valores en $\mathbb{K}$) de soporte compacto, en un espacio X localmente compacto Hausdorff, munido de la norma supremo. Una funcional $\varphi \in C_c(X)'$ es *positiva* si $\varphi(f) \geqslant 0$ para toda $f \geqslant 0$ en $C_c(X)$.

Definición 2.19 (Conjuntos Borelianos). La σ-álgebra de Borelianos de X, denotada $\mathcal{B}or(X)$, es aquella generada por los conjuntos cerrados de X. Una medida es de Borel si está definida sobre los conjuntos Borelianos.

Una medida es de *Baire* si está definida sobre la sigma álgebra $\mathcal{B}or_0(X)$ generada por los conjuntos *compactos*. Toda medida de Baire es una medida de Borel, y ambas σ-álgebras coinciden si el espacio X tiene base topológica numerable (por ejemplo, si X es un espacio métrico).

Diremos que una medida de Borel es *regular interior* si para todo $E \in \mathcal{B}or(X)$,

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\}.$$

Y diremos que una medida de Borel es *regular exterior* si para todo $E \in \mathcal{B}or(X)$,

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \supset E,\ U \text{ abierto}\}.$$

En la descomposición de una medida signada

$$\mu = \mu_+ - \mu_- + i(\eta_+ - \eta_-),$$

denotaremos con $|\mu| = \mu_+ + \mu_- + \eta_+ + \eta_-$ a la variación total de μ.

Teorema 2.20 (Riesz-Markov, funcionales positivas). *Sea X espacio localmente compacto Hausdorff, $\varphi \in C_c(X)'$ positiva. Entonces existe una única medida μ en X que es positiva, de Borel, regular interior, finita en compactos de X, tal que*

$$\varphi(f) = \int_X f\, d\mu, \qquad \forall f \in C_c(X).$$

Si X es compacto la medida es finita y regular.

§ Notemos que el teorema no caracteriza todas las funcionales del dual, sólo las positivas. Denotando con $C_0(X)$ a las funciones continuas que tienden a cero en infinito (esto quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{x \in X : |f(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset X$ es compacto), munido nuevamente de la norma supremo, tenemos una extensión para funcionales (y medidas) signadas:

Teorema 2.21 (Riesz-Markov, caso general). *Si $\rho \in C_0(X)'$, entonces existe una única medida de Borel compleja regular finita μ en X, tal que*

$$\rho(f) = \int_X f\, d\mu \qquad \forall f \in C_0(X).$$

El espacio de las medidas de Borel regulares finitas (en el sentido de que $|\mu|$ es finita) en X lo denotamos $\mathcal{M}(X)$, este es un espacio normado con la norma dada por la variación total

$$V(\mu) = |\mu|(X) = \sup \sum_k |\mu(E_k)|$$

donde el supremo se toma sobre familias finitas de conjuntos de Borel disjuntos.

Acotando, se tiene

$$|\rho(f)| \leqslant \int_X |f| d|\mu| \leqslant \|f\|_\infty V(\mu),$$

luego tomando supremo sobre $f \in C_0(X)$, con $\|f\|_\infty = 1$, obtenemos $\|\rho\| \leqslant V(\mu)$. Y también, aproximando a la identidad de X sobre compactos con funciones continuas, se prueba que $V(\mu) = \|\rho\|$.

§ El Teorema de Riesz-Markov nos dice entonces que hay una identificación $C_0(X)' = \mathcal{M}(X)$. En particular el espacio de medidas de Borel regulares finitas $\mathcal{M}(X)$ es completo.

2.5. Aplicación: Teorema de Runge

Como aplicación del teorema de Hahn-Banach y el Teorema de Riesz-Markov, probaremos el Teorema de Runge que dice que toda función holomorfa en un dominio razonable se puede aproximar uniformemente por funciones racionales. Utilizaremos el Teorema de Runge para el cálculo funcional analítico y el cálculo funcional continuo (Observación 5.22 y Teorema 5.24).

Comenzemos recordando que una función racional en $\mathbb{C}$ es simplemente un cociente de polinomios.

Observación 2.22 (Expresión en fracciones parciales). Cancelando factores comunes, toda función racional q tiene una *descomposición en fracciones parciales* dada por

$$q(z) = p_0(z) + \sum_{i=1}^{k} p_j((z - \lambda_j)^{-1})$$

donde $\lambda_j \in \mathbb{C}$ son los polos de q (las raíces del denominador) contadas con multiplicidad, y los p_i ($i = 0 \ldots k$) son polinomios; para $i \neq 0$, los polinomios p_i no tienen término independiente.

En esta sección $\widehat{\mathbb{C}}$ denota el plano complejo extendido, donde una base de entornos de $\{\infty\}$ está dada por los abiertos

$$B_R(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \cup \{\infty\}, \quad R > 0$$

Equivalentemente, y mediante la proyección estereográfica, podemos identificar $\widehat{\mathbb{C}}$ con la esfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ con su topología usal, identificando $\{\infty\}$ con el polo norte $N = (0,0,1) \in \mathbb{S}^3$.

Algunas observaciones importantes:

1. Estudiar el tipo de singularidad de f en ∞ es, por definición, estudiar el tipo de singularidad de $F(z) = f(1/z)$ en $z = 0$.

2. Si f es entera, entonces f tiene una singularidad esencial en infinito si y solo si f no es un polinomio (los polinomios tienen limite infinito en inifinito, luego se exienden a funciones continuas $p : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$).

3. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ no tienen por qué coincidir con las de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$: por ejemplo, si Ω es una banda horizontal en el plano, entonces su complemento en $\mathbb{C}$ tiene dos componentes conexas. Sin embargo, inspeccionando su imagen en la esfera con la proyección esterográfica nos dice que $\widehat{\mathbb{C}} - \Omega$ es conexo (se puede pasar por encima de N para ir de un lado al otro).

4. Denominamos *componente no acotada* a aquella componente que contiene al $\{\infty\}$.

5. Si $K \subset \mathbb{C}$ es compacto, entonces la cantidad de componentes conexas de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ es a lo sumo numerable, ya que se trata de un abierto en una variedad, y entonces las componentes conexas son abiertas (si hubiera no numerables componentes habria no numerables puntos aislados en S^2, contradiciendo la compacidad de S^2).

6. Por el contario, si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto, entonces $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ puede tener no numerables componentes conexas, ya que las componentes no tienen por qué ser abiertas. Por ejemplo, si tomamos $\Omega = \mathbb{C} \setminus C$, donde C es un conjunto de Cantor, se tiene $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega = C \cup \{\infty\}$, que tiene no numerables componentes conexas.

Por último, necesitamos recordar la fórmula de Cauchy con especificidad:

Teorema 2.23 (Fórmula de Cauchy). *Si $K \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ con K compacto y Ω abierto, existe una curva cerrada suave simple $\gamma \subset \Omega \setminus K$ y además si $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw \qquad \forall z \in K.$$

Teorema 2.24 (Teorema de Runge). *Sea $K \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ con K compacto y Ω abierto, $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$, λ_j un punto en cada componente conexa de $\widehat{\mathbb{C}} - K$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una función racional q_n cuyos polos están en el conjunto $\{\lambda_j\}_j$ y tal que*

$$|f(z) - q_n(z)| < 1/n \qquad \forall z \in K.$$

En particular f es límite uniforme en K de funciones racionales cuyos polos están lejos de K.

Demostración. Sea $E = C(K)$ las funciones continuas en K a valores complejos, con la norma supremo, y consideremos el subespacio $S \subset E$ de (las restricciones a K de) las funciones racionales con polos *contenidos* en el conjunto prescripto $\{\lambda_j\}_j$. Tenemos que probar que f está en la clausura de S. Por el teorema de Hahn-Banach, basta probar que toda funcional $\varphi \in E'$ que se anula en S, se anula también en f (Ejercicio 9, Sección 2.6). Por el teorema de Riesz-Markov que caracteriza el dual de $C(K)$ (Teorema 2.21), basta probar que si μ es una medida de Borel regular finita en K tal que

$$\int_K q\, d\mu = 0 \quad \forall q \in S,$$

entonces también

$$\int_K f\, d\mu = 0.$$

Sea $h(z) = \int_K (w-z)^{-1} d\mu(w)$, $z \in \mathbb{C} \setminus K$. Derivando bajo el signo integral, es fácil ver que h es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus K$. Veamos que $h \equiv 0$. Para ello, sea $V_j \subset S^2 \setminus K$ la componente conexa que contiene a λ_j (que es abierta), supongamos primero que $\lambda_j \neq \{\infty\}$. Tomamos $0 < r < \mathrm{dist}(\lambda_j, K)$ tal que $B_r(\lambda_j) \subset V_j$. Como para cada $z \in B_r(\lambda_j)$ fijo se tiene $|z - \lambda_j| < r < |w - \lambda|$ para todo $w \in K$, calculamos

$$\frac{1}{w-z} = \lim_{N\to\infty} q_n(z,w) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(z-\lambda_j)^n}{(w-\lambda_j)^{n+1}},$$

este límite es uniforme en $w \in K$. Cada una de las funciones del lado derecho está en el subespacio S (recordemos que z está fijo), luego su integral respecto de μ es nula. Pero entonces

$$h(z) = \int_K \frac{d\mu(w)}{w-z} = \int_K \lim_{N\to\infty} q_n(z,w)\, d\mu(w) = \lim_{N\to\infty} \int_K q_n(z,w)\, d\mu(w) = 0$$

en $B_r(\lambda_j)$, y por el principio de identidad para funciones holomorfas en un abierto conexo, debe ser $h \equiv 0$ en V_j.

Si $\lambda_j = \{\infty\}$, tomamos $r > 0$ tal que $|z| > r$ implique $z \in V_j$, $|z| > |w|$ para todo $w \in K$, y calculamos

$$\frac{1}{w-z} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} z^{-n-1} w^n,$$

este límite también es uniforme para $w \in K$. Nuevamente, las funciones del lado derecho están en S (pues tienen un polo de orden n en $\lambda_j = \{\infty\}$) y repitiendo la cuenta de recién, se deduce que $h(z) = 0$ si $|z| > r$. Nuevamente por el principio de identidad, debe ser h nula en toda la componente del infinito. Hemos probado que h es nula en $S^2 \setminus K$. En particular, si $\gamma \subset \Omega \setminus K$ es una curva simple y suave orientada positivamente, h se anula en γ.

Para terminar la demostración, ahora calculamos

$$\begin{aligned}\int_K f(z)\,d\mu(z) &= \int_K \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw\,d\mu(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(w)\int_K \frac{d\mu(z)}{w-z}\,dw \\ &= \frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma f(w)h(w)dw = 0\end{aligned}$$

donde el intercambio de integrales está justificado porque estamos integrando funciones continuas, respecto de medidas finitas, en un conjunto compacto. □

Corolario 2.25 (Teorema de Stone-Weierstrass). *Sea $K \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ y f holomorfa en Ω. Si $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ es conexo, entonces existe una sucesión de polinomios p_n que converge uniformemente a f en K.*

Demostración. Basta tomar $\lambda_0 = \{\infty\}$ en el teorema de Runge, y la sucesión de funciones racionales sólo tiene polos en $\{\infty\}$, en consecuencia, deben ser polinomios. □

2.6. Ejercicios

En esta sección de ejercicios, E denota un espacio vectorial localmente convexo y $p_\alpha(\cdot) = \|\cdot\|_\alpha, \alpha \in I$, denota una familia de seminormas que define la topología de E. Además E_ω denota E con la topología débil.

1. Sea $A \subset E$, y $(\mu_n)_n \subset \mathbb{K}$ tal que $\mu_n \to 0$. Entonces

   a) A es acotado si y solo si para toda sucesión $(x_n)_n \subset A$, $\mu_n x_n \to 0$ en E.

   b) El único subespacio acotado de E es $S = \{0\}$.

2. Sea $x \in E$ metrizable, d la métrica inducida por las seminormas. Probar que

   a) $d(nx, 0) \leqslant nd(x, 0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

   b) si $x_n \to 0$ en E, $\exists$ una sucesión $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim_n \lambda_n = +\infty$ y $\lambda_n x_n \to 0$,

   c) $f : E \to \mathbb{K}$ lineal, es continua si y solo si manda conjuntos acotados en conjuntos acotados, "f es acotada".

3. Sean E, F localmente convexos, sea $B : E \times F \to \mathbb{K}$ bilineal.

a) B es continua si y solo si existen p seminorma continua en E (resp. q seminorma continua en F) tales que $|B(x,y)| \leqslant p(x)q(y)$ para todo $x \in E, y \in F$.

b) Si $E = F = c_{(0)}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$, $B(x,y) = \sum_n x_n y_n$, entonces B es continua en cada variable pero no es continua.

4. Sea $S \subset E$ subespacio no denso. Entonces existe $\varphi \in E'$, $\varphi \neq 0$ tal que $\varphi\,|_S \equiv 0$ *(sug.: usar el ejercicio del cociente de la guia 1)*.

5. Sea $(x_i)_i \subset E$. Un punto y_0 está en la clausura del subespacio generado por los x_i si y sólo si $\forall \varphi \in E'$ que verifique que $\varphi(x_i) = 0\ \forall i$, vale que $\varphi(y_0) = 0$.

6. a) Sea E normado con E' es separable, probar que E es separable *(sug.: si $(\varphi_n)_n$ es denso en E', tomar $x_n \in B_E$ tal que $|\varphi_n(x_n)| \geq 1/2\|\varphi_n\|$ y ver que el subespacio generado es denso en E).*

   b) Dar un ejemplo de E normado separable tal que E' no sea separable.

7. Si $\varphi, \psi \in E'$ son tales que $\varphi\psi \equiv 0$, entonces $\varphi \equiv 0$ ó $\psi \equiv 0$.

8. Si $S \subset E$ es subespacio cerrado, y tiene dimensión o codimensión finita, es complementado (con suplemento cerrado).

9. Si $S \subset E$, el *anulador* de S es el conjunto $S^\perp = \{\varphi \in E' : \varphi(x) = 0\ \forall x \in S\}$. Si S es subespacio, probar que $\overline{S} = \cap\{\ker(\varphi) :\ \varphi \in S^\perp\}$.

10. Probar que si $C \subset E$ es convexo y cerrado, entonces

$$C = \cap_{\varphi\in E'} S_\varphi(C) = \cap_{\varphi\in E'}\{x \in E : \mathrm{Re}\varphi(x) \leqslant \sup_{c\in C} \mathrm{Re}\varphi(c)\},$$

es decir, C es la intersección de todos los semiespacios que lo soportan.

11. Sea $x \in E$ un espacio normado, $\varphi \in E'$, $\|\varphi\| = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Probar que:

   a) Si $y \in E$, entonces $|\varphi(y)| = \mathrm{dist}(y, \ker\varphi)$.

   b) Si $H = \{y \in E : \mathrm{Re}\,\varphi(y) = \lambda\}$ entonces $\mathrm{dist}(x,H) = |\mathrm{Re}\,\varphi(x) - \lambda|$ *(sug: dado $\varepsilon > 0$, considerar $h = x - (Re\,\varphi(x) - \lambda)\, x_0\, \varphi(x_0)^{-1}$, donde $x_0 \in E$ es unitario tal que $\varphi(x_0) > 1 - \varepsilon$).*

   c) Sea $C \subset E$ convexo tal que H separa x de C, entonces $\mathrm{dist}(x,H) \leqslant \mathrm{dist}(x,C)$.

12. Sea $C \subset E$ convexo en E normado, $x \notin \overline{C}$, $B = \{b \in E : \|b - x\| < \mathrm{dist}(x,C)\}$, $\varphi \in B_{E'}$ que separa B de C, $\lambda = \sup_{c\in C} \mathrm{Re}\,\varphi(c)$, H como en el ejercicio anterior.

   a) Probar que $\mathrm{dist}(x,C) = \mathrm{dist}(x,H)$ *(sug: para todo entorno de $h \in H$ existen puntos a ambos lados de H).*

   b) Si $c_0 \in C$ es *minimizante* (verifica $\|x - c_0\| = \mathrm{dist}(x,C)$) entonces $\mathrm{Re}\,\varphi(c_0) = \lambda$.

13. Sea $C \subset E$ normado con C convexo y $x \notin \overline{C}$. Entonces

a) $c_0 \in C$ es minimizante para x si y solo si existe $\varphi \in E'$ tal que

$$\varphi(x - c_0) = \|x - c_0\| \;\wedge\; \operatorname{Re}\varphi(c_0) = \sup \operatorname{Re}\varphi(C).$$

b) Si C es un subespacio, entonces $\varphi \in C^{\perp} = \{\psi \in E' : \psi(c) = 0 \ \forall c \in C\}$ y además

$$\operatorname{dist}(x, C) = \max \operatorname{Re}\psi(x) = \max |\psi(x)|$$

donde el máximo se toma sobre $\{\psi \in C^{\perp} : \|\psi\| = 1\}$.

14. Sean $f \in L^p(X, \mu)$ con $1 < p < \infty$ y S un subespacio.

    a) $g_0 \in S$ realiza la distancia a $f \iff \int_X g\,|f - g_0|^{p-1}\,\overline{\operatorname{sgn}(f - g_0)}\,d\mu = 0$ para toda $g \in S$.

    b) f es *p-ortogonal* a S (o sea $\|f\|_p = \operatorname{dist}(f, S)$) $\Leftrightarrow \int_X g\,|f|^{p-1}\,\overline{\operatorname{sgn} f}\,d\mu = 0$ para toda $g \in S$.

15. Si $x \in E$ normado entonces la norma se alcanza con una funcional del dual,

$$\|x\| = \max\{|f(x)| : f \in E',\ \|f\| = 1\}.$$

16. Sea E un espacio normado y $S \subset E$ un subespacio. Sean $x_0 \notin \overline{S}$ y denotemos $d = \inf_{y \in S} \|x_0 - y\| > 0$. Probar que existe $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x_0) = 1, \|\varphi\| = 1/d, \varphi\,|_S \equiv 0$.

17. Probar que existe una funcional lineal continua $\varphi : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ con $\|\varphi\| = 1$ tal que:

    a) Si $x \in \ell^\infty$ y $T(x) = (x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots)$, entonces $\varphi(x) = \varphi(Tx)$.

    b) Si $x \in c$, entonces $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$.

    c) Si $x \in \ell^\infty$ y $x_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces $\varphi(x) \geq 0$.

    Sug.: definir φ en el subespacio $S \oplus \langle(1, 1, \ldots, 1, \ldots)\rangle$, $S = \{x - T(x) : x \in \ell^\infty\}$.

18. Sea E un espacio normado reflexivo, $\varphi \in E'$, $S \subset E'$ subespacio cerrado propio.

    a) Probar que $\exists x \in E, x \neq 0 \ / \ \varphi(x) = \|\varphi\|\,\|x\|$.

    b) $\exists x \in {}^{\perp}S = \{x \in E : \varphi(x) = 0, \forall \psi \in S\}$, $\|x\| = 1 \ / \ \varphi(x) = \operatorname{dist}(\varphi, S)$.

19. *a)* Si $f_1, \ldots, f_n, f : E \to \mathbb{C}$ son lineales y $\cap_{i=1}^n \ker(f_i) \subset \ker(f)$, entonces $f \in \langle\{f_i\}_i\rangle$.

    b) Si $f : E' \to \mathbb{C}$ es lineal y ω^*-continua, entonces $\exists x \in E$ tq $f(\varphi) = \varphi(x) \ \ \forall \varphi \in E'$.

20. Sean $x_i, x \in E$. Probar que si $x_i \to x$ entonces $x_i \xrightarrow{\omega} x$, y que si $\dim E < \infty$, entonces ambas convergencias son equivalentes.

21. Sean $\varphi_i, \varphi \in E'$. Entonces $\varphi_i \to \varphi \Rightarrow \varphi_i \xrightarrow{\omega} \varphi \Rightarrow \varphi_i \xrightarrow{\omega^*} \varphi$, y si $\dim E < \infty$, las tres convergencias son equivalentes.

22. Sea $C \subset E$ convexo. Probar que:

a) $\overline{C} = \overline{C}^{\omega}$, donde el último denota la clausura débil de C.

b) Si $x_n \xrightarrow{\omega} x$ entonces existe una sucesión de combinaciones convexas de $\{x_n\}$ que tiende fuertemente a x.

c) Si C es balanceado y tiene interior no vacio, entonces $0 \in \text{int}(C)$. *Sug.: probar que* $^1\!/_2W \subset C$ *es entorno de* 0 *si* $x_0 + W \subset C$ *es entorno de* x_0.

23. Probar que si E_ω admite una norma continua, entonces $\dim E < \infty$.

24. Sea $B = \bigcap_\alpha \{x \in E : \|x\|_\alpha < 1\} \subset E$.

    a) Probar que B es convexo, balanceado, y que es acotado en E_ω.

    b) Probar que si E tiene dimensión infinita, B tiene interior vacío en E_ω. *En particular, la bola de un normado de dimensión infinita tiene interior vacío en la topología débil.*

25. Si $1 \leqslant p < \infty$, en ℓ^p, sea e^n dado por $(e^n)_k = \delta^n_k$. Probar que:

    a) Si $1 < p < \infty$, $e^n \xrightarrow{\omega} 0$, $e^n \not\longrightarrow 0$.

    b) Si $p = 1$, $e^n \xrightarrow{\omega^*} 0$, $e^n \overset{\omega}{\not\longrightarrow} 0$, $e^n \not\longrightarrow 0$.

26. Sean $1 < p < \infty$, $x^n, x \in \ell^p$. Entonces $x^n \xrightarrow{\omega} x \Leftrightarrow \sup_n \|x^n\|_p < \infty \wedge \lim_{n\to\infty} x^n_k = x_k \ \forall k$.

27. a) Si $1 < p < \infty$, $\varphi_n, \varphi \in L^p[0,1]$. Entonces $\varphi_n \xrightarrow{\omega} \varphi$ si y solo si

$$\sup_n \|\varphi_n\|_p < \infty \ \wedge \ \int_0^a \varphi_n(t)\, dt \to \int_0^a \varphi(t)\, dt \quad \forall a \in [0,1].$$

    b) Si $\varphi_n(t) = \sin(n\pi t) \in L^2[0,1]$, probar que $\varphi_n \xrightarrow{\omega} 0$ pero $\varphi_n \not\longrightarrow 0$.

28. $C[0,1]$ es cerrado en $L^\infty[0,1]$ en $\| \ \|_\infty$ pero no en la topología ω^*.

29. Si $T \subset E'$, el *preanulador* de T es el conjunto ${}^\perp T = \{x \in E : \varphi(x) = 0 \ \forall \varphi \in T\}$. Si T es subespacio probar que $({}^\perp T)^\perp = \overline{T}$, donde la clausura es en la topología ω^*.

30. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\varphi_n : c_0 \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi_n(x) = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.

    a) Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \in c_0'$ y calcular su norma.

    b) Probar que $\varphi_n \overset{\omega^*}{\to} 0$ y que $\varphi_n \overset{\omega}{\nrightarrow} 0$.

    c) $c_0 \supset {}^\perp\langle\{\varphi_1\}\rangle \supset {}^\perp\langle\{\varphi_1, \varphi_2\}\rangle \supset \ldots \supset {}^\perp\langle\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}\rangle$ y son todos isométricamente isomorfos entre sí. ¿Ocurre lo mismo con ${}^\perp\langle\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty\rangle$?

3. Espacios normados

El arte de hacer matemática consiste en encontrar ese caso especial que contiene todos los gérmenes de la generalidad.

D. Hilbert

En este capítulo estudiaremos en más detalle la teoría de espacios normados, con énfasis en la teoría de operadores lineales entre espacios normados.

3.1. Espacio dual y doble dual

Según vimos en el primer capítulo (Lema 1.47), toda funcional lineal continua $\varphi : E \to \mathbb{K}$ en un espacio normado E tiene una norma, lo que hace del espacio dual E' un espacio normado.

Proposición 3.1. *Si E es normado, E' es un espacio de Banach con la norma*

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in B_E\}$$

para $\varphi \in E'$.

Demostración. Que el número asi definido es finito es consecuencia de la continuidad de φ. Es fácil ver que se trata de una norma. Veamos entonces que E' es completo. Para eso tomamos una sucesión $(\varphi_n)_n \subset E'$ de Cauchy, observamos que la sucesión $(\|\varphi_n\|)_n$ es acotada en $\mathbb{R}$, en particular para cada $x \in E$ la sucesión $(\varphi_n(x))_n \subset \mathbb{K}$ es de Cauchy, definimos $\varphi(x) = \lim_n \varphi_n(x)$. Claramente $\varphi : E \to \mathbb{K}$ es lineal. Además

$$|\varphi(x)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x)| \leqslant \varepsilon + M\|x\|$$

si $n \geq n_0 = n_0(x)$. Esto prueba que φ es continua pues es acotada. Por otra parte, para cada $x \in B_E$,

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leqslant \|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon$$

si $n, m \geq n_0$. Haciendo tender $m \to +\infty$, deducimos que $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon$ si $n \geq n_0$. Tomando supremo sobre B_E se deduce que $\|\varphi_n - \varphi\| \leqslant \varepsilon$ si $n \geq n_0$, luego $\varphi_n \xrightarrow{n} \varphi$ en E'. □

Con la misma demostración, tenemos que

Proposición 3.2. *Sean E, F normados con F de Banach. Entonces $\mathcal{L}(E, F)$ es un espacio de Banach.*

Lema 3.3 (La inclusión canónica en el doble dual es isométrica). *La aplicación $J_E : E \to E''$ dada por $J_E(x)(\varphi) = \varphi(x)$ para $x \in E$, $\varphi \in E'$ se denomina inclusión canónica de E en su doble dual. Este operador es lineal e isométrico: $\|J_E(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$.*

Demostración. Claramente J es lineal y además $|J(x)(\varphi)| = |\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\| \|x\|$, luego $\|J(x)\| \leqslant \|x\|$. Pero como

$$\|x\| = \text{máx}\{|\varphi(x)| : \varphi \in E', \|\varphi\| = 1\} \tag{3.1}$$

(por el Teorema de Hahn-Banach, Ejercicio 15 Sección 2.6), entonces tenemos $\|x\| = \|J(x)\|$ para todo $x \in E$. □

Espacios reflexivos

§ Diremos que un espacio normado es *reflexivo* si $J : E \to E''$ es sobreyectiva. En este caso, como E'' siempre es completo, y J es una isometría, tiene una inversa que es una isometría y se deduce que E es necesariamente completo.

Proposición 3.4. *Sea $S \subset E$ subespacio cerrado de un espacio de Banach reflexivo. Entonces S, como espacio de Banach, es reflexivo.*

Demostración. Consideramos $S' = \{\varphi : S \to \mathbb{K}, \varphi$ lineal y continua $\}$, y definimos $S'' = (S')'$. Lo que el lema afirma es que si consideramos $J_S : S \to S''$ dada de la manera habitual por la isometría $J_S(x)(\varphi) = \varphi(x)$ para $x \in S, \varphi \in S'$, entonces J_S es sobreyectiva. Tomemos entonces $\psi \in S''$, es decir $\psi : S' \to \mathbb{K}$ lineal y continua. Definimos $\hat{\psi} = \psi(\varphi|_S)$ para $\varphi \in E'$. Entonces

$$|\hat{\psi}(\varphi)| \leqslant \|\psi\| \|\varphi|_S\| \leqslant \|\psi\| \|\varphi\|$$

lo que prueba que $\hat{\psi} \in E''$. Como E es reflexivo, se tiene $\hat{\psi} = J_E(x)$ para algún $x \in E$. Afirmamos que $x \in S$, en caso contrario existe $\varphi_0 \in E'$ tal que $\varphi_0|_S = 0$, $\varphi_0(x) \neq 0$. Pero entonces

$$0 = \psi(0) = \psi(\varphi_0|_S) = \hat{\psi}(\varphi_0) = J_E(x)(\varphi_0) = \varphi_0(x) \neq 0$$

y esto es absurdo. Entonces si $\mu \in S'$, la extendemos a una funcional $\varphi \in E'$ y se tiene

$$\psi(\mu) = \hat{\psi}(\varphi) = J_E(x)(\varphi) = \varphi(x) = \mu(x) = J_S(x)(\mu),$$

lo que prueba que $\psi = J_S(x)$ para un cierto $x \in S$. □

Lema 3.5. *Si E es reflexivo, entonces E' es reflexivo, y además para toda $f \in E''' = (E')''$ se tiene $J_{E'} \circ f \circ J_E = f$.*

Demostración. Sea $f \in (E')'' = (E'')' = (J(E))'$. Dada $\psi \in E''$, existe $x \in E$ tal que $\psi = J(x)$, luego definiendo $\varphi = f \circ J \in E'$ se tiene

$$J_{E'}(\varphi)(\psi) = \psi(\varphi) = J(x)(\varphi) = \varphi(x) = f(J(x)) = f(\psi),$$

esto es, $J_{E'}(\varphi) = f$. □

3.2. Completación

En esta sección estudiaremos la noción de *completación* de un espacio normado, y veremos como restringir y como extender operadores lineales con respecto a esta completación. La idea central es obtener un espacio de Banach donde el espacio normado original sea un subespacio denso, el espacio de Banach se define como las clases de equivalencia de las sucesiones de Cauchy del espacio normado original.

Necesitamos dos observaciones elementales antes de proseguir:

Observación 3.6. Sean $Y \subset X$ subespacio denso en X normado, sea F e.v.t.

Si $A, B \in \mathcal{L}(X, F)$ y $A = B$ en Y, entonces $A = B$ en X.

Si para toda sucesión $(y_n)_n \subset Y$ de Cauchy, existe un límite $x \in X$, entonces X es completo.

Teorema 3.7 (Completación). *Sea E normado. Entonces existe $\widetilde{E}$ espacio de Banach tal que $E \overset{i}{\hookrightarrow} \widetilde{E}$ con i lineal, isométrica y densa. Además*

1. *Si F es normado y $T \in \mathcal{L}(E, F)$, existe una única extensión $\widetilde{T} : \widetilde{E} \to \widetilde{F}$ que verifica $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.*
2. *Recíprocamente todo $A \in \mathcal{L}(\widetilde{E}, \widetilde{F})$ se restringe a un operador $T = A|_E$ de manera continua e isométrica.*
3. *$\widetilde{E}$ es único salvo isomorfismos isométricos.*

Demostración. Consideramos la relación entre sucesiones de Cauchy en E, $(x_n)_n \simeq (y_n)_n$ cuando $\lim_n x_n - y_n = 0$. Esta resulta una relación de equivalencia. Definimos $\widetilde{E}$ como el conjunto de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en E, y denotamos la clase de equivalencia de $(x_n)_n$ como $[x_n]$. Le damos a $\widetilde{E}$ estructura de espacio vectorial de la única manera razonable,

$$[x_n] + [y_n] = [x_n + y_n], \qquad \lambda[x_n] = [\lambda x_n],$$

es fácil ver que las operaciones están bien definidas. Por otro lado, si $(x_n)_n$ es de Cauchy, también lo es $(\|x_n\|)_n$, luego tiene límite. Definimos

$$\|[x_n]\| = \lim_n \|x_n\|,$$

también está bien definida pues $\|x_n\| \leqslant \|x_n - y_n\| + \|y_n\|$ y viceversa. Para cada $x \in E$, consideramos la sucesión constante $[x] = [(x, x, \cdots)]$ y definimos $i : E \to \widetilde{E}$ como $i(x) = [x]$, que es claramente lineal. Se tiene

$$\|i(x)\| = \|[x]\| = \lim_n \|x\| = \|x\|,$$

luego i es una isometría. Por otra parte, dado $[x_n] \in \widetilde{E}$ y $\varepsilon > 0$, sea n_0 tal que $\|x_n - x_{n_0}\| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$, luego

$$\|[x_n] - i(x_{n_0})\| = [(x_1 - x_{n_0}, x_2 - x_{n_0}, \dots, x_n - x_{n_0}, \dots)] = \lim_n \|x_n - x_{n_0}\| \leqslant \varepsilon$$

lo que prueba que $i(E)$ es denso en $\widetilde{E}$ (el límite existe pues si $(x_n)_n$ es de Cauchy, también lo es $(x_n - x_{n_0})_n$ y por ende también lo es $(\|x_n - x_{n_0}\|)_n$, así que es convergente). Ahora tomemos $[x]^j \in i(E)$, $j \in \mathbb{N}$, sucesión de Cauchy en $\widetilde{E}$. Para cada j, es una sucesión constante de E, esto es existe $x_j \in E$ tal que

$$[x]^j = [(x_j, x_j, \dots)].$$

Consideramos $(x_n)_n \subset E$, se tiene

$$\|x_n - x_j\| = \|i(x_n - x_j)\| = \|i(x_n) - i(x_j)\| = \|[x]^n - [x]^j\| < \varepsilon$$

si $n, j \geq N$ pues $([x]^j)_j$ es de Cauchy en $\widetilde{E}$. Luego $(x_n)_n$ es de Cauchy en E y tomamos $z = [x_n] \in \widetilde{E}$. Ahora para cada j fijo, $(x_n - x_j)_n$ es de Cauchy en E así que

$$\|z - [x]^j\| = [x_1 - x_j, x_2 - x_j, \dots, x_n - x_j, \dots)] = \lim_n \|x_n - x_j\| \leqslant \varepsilon$$

si $j \geq N$, lo que prueba que $[x]^j \xrightarrow{j} z$ en $\widetilde{E}$. Por la observación previa al teorema, aplicada a $Y = i(E)$, $X = \widetilde{E}$, concluimos que $\widetilde{E}$ es completo.

Ahora supongamos que $T \in \mathcal{L}(E, F)$, y supongamos primero que F es completo. Entonces definimos $\widetilde{T}[x_n] = \lim_n Tx_n$, el límite existe pues $\|Tx_n - Tx_m\| \leqslant \|T\|\|x_n - x_m\|$, y estamos suponiendo que $(x_n)_n \subset E$ es de Cauchy, y que F es completo. Es fácil ver que esta extensión el lineal, pero además

$$\|\widetilde{T}[x_n]\| = \|\lim_n Tx_n\| = \lim_n \|Tx_n\| \leqslant \|T\| \lim_n \|x_n\| = \|T\| \|[x_n]\|,$$

luego $\|\widetilde{T}\| \leqslant \|T\|$ y en particular $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(\widetilde{E}, F)$. Por otro lado, como $i(E) \subset \widetilde{E}$, tenemos

$$\|\widetilde{T}\| = \sup_{\|[x_n]\|=1} \|\widetilde{T}[x_n]\| \geqslant \sup_{\|[x]\|=1} \|\widetilde{T}[x]\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \|T\|,$$

luego $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. Ahora volviendo al caso general, tomamos $F \overset{i_F}{\hookrightarrow} \widetilde{F}$ su completación, y consideramos, dado $T \in \mathcal{L}(E, F)$, el operador $i_F \circ T$. Este operador tiene una extensión como la que recién construimos a $\widetilde{E}$, pero como i_F es una isometría también se tiene $\|T\| = \|\widetilde{T}\|$.

Por otro lado, si A es un operador lineal acotado entre las completaciones, $T = A|_E$ es un operador lineal acotado en E, y si lo extendemos a $\widetilde{T}$ con el procedimiento anterior, la observación previa al teorema nos dice que $\widetilde{T} = A$, luego $\|T\| = \|\widetilde{T}\| = \|A\|$ donde la primera igualdad es porque extender es isométrico.

Por último, si $E \overset{j}{\hookrightarrow} X$ con X Banach, y j es isométrica y densa, la podemos extender isométricamente $\widetilde{j} : \widetilde{E} \to X$. Como j es densa, es fácil ver que $\widetilde{j}$ es sobreyectiva, por otro lado $\widetilde{j}$ también es isométrica luego $\widetilde{j}$ es un isomorfismo isométrico entre $\widetilde{E}$ y X. □

Corolario 3.8. *Si E es normado entonces $E' = (\widetilde{E})'$.*

Demostración. Como $F = \mathbb{K}$ es completo, toda $\varphi \in E'$ se extiende isométricamente a $\widetilde{E}$, y recíprocamente toda funcional continua en la completación se restringe isométricamente a E. □

§ Si $E \subset X$ de manera densa y X es Banach, entonces X es isométricamente isomorfo a la completación de E.

Por ejemplo $c_{(0)} \subset c_0$ de manera densa con $\|\cdot\|_\infty$, luego c_0 puede pensarse como la completación de $c_{(0)}$. Y por el corolario, $c'_{(0)} = c'_0 = \ell^1$.

Observación 3.9 (Completaciones en otros contextos).

1. Con una prueba similar, si X, Y son espacios métricos, podemos construir la completación de ambos, y toda $f : X \to Y$ que sea Lipschitz se extiende de manera única a $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$, y resulta Lipschitz con la misma constante.
2. También, si E, F son espacios localmente convexos con base numerable, la construcción se adapta para construir las completaciones de ambos y podemos extender y restringir operadores acotados $T : E \to F$ (lineales y continuos).
3. Para completar un e.v.t. que no tiene base numerable, no alcanza con tomar sucesiones de Cauchy, y la construcción requiere la noción de *ultrafiltro*, que no utilizaremos en estas notas.

3.3. Espacios de Hilbert

Recordemos que un espacio de Hilbert es un espacio con producto interno E que es completo, y que supondremos que el producto interno es lineal en la primera variable y anti-lineal en la segunda:

$$\langle \alpha x, \beta y\rangle = \alpha\overline{\beta}\langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

(en particular si $K = \mathbb{R}$, el producto interno es bilineal).

Invocando el Teorema 3.7, tenemos:

Teorema 3.10 (Completación de un pre-Hilbert). *Si E es un espacio con producto interno, entonces $H = \widetilde{E}$ es un espacio de Hilbert con*

$$\langle [x_n], [y_n]\rangle = \lim_n \langle x_n, y_n\rangle.$$

Además el producto interno se puede recuperar de la norma $\|[x_n]\| = \lim_n \|x_n\|$ mediante la identidad de polarización (1.3) en H.

3.3.1. Proyecciones

Lema 3.11. *Si $S \subset H$ es un subespacio de un espacio de Hilbert, $y \in H$ es tal que $\|y\| \leqslant \|y - s\|$ para todo $s \in S$, entonces $y \perp S$.*

Demostración. Elevando al cuadrado, cancelando $||y||^2$ y reemplazando s por ts ($t \in \mathbb{R}$), obtenemos

$$0 \leqslant t^2||s||^2 - 2t\mathrm{Re}\langle y, s\rangle \qquad \forall s \in S.$$

Si $t > 0$, dividimos por t y hacemos $t \to 0^+$ para obtener $0 \leqslant -2\mathrm{Re}\langle y, s\rangle$, cambiando s por $-s$ obtenemos que $\mathrm{Re}\langle y, s\rangle = 0$ para todo $s \in S$. Cambiando s por is la parte imaginaria también debe ser nula, con lo cual $\langle y, s\rangle = 0$ para todo $s \in S$. □

Como S es cerrado y convexo en H completo, podemos usar existencia y unicidad de elemento minimizante $P_S(x) = s_0$ (Ejercicio 7 Sección 1.5). Notemos que si $s \in S$, $P_S(s) = s$ por unicidad.

Corolario 3.12. *Sea $S \subset H$ subespacio cerrado, H Hilbert, denotamos $P_S : H \to S$ a la proyección al elemento minimizante. Entonces*

1. *$x - P_S(x) \in S^\perp$ para todo $x \in H$.*
2. *$H = S \oplus S^\perp$*
3. *$P = P_S : H \to H$ es lineal y acotado.*
4. *$P^2 = P$ (P es idempotente), $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$ para todo $x, y \in H$ (P es autoadjunto), y si $S \neq \{0\}$, entonces $||P|| = 1$.*

Demostración. Sea $y = x - P_S(x)$, entonces como $||x - P_S(x)|| \leqslant ||x - s||$ para todo $s \in S$ (pues $P_S(x)$ es minimizante), llamando $s' = P_S(x) - s$ tenemos $||y|| \leqslant ||y - s'||$ para todo $s' \in S$, luego $y = x - P_S(x) \in S^\perp$.

Si $x \in H$, escribimos $x = P_S(x) + x - P_S(x)$, luego $H = S + S^\perp$; pero si $x \in S \cap S^\perp$ entonces $||x||^2 = \langle x, x\rangle = 0$, luego $x = 0$, asi que $H = S \oplus S^\perp$.

Escribimos $x = s + v$, $y = s' + v'$ con $s, s' \in S$, $v, v' \in S^\perp$, y como $\lambda x = \lambda s + \lambda v$, y $\lambda s \in S$, $\lambda v \in S^\perp$, por la unicidad de la descomposición debe ser $P(\lambda x) = \lambda P(x)$. Similarmente $x + y = s + s' + v + v'$ y entonces $P(x + y) = s + s' = P(x) + P(y)$. Ahora si $s \in S$ entonces $Ps = s$, y como $Px \in S$ para todo $x \in H$, debe ser $P(P(x)) = P(x)$, es decir $P^2 = P$. Además $||Px||^2 = ||s||^2 \leqslant ||s||^2 + ||v||^2 = ||x||^2$ luego $||Px|| \leqslant ||x||$ para todo $x \in E$ y en particular P es acotado. Además si existe $0 \neq s \in S$, entonces $||Ps|| = ||s||$ luego $||P|| = 1$. Por último

$$\langle Px, y\rangle = \langle s, s' + v'\rangle = \langle s, s'\rangle = \langle s + v, s'\rangle = \langle x, Py\rangle,$$

lo que prueba que P es autoadjunto. □

3.3.2. Identidad de Bessel y existencia de bases ortonormales

Recordemos que una base ortonormal es un conjunto ortonormal cuyo subespacio generado es denso en H.

Teorema 3.13 (Bessel). *Si $\{e_n\}_n \in H$ es una b.o.n., para todo $x \in H$ se tiene*

$$x = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

y además

$$\|x\|^2 = \sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

Demostración. Dado $x \in H$, tomamos $\alpha_n = \langle x, e_n \rangle$, se tiene que $(\alpha_n)_n \in \ell^2$ por la desigualdad de Parseval (Lema 1.49). Sea $y = \sum_n \alpha_n e_n$, queremos ver que $x = y$. Para ello notemos que

$$\langle x - y, e_n \rangle = \alpha_n - \alpha_n = 0 \quad \forall n,$$

luego $x - y \perp S = \langle e_n \rangle_n$. Pero como S es denso, existe $d_j \in S$ tal que $d_j \xrightarrow{j} x - y$. Entonces

$$\|x - y\|^2 + \|d_j\|^2 = \|x - y - d_j\|^2 \xrightarrow{j} 0,$$

y esto solo es posible si $\|x - y\| = 0$. □

Teorema 3.14 (Existencia de bases ortonormales numerables). *Sea H Hilbert separable, entonces tiene una base ortonormal numerable.*

Demostración. Si $\{x_n\}_n$ es un denso numerable, el subespacio generado por los x_n también es denso, y podemos descartar elementos hasta obtener un conjunto linealmente independiente $\{y_n\}_n$ que genere el mismo subespacio, luego también es denso. Ahora aplicamos el método de Gram-Schmidt a este conjunto para obtener un conjunto ortonormal $\{e_n\}_n$, el subespacio generado también es denso. □

Corolario 3.15 (Toda base ortonormal de un subespacio se completa a una de H). *Si $S \subset H$ es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert separable, entonces existen bases ortonormales $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$, $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset S^\perp$ tales que todo $x \in H$ se descompone como*

$$x = \sum_n \alpha_n s_n + \sum_k \beta_k v_k,$$

y además $P_S x = \sum_n \alpha_n s_n$.

3.3.3. Teoremas de representación de Riesz

Dado H espacio de Hilbert, veremos que toda funcional lineal se representa por un elemento de H, y toda funcional bilineal se representa por un operador acotado en H.

§ Dado $y \in H$, la funcional $\varphi_y = \langle \cdot, y \rangle$ es lineal y continua ($\varphi_y \in H'$) y además $\|\varphi_y\| = \|y\|$ ya que la norma de φ_y se alcanza en $\frac{y}{\|y\|}$.

Tenemos entonces una aplicación isométrica $j : H \to H'$ que es anti-lineal e isométrica (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es lineal). Veremos que esta aplicación es biyectiva.

Teorema 3.16 (Teorema de representación de Riesz para formas lineales). *Sea $\varphi \in H'$, entonces existe un único $y_\varphi \in H$ tal que $\varphi = \langle \cdot, y_\varphi \rangle$, y además $\|\varphi\| = \|y_\varphi\|$. Al anti-isomorfismo isométrico $R(\varphi) = y_\varphi$ se lo denomina mapa de Riesz.*

Demostración. Sea $S = \ker \varphi$, si $S = H$ es porque $\varphi = 0$, tomamos $y_\varphi = 0$. En caso contrario, S es un subespacio cerrado propio, tomamos $y_0 \in S^\perp$ de norma unitaria y definimos

$$y_\varphi = \overline{\varphi(y_0)} y_0.$$

Descomponemos $x \in H$ como $x = s + \lambda y_\varphi$, notamos que $\varphi(x) = 0 + \lambda \varphi(y_\varphi) = \lambda |\varphi(y_0)|^2$ pues φ es $\mathbb{K}$ lineal. Por otro lado,

$$\langle x, y_\varphi \rangle = 0 + \lambda \langle y_\varphi, y_\varphi \rangle = \lambda \|y_\varphi\|^2 = \lambda |\varphi(y_0)|^2.$$

Esto prueba que $\varphi = \langle \cdot, y_\varphi \rangle$ y por la observación previa, tienen la misma norma. La unicidad queda a cargo del lector. □

§ Dada $\beta : H \times H \to \mathbb{K}$, decimos que β es *sesquilineal* si es lineal en su primera variable y antilineal en la segunda (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se trata simplemente de una función bilineal). El primer ejemplo de esto es el producto interno de H.

Teorema 3.17 (Teorema de representación de Riesz para formas bilineales). *Sea $\beta : H \times H \to \mathbb{K}$ sesquilineal y acotada, esto es*

$$\|\beta\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\beta(x, y)| < \infty.$$

Existe entonces un único $T \in \mathcal{L}(H)$ tal que

$$\beta(x, y) = \langle x, Ty \rangle \qquad \forall x, y \in H,$$

$\|T\| = \|\beta\|$, y T es autoadjunto si y solo si $\overline{\beta(x, y)} = \beta(y, x)$.

Demostración. Para cada $y \in H$, sea $\varphi(x) = \beta(x, y)$, como φ es lineal y $|\varphi(x)| \leqslant \|\beta\| \, \|x\| \, \|y\|$, se tiene $\varphi \in H'$, luego existe un único $z = T(y) \in H$ tal que

$$\beta(x, y) = \varphi(x) = \langle x, z \rangle = \langle x, Ty \rangle \qquad \forall x \in H.$$

Veamos primero que T es lineal. Para ello, calculamos, para cada $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\langle x, T(\lambda y) \rangle = \beta(x, \lambda y) = \overline{\lambda} \beta(x, y) = \overline{\lambda} \langle x, Ty \rangle = \langle x, \lambda Ty \rangle.$$

Como esto vale para todo $x \in H$, se tiene $T(\lambda y) = \lambda Ty$ para todo $y \in H, \lambda \in \mathbb{K}$. Con un argumento similar se obtiene que T es aditivo. Ciertamente, para cada $y \in H$,

$$\|Ty\|^2 = \langle Ty, Ty \rangle = |\beta(Ty, y)| \leqslant \|\beta\| \, \|Ty\| \, \|y\|,$$

luego $\|Ty\| \leqslant \|\beta\| \, \|y\|$ y en particular T es acotado. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|y\|=1} \|Ty\| = \sup_{\|y\|=1} \sup_{\varphi \in H', \|\varphi\|=1} |\varphi(Ty)| = \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y\|=1} |\langle Ty, x \rangle| \\ &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\beta(x,y)| = \|\beta\|, \end{aligned}$$

donde la tercera igualdad es consecuencia del Teorema de Representación de Riesz para formas lineales. De la definición es evidente que T es autoadjunto si y solo si β cumple la condición enunciada. □

3.4. Teorema de Alaoglu: compacidad débil

Sea E espacio normado, $B_{E'}$ la bola unitaria cerrada del dual.

3.4.1. Espacios separables

Teorema 3.18 (Banach-Alaoglu). *Sea E separable, entonces toda sucesión $(\varphi_n)_n \subset B_{E'}$ tiene una subsucesión ω^* convergente a un punto $\varphi \in B_{E'}$.*

Demostración. Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ denso numerable. La sucesión $(\varphi_n(x_1))_n \subset \mathbb{K}$ es acotada pues

$$|\varphi_n(x_1)| \leqslant \|\varphi_n\| \, \|x_1\| \leqslant \|x_1\|.$$

Luego tiene una subsucesión convergente $(\varphi_{n_1}(x_1))_{n_1}$. Ahora la sucesión $(\varphi_{n_1}(x_2))_{n_1} \subset \mathbb{K}$ también tiene una subsucesión convergente $(\varphi_{n_2}(x_2))_{n_2}$; notemos que por ser subsucesión de una sucesión convergente, $(\varphi_{n_2}(x_1))_{n_2}$ sigue siendo convergente. Procedemos inductivamente para obtener una subsucesión diagonal $(\varphi_{n_n})_n \subset B_{E'}$ de la sucesión original de manera tal que

$$(\varphi_{n_n}(x_k))_{n\in\mathbb{N}}$$

es convergente para todo $k \in \mathbb{N}$. Definimos $\varphi(x_k) = \lim_n \varphi_{n_n}(x_k)$ y extendemos por densidad a $x \in B_E$. Extendemos linealmente para obtener $\varphi : E \to \mathbb{K}$ lineal. Como

$$|\varphi(x_k)| = \lim_n |\varphi_{n_n}(x_k)| \leqslant 1 \, \|x_k\| \leqslant 1$$

también se tiene por densidad $|\varphi(x)| \leqslant 1$ para todo $x \in B_E$. Esto prueba que $\varphi \in B_{E'}$.

Ahora dado $x \in E$, y $\varepsilon > 0$, tomamos x_k tal que $\|x - x_k\| < \varepsilon/3$, luego

$$\begin{aligned} |\varphi_{n_n}(x) - \varphi(x)| &\leqslant |\varphi_{n_n}(x) - \varphi_{n_n}(x_k)| + |\varphi_{n_n}(x_k) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_k) - \varphi(x)| \\ &\leqslant \|\varphi_{n_n}\| \, \|x - x_k\| + |\varphi_{n_n}(x_k) - \varphi(x_k)| + \|\varphi\| \, \|x_k - x\| \\ &\leqslant \|x - x_k\| + \varepsilon/3 + \|x_k - x\| < \varepsilon \end{aligned}$$

si $n \geq n_0$ puesto que las funcionales están en la bola unitaria del dual y $\varphi_{n_n}(x_k) \xrightarrow{n} \varphi(x_k)$. Hemos probado que la sucesión $(\varphi_{n_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión ω^* convergente de la sucesión original, con límite $\varphi \in B_{E'}$. □

Teorema 3.19. *Si E es separable, entonces $B_{E'}$ provisto de la topología ω^* es metrizable con la distancia*

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f(x_n) - g(x_n)|,$$

donde $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es cualquier denso numerable de B_E

Demostración. Es fácil ver que se trata de una pseudo-distancia (es finita, simétrica y cumple la desigualdad triangular). Supongamos que $d(f,g) = 0$ entonces $f(x_n) = g(x_n)$ para todo n; por la densidad se deduce que $f = g$ en B_E, y por linealidad $f = g$ en E.

Si $f_j \xrightarrow{\omega^*} f$ en $B_{E'}$, entonces razonando como en la prueba del Teorema 1.36 obtenemos $d(f_j, f) \xrightarrow{j} 0$. Recíprocamente, si $f_j \to f$ en distancia, entonces cada sumando tiende a cero en distancia, esto es $f_j(x_n) \xrightarrow{j} f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la densidad se deduce que $f_j(x) \xrightarrow{j} f(x)$ para todo $x \in B_E$, y por la linealidad de las funcionales se arriba a la conclusión $f_j \xrightarrow{\omega^*} f$ en E'. □

§ Atención que en general *todo* E' con la topología ω^* no es metrizable, salvo que E tenga dimensión finita.

Combinando el resultado de metrización de la bola dual con el teorema de Alaoglu obtenemos que

Corolario 3.20. *Si E es separable, $B_{E'}$ es ω^* compacta.*

3.4.2. Caso general

En espacios reflexivos, aunque no sean separables, tenemos algunas propiedades muy útiles para sucesiones acotadas:

Teorema 3.21. *Sea E reflexivo. Entonces*

1. *Toda sucesión $(x_n)_n \subset E$ acotada tiene una subsucesión ω convergente.*

2. *Toda sucesión $(\varphi_n)_n \subset E'$ acotada tiene una subsucesión ω^* convergente.*

Demostración. Podemos suponer que $x_n \in B_E$. El subespacio $S = \overline{\langle x_n \rangle_n} \subset E$ es separable, y como E es reflexivo, entonces S es reflexivo (Proposición 3.4).

Por el teorema de Alaoglu, la sucesión $J(x_n) \in B_{S''}$ tiene una sucesión ω^* convergente, esto es existe $\psi \in S''$ tal que

$$J(x_{n_j})(\varphi) \xrightarrow{j} \psi(\varphi), \quad \forall \varphi \in S'.$$

Como S es reflexivo, $\psi = J(x)$ para algún $x \in S$, luego

$$\varphi(x_{n_j}) \xrightarrow{j} \varphi(x), \quad \forall \varphi \in S',$$

Pero si $f \in E'$, entonces $\varphi = f|_S \in S'$, luego

$$f(x_{n_j}) = f|_S(x_{n_j}) = \varphi(x_{n_j}) \xrightarrow{j} \varphi(x) = f|_S(x) = f(x),$$

y esto prueba que $(x_{n_j})_j \subset E$ es débilmente convergente.

La demostración del segundo item es similar y queda como ejercicio para el lector. □

Enunciamos a continuación el teorema general de compacidad débil* de la bola del espacio dual. Para su demostración, usaremos el Teorema de Tychonoff que afirma que un producto arbitrario de espacios compactos, con la topología producto, es compacto.

Teorema 3.22 (Banach-Alaoglu). *Si E es normado, y $(\varphi_l)_{l \in L} \subset B_{E'}$, entonces tiene una subred ω^* convergente. Es decir, la bola del dual es ω^* compacta.*

Demostración. Para cada $x \in B_E$, sea $I_x = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leqslant \|x\|\}$, que es un espacio compacto. Consideramos $T = \prod_{x \in B_E} I_x$ con la topología producto, este resulta entonces también un espacio compacto por el Teorema de Tychonoff. Consideramos la función $\tau : B_{E'} \to T$ dada por $f \mapsto (f(x))_{x \in B_E}$. Esta función es continua e inyectiva, si dotamos a $B_{E'}$ de la topología ω^*. Afirmamos que su imagen es cerrada. Supongamos entonces que $\tau(f_l) \to z \in T$, esto es $(f_l)_x = f_l(x) \xrightarrow{l} z_x$ para cada $x \in B_E$. Definimos $f : B_E \to \mathbb{K}$ como $f(x) = \lim_l f_l(x)$ y extendemos linealmente, obtenemos una funcional lineal $f : E \to \mathbb{K}$. Ahora si $\|x\| \leqslant 1$, entonces

$$|f(x)| = |\lim_l f_l(x)| = \lim_l |f_l(x)| \leqslant 1$$

lo que nos dice que f es continua. Evidentemente $\tau(f) = \lim_l \tau(f_l)$ luego la imagen de τ es cerrada. Si $y_l = \tau(f_l) \xrightarrow{l} y = \tau(f)$ en T, se tiene $f_l(x) \to f(x)$ para todo $x \in B_E$. Pero entonces, por linealidad, se obtiene $f_l \xrightarrow{\omega^*} f$. Esto prueba que la inversa de τ (definida en $\tau(B_E) \subset T$) es continua. Como $\tau(B_E)$ es cerrado en el espacio compacto T, es compacto. Como τ es un homeomorfismo con su imagen, $B_{E'}$ es compacta. □

Corolario 3.23 (Teorema de Isomorfismo). *Si E es un espacio de Banach entonces existe un espacio compacto Hausdorff tal que E es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de $C(X)$.*

Demostración. Sea $X = B_{E'}$ con la topología ω^*, que es un espacio compacto Hausdorff por el teorema de Alaoglu. Sea $i : E \to C(X)$ dada por $i(v) = f_v$, donde $f_v : X \to \mathbb{K}$ está dada por $f_v(\varphi) = \varphi(v)$ para $\varphi \in X = B_{E'}$. Es fácil ver que f_v es continua, y que i es lineal. Por otro lado

$$\|f_v\|_\infty = \sup\{|f_v(\varphi)| : \varphi \in X\} = \sup\{|\varphi(v)| : \varphi \in B_{E'}\} = \|v\|,$$

la última igualdad es consecuencia del Teorema de Hahn-Banach. Luego i es una isometría y en particular es inyectiva. Como E es completo, $i(E)$ es cerrado en $C(X)$. □

§ Notemos que si E es Banach, como $J : E \to E''$ es una isometría y B_E es completa, entonces $J(B_E)$ es cerrada en $B_{E''}$. Es fácil ver que la inclusión es propia salvo que E sea reflexivo. El siguiente resultado nos muestra que es siempre densa, si cambiamos la topología.

Teorema 3.24 (Goldstine). *Si E es normado y $J : E \to E''$ denota la inclusión canónica, entonces $J(B_E)$ es ω^* densa en $B_{E''}$.*

Demostración. Como $B_{E''} = B_{(E')'}$, resulta ω^* compacta. Sea $K = \overline{J(B_E)} \subset B_{E''}$, donde la clausura la tomamos en la topología ω^*. Entonces K es cerrado en un compacto, y por ende compacto. Supongamos que existe $\psi_0 \in B_{E''}$ tal que $\psi_0 \notin K$. Tomamos $X = (E'', \omega^*)$ que es un e.l.c. Tenemos que $C = \{\psi_0\}$ no corta al compacto balanceado K. Existe entonces por el teorema de separación de Hahn-Banach (Corolario 2.12) una funcional lineal $f : E'' \to \mathbb{K}$ que es ω^* continua y $\gamma > 0$ tales que

$$|f(k)| \leqslant \gamma < \operatorname{Re} f(\psi_0) \quad \forall k \in K.$$

Como f es ω^* continua en E'', existe $\varphi_0 \in E'$ tal que $f(\psi) = \psi(\varphi_0)$ para toda $\psi \in E''$ (Ejercicio 19 Sección 2.6). Entonces si $x \in B_E$, $J(x) \in K$ y por ende

$$|\varphi_0(x)| = |J(x)(\varphi_0)| = |f(J(x))| \leqslant \gamma < |f(\psi_0)| = |\psi_0(\varphi_0)| \leqslant \|\psi_0\|\,\|\varphi_0\| \leqslant \|\varphi_0\|.$$

Tomando supremo sobre $x \in B_E$ se llega a una contradicción. □

Corolario 3.25. *Sea E espacio de Banach, entonces son equivalentes:*

1. *E es reflexivo.*
2. *B_E es ω-compacta.*

Demostración. Supongamos que E es reflexivo, entonces $J(B_E) = B_{E''}$ es ω^* compacta (pues $E'' = (E')'$). Si $(x_l)_{l\in L}$ es una red en B_E, $J(x_l)$ tiene entonces una subred ω^* convergente a un punto $\psi = J(x)$ con $x \in B_E$. Luego para toda $\varphi \in E'$,

$$\varphi(x_{l_j}) = J(x_{l_j})(\varphi) \xrightarrow{j} J(x)(\varphi) = \varphi(x), \tag{3.2}$$

esto es, $x_{l_j} \xrightarrow{\omega} x$ en B_E.

Recíprocamente, sea $(J(x_l))_{l\in L}$ una red en $J(B_E)$. Si B_E es ω compacta, entonces $(x_l)_{l\in L}$ tiene una subred ω convergente a un elemento $x \in B_E$; la cuenta recién hecha (3.2) nos dice que $J(x_{l_j})$ es ω^* convergente a $J(x)$. Luego $J(B_E) \subset B_{E''}$ es ω^* compacta. Pero por otro lado, el teorema de Goldstein nos dice que tiene que ser ω^* densa en $B_{E''}$, luego debe ser $J(B_E) = B_{E''}$. Esto nos dice que $J(E) = E''$ y entonces E es reflexivo. □

Convexos y minimizantes

Dado $C \subset E$ espacio de Banach, y $x \notin C$, en el Ejercicio 13 de la Sección 2.6 se le pide al lector caracterizar la existencia de elementos minimizantes $c_0 \in C$ tales que

$$\|c_0 - x\| = \operatorname{dist}(x, C) = \inf_{c \in C} \|c - x\|,$$

usando el teorema de Hahn-Banach. A continuación veremos que en un espacio reflexivo, siempre existe un tal elemento minimizante, y que si el mismo es estrictamente convexo, este es único.

Definición 3.26 (Convexidad estricta). Sea E espacio normado, diremos que es *estrictamente convexo* si $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ implica necesariamente que x, y están alineados.

§ Si x, y son nulos, no hay nada para decir. Si $x \neq 0$, estamos afirmando que en un espacio estrictamente convexo si se verifica la igualdad en la desigualdad triangular, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $y = \lambda x$. Pero entonces

$$|1 + \lambda| \, \|x\| = \|x + \lambda x\| = \|x + y\| = \|x\| + \|y\| = (1 + |\lambda|)\|x\|.$$

Como x es no nulo, operando con esta identidad se arriba a $\lambda \geqslant 0$, y de hecho debe ser $\lambda = \|y\| \, \|x\|^{-1}$.

Teorema 3.27 (Existencia y unicidad de minimantes a conjuntos convexos). *Sea E espacio de Banach reflexivo, sea $C \subset E$ convexo cerrado y $x \notin C$.*

1. *Existe $c_0 \in C$ tal que $\|x - c_0\| = dist(x, C)$.*
2. *Si E es estrictamente convexo, c_0 es único.*

Demostración. Sea $d = \operatorname{dist}(x, C)$, si $d = 0$ tomamos $c_0 = x$. Sino, sea $c_n \in C$ sucesión minimizante, como

$$\|c_n\| \leqslant \|c_n - x\| + \|x\| \leqslant d + \varepsilon + \|x\|$$

a partir de un n_0, podemos suponer que $(c_n)_n$ es acotada. Pasando a una subsucesión, como E es reflexivo, podemos suponer que es débilmente convergente a un punto $c_0 \in E$. Como C es cerrado, también es débilmente cerrado (Ejercicio 22, Sección 2.6), luego $c_0 \in C$. Sea $\varphi \in E'$, con $\|\varphi\| \leqslant 1$. Entonces

$$|\varphi(x - c_n)| \leqslant \|x - c_n\|,$$

tomando límite tenemos que

$$|\varphi(x - c_0)| \leqslant d \quad \forall \varphi \in B_{E'}.$$

Por el Teorema de Hahn-Banach (Ejercicio 15, Sección 2.6), debe ser $\|x - c_0\| \leqslant d \leqslant \|x - c\|$ para todo $c \in C$, luego c_0 es minimizante.

Ahora supongamos que $c_1, c_2 \in C$ son minimizantes y que la norma es estrictamente convexa, entonces como el promedio está también en C, se tiene

$$d \leqslant \|\frac{c_1 + c_2}{2} - x\| = \|\frac{c_1 - x}{2} + \frac{c_2 - x}{2}\| \leqslant \|\frac{c_1 - x}{2}\| + \|\frac{c_2 - x}{2}\| = \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d.$$

Por la convexidad estricta de la norma debe ser

$$\frac{c_1 - x}{2} = \lambda \frac{c_2 - x}{2},$$

con $\lambda = \|c_1 - x\| \, \|c_2 - x\|^{-1} = dd^{-1} = 1$, luego $c_1 - x = c_2 - x$ y esto prueba que $c_1 = c_2$. □

3.4.3. Resultados adicionales: compacidad y reflexividad

§ A continuación enunciamos (sin demostración) dos teoremas importantes del análisis funcional, en particular sobre las topologías de los espacios de Banach, que no utilizaremos en este curso.

Teorema 3.28 (Eberlein-Šmulian). *Sea E espacio de Banach, $A \subset E$. Entonces A es ω compacto si y solo si toda sucesión en A tiene una subsucesión débilmente convergente en A.*

§ Como la topología débil no es metrizable en dimensión infinita, no es cierto que toda sucesión tenga una subsucesión convergente en un conjunto compacto (puede tener una subred convergente, que no sea sucesión). Y recíprocamente, que toda sucesión tenga una subsucesión convergente, no dice que toda red tenga una subred convergente. De ahí la utilidad de el Teorema de Eberlein-Šmulian. Una prueba accesible, que sólo utiliza los Teoremas de Hahn-Banach y de Alaoglu, puede encontrarse en el artículo de Whitley de 1967 [16].

Combinando el Teorema de Eberlein-Šmulian con el Teorema 3.25, obtenemos

Corolario 3.29. *Un espacio de Banach E es reflexivo si y solo si toda sucesión $(x_n)_n \subset B_E$ tiene una subsucesión débilmente convergente en B_E.*

Otra caracterización útil de la reflexividad la da el Teorema de James.

Teorema 3.30 (James). *Un espacio de Banach E es reflexivo si y solo si toda $\varphi \in E'$ alcanza su norma en B_E.*

§ Si E es reflexivo, entonces la bola B_E es débilmente compacta por el Teorema 3.25, y es fácil ver que toda $\varphi \in E'$ alcanza su máximo en B_E (o directamente usando el teorema de Hahn-Banach y la reflexividad). De demostración mucho más compleja es la implicación recíproca que enuncia el Teorema de James, y de hecho el teorema se extiende a conjuntos débilmente cerrados. Su prueba puede hallarse en un artículo del mismo James de 1964 [7].

3.5. Ejercicios

En esta sección de ejercicios, E, F denotan espacios normados.

1. Definamos $\varphi_n : E \to \mathbb{C}$ por $\varphi_n(x_1, x_2, \ldots) = x_n$.

   a) Si $E = \ell^2$ probar que $\varphi_n \xrightarrow{\omega^*} 0$. ¿$\varphi_n \to 0$?

   b) Si $E = \ell^\infty$ probar que $\varphi_n \in B_{E'}, \forall n \in \mathbb{N}$ pero que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene ninguna subsucesión ω^*-convergente. ¿Contradice esto el hecho de que $(B_{E'}, \omega^*)$ es compacta?

2. Sea $J : E \to E''$ la inclusión canónica,

   a) Probar que J es un homeomorfismo entre E_ω y $J(E)$ (este último con la topología ω^*).

   b) Probar que si E es Banach, $J(B_E)$ es fuertemente cerrado en $B_{E''}$, y que E es reflexivo si y solo si vale la igualdad $J(B_E) = B_{E''}$.

3. Sea E normado, $J : E \to E''$, $j : E' \to E'''$ las respectivas inclusiones canónicas. Probar que $J' \circ j = id_{E'}$ y que $P = j \circ J' : E''' \to E'''$ es un proyector con rango $j(E)$. Concluir que $j(E')$ es complementado en E'''.

4. Probar que si E es reflexivo, para toda $\varphi \in E'$ existe $x \in B_E$ tal que $\|\varphi\| = \varphi(x)$.

5. Probar que si E es reflexivo, toda sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ acotada tiene una *subsucesión ω^** convergente.

4. Operadores lineales

Hugo Steinheaus consideraba que su descubrimiento matemático más grande era ... Stephan Banach.

Barry Simon

En este capítulo estudiaremos con más detalle propiedades de operadores entre espacios vectoriales normados y sus duales.

4.1. Principio de acotación uniforme

En esta sección estudiaremos algunas consecuencias del Teorema de Baire en espacios normados, para ello primero recordemos este teorema, en la versión que usaremos más a menudo (para una prueba, ver por ejemplo el libro de Rudin [13, Theorem 2.2]).

Recordemos que un conjunto es *nunca denso* si su clausura tiene interior vacío.

Teorema 4.1 (Baire). *Sea (X, d) espacio métrico completo no vacío, entonces X no puede ser unión numerable de conjuntos cerrados nunca densos. Luego si X es unión numerable de conjuntos cerrados, alguno de ellos tiene interior no vacío.*

§ Esta colección que sigue de resultados (y sus variantes) suelen conocerse como Teoremas de Banach-Steinhaus.

Teorema 4.2 (PAU - Principio de Acotación Uniforme). *Sean E, F espacios normados con E completo, y $\{T_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{L}(E, F)$. Si para cada $x \in E$, el conjunto $\{T_i x\}_{i\in I} \subset F$ es acotado, entonces el conjunto $\{\|T_i\|\}_{i\in I}$ es acotado en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $E_n = \{x \in E : \|T_i x\| \leqslant n \ \forall i \in I\}$. Cada uno de estos conjuntos es cerrado pues los T_i son continuos, y es fácil ver que son convexos, balanceados y contienen al $0 \in E$. Afirmamos que $E = \cup_n E_n$, en caso contrario existiría $0 \neq x_0 \in E$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $i = i(n) \in I$ de manera tal que $\|T_{i_n} x_0\| > n$. Pero esto contradice que el conjunto $\{T_i x_0\}_{i\in I}$ es acotado en F.

Por el teorema de Baire, existe entonces $N \in \mathbb{N}$ tal que E_N tiene interior no vacio. Luego podemos afirmar que $0 \in \operatorname{int}(E_N)$ (Ejercicio 22 Sección 2.6). Luego existe $r > 0$

tal que si $\|x\| < r$, entonces $x \in E_N$. Si $x \neq 0$, normalizando x como $y = \frac{x\delta}{\|x\|}$ obtenemos $\|T_i y\| \leqslant N$ para todo $i \in I$ (para cualquier $0 < \delta < r$), luego $\|T_i\| \leqslant N/r$ para todo $i \in I$. □

Corolario 4.3 (Limites puntuales son acotados). *Sea $(T_n)_n \subset \mathcal{L}(E, F)$ con E Banach y F normado. Si para cada $x \in E$, $T_n x$ es convergente en F, entonces existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ con*

$$\|T\| \leqslant \liminf_n \|T_n\|$$

y además $\lim_n T_n x = Tx$ *para cada $x \in E$.*

Demostración. Como $T_n x$ es convergente, en particular es acotada, en principio con una cota para cada $x \in E$. Pero el PAU nos dice entonces que la familia $\|T_n\|$ es acotada, luego definiendo $Tx = \lim_n T_n x$ se tiene

$$\|Tx\| = \|\lim_n T_n x\| = \lim_n \|T_n x\| = \liminf_n \|T_n x\| \leqslant \liminf_n \|T_n\| \, \|x\|.$$

□

§ Cuando una sucesión o red de operadores tiende puntualmente a otro operador (evaluando en cada x del dominio), decimos que T_n tiende a T fuertemente, o que tiende en la *topología fuerte de operadores*. Se suele denotar

$$\text{SOT-}\lim_n T_n = T.$$

Asimismo, si T_n tiende a T para cada $x \in E$ y cada $f \in F'$,

$$f(T_n x) \xrightarrow{n} f(Tx)$$

decimos que T_n tiende a T en la *topología débil de operadores*. Se suele denotar

$$\text{WOT-}\lim_n T_n = T.$$

Invitamos al lector a verificar que si $T_n, T \in \mathcal{L}(E, F)$ entonces

$$T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T \Longrightarrow T_n \xrightarrow{\text{SOT}} T \Longrightarrow T_n \xrightarrow{\text{WOT}} T,$$

y también que

$$T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T \Longrightarrow T_n \xrightarrow{\omega} T \Longrightarrow T_n \xrightarrow{\text{WOT}} T.$$

Corolario 4.4 (Continuidad débil y continuidad). *Sean E, F normados con $T : E \to F$ lineal. Entonces $T \in \mathcal{L}(E, F)$ si y solo si T es ω-continuo.*

Demostración. Si T es continuo, $x_l \overset{\omega}{\to} 0$ y $f \in F'$, entonces $f(Tx_l) = (f \circ T)(x_l) \overset{l}{\to} 0$ pues $f \circ T \in E'$. Ahora supongamos que T es ω continuo, y supongamos que T no es acotado. Entonces existe $\{x_n\}_n \subset B_E$ tales que $\|Tx_n\| \geqslant n^2$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero $y_n = n^{-1}x_n \to 0$ en norma luego $y_n \overset{\omega}{\to} 0$, asi que $Ty_n \overset{\omega}{\to} 0$. Entonces para cada $f \in F'$, $\{f(Ty_n)\}_n \subset \mathbb{K}$ es un conjunto acotado. Pero $f(Ty_n) = J(Ty_n)(f)$, y esto dice que el conjunto $\{J(Ty_n)\}_n$ está puntualmente acotado como familia de operadores de F' en $\mathbb{K}$. Como F' es completo, la familia está uniformemente acotada por el PAU, esto es

$$\|Ty_n\| = |J(Ty_n)| \leqslant M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esto contradice nuestra hipótesis $\|Ty_n\| = \|T\frac{x_n}{n}\| \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 4.5 (Banach-Saks). *Sea H Hilbert, $x, (x_n)_n \subset H$ tales que $x_n \overset{\omega}{\to} x$. Entonces existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ tal que los promedios de Césaro*

$$z_m = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_{n_k}$$

convergen en norma a x.

Demostración. Restando x tanto a x_n como a z_m, podemos suponer que x_n tiende débilmente a cero. Luego existe $C > 0$ tal que $\|x_n\| \leqslant C$ para todo n (Ejercicio 2 Sección 4.6). Tomamos $x_{n_1} = x_1$, como $\langle x_n, x_1\rangle \overset{n}{\to} 0$, elegimos x_{n_2} de manera que $|\langle x_{n_2}, x_1\rangle| < 1/2^2$. Ahora elegimos x_{n_3} de manera tal que

$$|\langle x_{n_3}, x_{n_1}\rangle| < 1/2^3, \quad |\langle x_{n_3}, x_{n_2}\rangle| < 1/2^3,$$

esto es posible porque tanto $\langle x_n, x_{n_1}\rangle$ como $\langle x_n, x_{n_2}\rangle$ tienden a cero. Una vez elegidos x_{n_j}, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, elegimos x_{n_k} de manera tal que

$$|\langle x_{n_k}, x_{n_j}\rangle| < 2^{-k}, \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant k-1.$$

Afirmamos que esta subsucesión tiene la propiedad deseada, es decir que sus promedios Césaro tienden a cero. Para probarlo, observamos que

$$\begin{aligned}
\|z_m\|^2 &= \frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{m}\|x_{n_k}\| + \frac{2}{m^2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\operatorname{Re}\langle x_{n_k}, x_{n_j}\rangle < \frac{Cm}{m^2} + \frac{2}{m^2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}|\langle x_{n_k}, x_{n_j}\rangle| \\
&< \frac{C}{m} + \frac{2}{m^2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{2^k} = \frac{C}{m} + \frac{2}{m^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{k-1}{2^k} \\
&\leqslant \frac{C}{m} + \frac{2}{m^2}\sum_{k=1}^{m}1 = \frac{C}{m} + \frac{2m}{m^2} = \frac{C+2}{m} \xrightarrow{m} 0.
\end{aligned}$$

□

§ Invitamos al lector a generalizar este teorema a los espacios $L^p(X,\mu)$, con $1 < p < \infty$.

Conjuntos débilmente acotados

Teorema 4.6. *Si E es normado, entonces $A \subset E$ es acotado en norma si y solo si es débilmente acotado. Si además E es completo, entonces un conjunto $B \subset E'$ es ω^* acotado si y solo si es acotado en norma.*

Demostración. Si A es acotado en norma está dentro de alguna bola de radio $C > 0$. Entonces para toda $\varphi \in E'$

$$p_\varphi(x) = |\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|\,\|x\| \leqslant \|\varphi\|C = c_\varphi$$

para todo $x \in A$, lo que prueba que A es acotado en E_ω.

Recíprocamente, si A es acotado en E_ω, tenemos $|J_x(\varphi)| = |\varphi(x)| \leqslant c_\varphi$ para cada $\varphi \in E'$, para todo $x \in A$. O sea la familia $(J_x)_{x\in A} \in E'' = \mathcal{L}(E', \mathbb{K})$ está puntualmente acotada. Como E' siempre es completo cuando E es normado, el principio de acotación uniforme nos dice que existe $C > 0$ tal que la familia (J_x) está uniformemente acotada, esto es $\sup_{\|\varphi\|=1} |J_x(\varphi)| \leqslant C$ para todo $x \in A$. Pero entonces, para cada $x \in A$, $\|x\| = \|J_x\| \leqslant C$ lo que prueba que A es acotado en norma.

La segunda afirmación queda para verificar por el lector, teniendo en cuenta que ahora $|\varphi(x)| = p_x(\varphi)$. □

Con la misma demostración y usando el teorema de Alaoglu:

Teorema 4.7. *Sea E espacio de Banach.*

1. *Si $A \subset E'$ es ω^*-cerrado, entonces A es ω^*-compacto si y solo si es acotado en norma.*

2. *Si E es reflexivo y $A \subset E$ es ω-cerrado, entonces A es ω-compacto si y solo si es acotado en norma.*

4.2. Teorema de la función abierta

Teorema 4.8 (Teorema de la función abierta). *Sean E, F Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$, con $S = Ran(T)$ cerrado. Entonces T es una función abierta de E en S. En particular si T es biyectivo, es un homeomorfismo, y $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.*

Demostración. Por la linealidad de T basta probar que si $B_E^\circ = \{x \in E : \|x\| < 1\}$, entonces $T(B_E^\circ)$ contiene algún entorno abierto de $0 \in S$. Claramente

$$S = \bigcup_n \overline{T\left(n\, B_E^\circ\right)} = \bigcup_n n\, \overline{T\left(B_E^\circ\right)},$$

y por el teorema de Baire existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N\,\overline{T(B_E^\circ)}$ tiene interior no vacío. Como este conjunto es convexo y balanceado, podemos suponer que $0 \in E$ es punto interior de

$\overline{T\left(B_E^\circ\right)}$, digamos $\delta B_S^\circ \subset \overline{T\left(B_E^\circ\right)}$ para algún $\delta > 0$ (B_S° denota la bola unitaria abierta en S).

Basta entonces ver que $\overline{T\left(B_E^\circ\right)} \subset 2\,T(B_E^\circ)$ para probar que T es abierta, puesto que en ese caso,

$$\frac{\delta}{2} B_S^\circ \subset T(B_E^\circ).$$

Para ello, sea $y \in \overline{T\left(B_E^\circ\right)}$, tomamos $x_1 \in B_E^\circ$ tal que $\|y - Tx_1\| < \delta/2$, luego

$$y - Tx_1 \in \frac{\delta}{2} B_S^\circ \subset {}^1\!/\!_2\,\overline{T\left(B_E^\circ\right)} = \overline{T\left({}^1\!/\!_2\, B_E^\circ\right)}.$$

Tomamos entonces $x_2 \in {}^1\!/\!_2\, B_E^\circ$ tal que $\|y - Tx_1 - Tx_2\| < \delta/4$, para obtener

$$y - Tx_1 - Tx_2 \in \frac{\delta}{4} B_S^\circ \subset {}^1\!/\!_4\,\overline{T\left(B_E^\circ\right)} = \overline{T\left({}^1\!/\!_4\, B_E^\circ\right)}.$$

Procedemos inductivamente para obtener una sucesión $(x_n)_n \subset E$ de manera tal que

$$x_n \in \frac{1}{2^{n-1}} B_E^\circ, \qquad y - \sum_{j=1}^{n} Tx_j \in \frac{\delta}{2^n} B_S^\circ \subset \overline{T\left({}^1\!/\!_{2^n}\, B_E^\circ\right)}.$$

Como $\sum_n \|x_n\| < \sum_n \frac{1}{2^{n-1}} = 2$, la suma $\sum_n x_n \in E$ es convergente (Ejercicio 9, Sección 1.5) y además si $x = \sum_n x_n$, $\|x\| < 2$, esto es $x \in 2\,B_E^\circ$. Por otro lado,

$$\|y - \sum_{j=1}^{n} Tx_j\| < \frac{\delta}{2^n}$$

luego

$$y = \sum_j Tx_j = T\left(\sum x_n\right) = Tx \in T(2\,B_E^\circ) = 2\,T(B_E^\circ).$$

□

Corolario 4.9. *Si X es espacio de Banach para dos normas tales que $\|\cdot\|_1 \leqslant C\|\cdot\|_2$, entonces ambas normas son equivalentes.*

Demostración. El operador $i : (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$ es acotado (tiene norma menor o igual a C) y es claramente biyectivo. Luego su inversa también es acotada y esto dice que existe $K > 0$ tal que $\|\cdot\|_2 \leqslant K\|\cdot\|_1$. □

El teorema de la función abierta, en el caso que T sea biyectivo, nos dice que la inversa es acotada, luego

$$\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leqslant \|T^{-1}\|\,\|Tx\|,$$

equivalentemente existe $C > 0$ tal que $\|Tx\|C \geqslant \|x\|$ para todo $x \in E$. En general, una tal desigualdad nos dice que T es *acotado inferiormente.*

§ Notemos que si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ es acotado inferiormente, entonces es inyectivo. Pero si además E es completo, entonces A tiene rango cerrado: si $Ax_n \to y$, entonces $\|x_n - x_m\| \leqslant C\|A(x_n - x_m)\| = \|Ax_n - Ax_m\|$, luego $(x_n)_n$ es de Cauchy en E, por ende convergente a $x \in E$. Pero entonces $y = \lim_n Ax_n = A \lim_n x_n = Ax$, lo que prueba que $y \in \operatorname{Ran} A$.

El siguiente teorema da una recíproca de los resultados recién comentados, en el caso en que tanto E como F sean completos.

Teorema 4.10. *Sean E, F Banach y $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\operatorname{Ran} T$ es cerrado, entonces existe una constante $C > 0$ de manera que para cada $y = Tx \in \operatorname{Ran} T$, existe $x_0 \in E$ tal que $y = Tx_0$ y además $\|x_0\| \leqslant C\|Tx_0\| = C\|y\|$.*

Demostración. Consideramos $\hat{T} : E/\ker T \to \operatorname{Ran} T$ dado por $\hat{T}[x] = Tx$. Este operador está bien definido pues si $[x] = [y]$ entonces $x - y \in \ker T$ luego $Tx = Ty$. Es fácil ver que es lineal, pero además para cada $x \in E$, $s \in \ker T$,

$$\|\hat{T}[x]\| = \|Tx\| = \|T(x - s)\| \leqslant \|T\|\,\|x - s\|,$$

y tomando ínfimo sobre $s \in \ker T$ se tiene $\|\hat{T}[x]\| \leqslant \|T\|\,\|[x]\|$, luego $\hat{T}$ es acotado. Notemos que tanto $E/\ker T$ como $\operatorname{Ran} T$ son espacios de Banach, y que $\hat{T}$ es biyectivo. Por el teorema de la función abierta, su inversa está acotada, o equivalentemente, está acotado inferiormente. Esto es, existe $R > 0$ tal que $\|\hat{T}[x]\|R \geqslant \|[x]\|$. Ahora dado $y = Tx$ en el rango de T, tomamos $s_0 \in \ker T$ tal que $\|x - s_0\| < \|[x]\| + R\|Tx\|$. Entonces, si $x_0 = x - s_0$, se tiene $Tx_0 = Tx = y$; además

$$\|x_0\| = \|x - s_0\| \leqslant \|[x]\| + R\|Tx\| \leqslant R\|\hat{T}[x]\| + R\|Tx\| = 2R\|Tx\| = C\|Tx_0\| = C\|y\|$$

donde obviamente, $C = 2R$. □

4.2.1. Bases de Schauder

Una *base de Schauder* en un espacio de Banach E es una sucesión $\{e_n\}_n \subset E$ tal que todo $x \in E$ se escribe de manera única como

$$x = \sum_{n \geq 1} x_n e_n$$

donde $x_n \in \mathbb{K}$ y la convergencia es en norma. Vamos a suponer siempre que la base está normalizada, esto es $\|e_n\| = 1$ para todo n.

Denotemos $e_n' : E \to \mathbb{K}$ a la función que asigna a cada $x \in E$ su coordenada en la base, esto es $e_n'(x) = x_n$, es claro que es una funcional lineal. Se las denomina *funciones coordenadas de la base*. Por otro lado, si $P_n : E \to E$ denota

$$P_n(x) = P_n\left(\sum_{j \geq 1} x_j e_j\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right),$$

entonces este es un operador lineal e idempotente, denominado *proyector a la base*. De la convergencia en norma de la serie, deducimos que para cada $x \in E$, $\|x - P_n x\| \xrightarrow{n} 0$. Decimos entonces que $(P_n)_n$ es una *aproximación de la identidad* de E.

Teorema 4.11. *Si $\{e_n\}_n$ es base de Schauder en E espacio de Banach, entonces los proyectores de la base y las funciones coordenadas son continuas. Además existe $K \geq 1$ tal que $\|P_n\| \leqslant K$ y $\|e'_n\| \leqslant 2K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Como toda serie convergente en E es acotada, podemos considerar

$$\|x\|_1 = \sup_n \|\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\| = \sup_n \|\sum_{j=1}^{n} e'_j(x) e_j\|,$$

que es claramente una seminorma en E, pero como

$$\|x\| = \|\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\| = \lim_{n\to\infty} \|\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\| \leqslant \|x\|_1,$$

se trata de una norma que verifica $\|x\| \leqslant \|x\|_1$ para todo $x \in E$. Observemos además que

$$|e'_n(x)| = |x_n| = \|x_n e_n\| = \|P_n x - P_{n-1} x\| \leqslant \|P_n x\| + \|P_{n-1} x\| \leqslant 2\|x\|_1. \tag{4.1}$$

Veamos que $(E, \|\cdot\|_1)$ es completo. Sea $(x_j)_j \subset E$ de Cauchy en $\|\cdot\|_1$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $l, j \geq J$ implica

$$|e'_n(x_j - x_l)| \leqslant 2\|x_j - x_l\|_1 < \varepsilon$$

luego $(e'_n(x_j))_j \subset \mathbb{K}$ es de Cauchy para cada n, luego converge a $y_n \in \mathbb{K}$. Ahora notamos que

$$\begin{aligned}
\|\sum_{n=1}^{N} (y_n - e'_n(x_j)) e_n\| &= \|\sum_{n=1}^{N} \lim_{k\to\infty} (e'_n(x_k) - e'_n(x_j)) e_n\| \\
&= \lim_{k\to\infty} \|\sum_{n=1}^{N} (e'_n(x_k) - e'_n(x_j)) e_n\| \\
&= \lim_{k\to\infty} \|\sum_{n=1}^{N} (e'_n(x_k - x_j)) e_n\| \\
&\leqslant \lim_{k\to\infty} \sup_N \|\sum_{n=1}^{N} (e'_n(x_k - x_j)) e_n\| = \lim_{k\to\infty} \|x_k - x_j\|_1 \leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

si $j \geq J$, esto es

$$\|\sum_{n=1}^{N} (y_n - e'_n(x_j)) e_n\| \leqslant \varepsilon \tag{4.2}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$, si $j \geq J$.

Como $x_J = \sum_n e'_n(x_J) e_n$ es convergente en E, existe también n_0 tal que si $N \geqslant n \geqslant n_0(J)$, entonces

$$\|\sum_{l=n}^{N} e'_l(x_J) e_l\| < \varepsilon.$$

Luego si $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
\|\sum_{l=n}^{n+p} y_l e_l\|_1 &= \sup_{n\leqslant N\leqslant n+p} \|\sum_{l=n}^{N} y_l e_l\| \leqslant \sup_{n\leqslant N\leqslant n+p}\left(\|\sum_{l=n}^{N}(y_l - e_l'(x_J)e_l\| + \|\sum_{l=n}^{N} e_l'(x_J)e_l\|\right)\\
&< \sup_{n\leqslant N\leqslant n+p}\left(\|\sum_{l=1}^{N}(y_l - e_l'(x_J)e_l\| + \|\sum_{l=1}^{n-1}(y_l - e_l'(x_J)e_l\| + \varepsilon\right) \leqslant 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $\sum_l y_l e_l$ es de Cauchy en $\|\cdot\|_1$, pero como $\|\cdot\| \leqslant \|\cdot\|_1$, también es de Cauchy en E. Como E es completo, la serie es convergente en E, definiendo un elemento $y = \sum_n y_n e_n \in E$. Pero por la ecuación (4.2), tomando supremo sobre $N \in \mathbb{N}$, se tiene que en realidad y es el límite en norma $\|\cdot\|_1$ de $(x_j)_j$.

El Corolario 4.9 nos dice entonces que ambas normas son equivalentes, en particular existe $K > 0$ tal que $\|\cdot\|_1 \leqslant K\|\cdot\|$. Se tiene, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in E$,

$$\|P_n(x)\| = \|\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant K\|x\|,$$

lo que prueba que los proyectores P_n son acotados (uniformemente). Por último, de la ecuación (4.1) se deduce que

$$|e_n'(x)| \leqslant \|P_n x\| + \|P_{n-1}x\| \leqslant 2K\|x\|$$

lo que prueba en particular que las funciones coordenadas son continuas en E, y están uniformemente acotadas. □

§ La familia $(P_n)_n \subset \mathcal{L}(E)$ es una aproximación de la identidad con operadores (uniformemente) acotados de rango finito. No es cierto en general que P_N tienda en norma a $1 \in \mathcal{L}(E)$ pero si es cierto de acuerdo a la observación previa al teorema que

$$\textsc{sot-}\lim_n P_n = 1.$$

Observación 4.12. De la definición de base de Schauder, a partir de la existencia y unicidad de escritura en la base, se deduce que $\{e_n\}_n$ es un conjunto linealmente independiente, y que el subespacio generado es denso en E. Podemos definir entonces una función $i : E \to \ell^\infty$ que asigna a cada $x \in E$ sus coordenadas en la base, esto es $i(x)_n = x_n = e_n'(x)$. Esta aplicación es lineal e inyectiva, pero además

$$\|i(x)\|_\infty = \sup_n |e_n'(x)| \leqslant 2K\|x\|$$

lo que prueba que es continua. Así que todo espacio de Banach con base de Schauder se inyecta de manera continua en ℓ^∞, es un "espacio de sucesiones".

4.3. Teorema del Gráfico cerrado

§ Dados dos espacios normados E, F, el producto $E \times F$ es un espacio vectorial con las operaciones coordenada a coordenada, y tiene una estructura de espacio normado dada por

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Si E, F son completos es fácil ver que $E \times F$ con esta norma es completo.

La elección de la suma en principio es arbitraria, otras normas equivalentes en $E \times F$ pueden ser

$$\|(x, y)\| = (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p},$$

para un dado $1 < p < \infty$ (o tomar el máximo de ambas normas). Si E, F son espacios con producto interno, la elección $p = 2$ hace de $E \times F$ un espacio con producto interno.

Dado $T : E \to F$ lineal, el gráfico de T

$$Gr(T) = \{(x, y) \in E \times F : y = Tx\} = \{(x, Tx) : x \in Dom(T)\}$$

es un subespacio de $E \times F$.

Teorema 4.13 (Teorema del Gráfico Cerrado). *Si E, F son espacios de Banach, entonces $T : E \to F$ lineal es acotado si y solo si el gráfico de T es cerrado en $E \times F$.*

Demostración. Si T es acotado entonces $x \mapsto (x, Tx)$ es continua y es fácil ver que su imagen, que es $Gr(T)$, es cerrada en $E \times F$. Supongamos ahora que $Gr(T)$ es cerrado, como el producto $E \times F$ es un espacio de Banach también lo es $Gr(T)$. Consideramos las proyecciones $P_1 : Gr(T) \to E$, $P_2 : Gr(T) \to F$. Ambos son operadores lineales acotados entre espacios de Banach, pero P_1 es biyectivo, luego su inversa $P_1^{-1} : E \to Gr(T)$ es acotada por el teorema de la función abierta. Para cada $x \in E$, se tiene $P_2(P_1^{-1}(x)) = P_2(x, Tx) = Tx$, esto es $T = P_2 P_1^{-1}$, y como ambos son acotados, T resulta acotado. □

§ Si $T : E \to F$ es lineal y E, F son Banach, basta con verificar que si $x_n \to x$ en E, y $Tx_n \to y$ en F, entonces $Tx = y$. En contraste con lo que uno haria si no tuviera el teorema del gráfico cerrado, que sería probar que si $x_n \to x$ en E entonces *existe* $y \in F$ tal que $Tx_n \to y$ y *además* $Tx = y$. Trasladando al origen $x_n - x$, se tiene el útil corolario:

Corolario 4.14 (Gráfico cerrado). *Sea $T : E \to F$ lineal con E, F Banach. Entonces si siempre vale*

$$x_n \to 0, Tx_n \to y \Longrightarrow y = 0,$$

resulta T acotado.

4.3.1. Proyecciones

§ Si E es un espacio normado y $P : E \to E$ es lineal e idempotente ($P^2 = P$), entonces $\mathrm{Ran}P = \ker(1 - P)$ y además

$$E = \ker P \oplus \mathrm{Ran}P.$$

Si P es acotado, claramente ambos subespacios son cerrados. Veamos que esta condición equivale a la continuidad de P en un espacio de Banach, como una aplicación del Teorema del Gráfico Cerrado.

Lema 4.15. *Sea E espacio de Banach y $P : E \to E$ lineal e idempotente. Entonces P es acotado si y solo si $RanP, \ker(P)$ son cerrados.*

Demostración. Ya vimos que si P es continuo, ambos subespacios son cerrados. Supongamos ahora que ambos subespacios son cerrados. Sea $(x_n, Px_n) \in Gr(P)$ que converge a $(x, y) \in E \times E$. Entonces $P(x_n - Px_n) = Px_n - Px_n = 0$, luego $x_n - Px_n \in \ker P$, luego $x - y \in \ker P$, esto es $Py = Px$. Por otro lado $(1 - P)Px_n = 0$ también, y como $\ker(1 - P) = \mathrm{Ran}P$ también es cerrado, debe ser $y \in \ker(1 - P)$. Luego $y = Py = Px$. □

§ Diremos que un idempotente $P^2 = P$ lineal es un *proyector*, y en el caso en que sea un operador acotado, notemos que como $\|Px\| = \|PPx\| \leqslant \|P\|\|Px\|$, se verifica $\|P\| \geqslant 1$. Como $Q = 1 - P$ también es un operador acotado, se tiene también $\|1 - P\| \geq 1$.

Corolario 4.16. *Sea $S \subset E$ es un subespacio cerrado de un espacio de Banach, entonces es S es suplementado (con suplemento cerrado M) si y solo si existe un idempotente acotado P tal que $S = RanP$.*

Demostración. Si existe un tal proyector, tomando $M = \ker P$ se tiene que S, M son cerrados y $E = S \oplus M$. Recíprocamente, si $E = S \oplus M$ con S, M cerrados, dado $z = x + y \in S \oplus M$, definimos $Pz = x$. Es fácil ver que P es un proyector. Como $\mathrm{Ran}P = S$, $\ker P = M$ y ambos son cerrados, el lema anterior nos dice que P es acotado. □

Observación 4.17. Un caso importante de estas consideraciones ocurre cuando S (cerrado) tiene dimensión o codimensión finita, ya que en ese caso siempre tiene un suplemento cerrado, luego existe P proyector acotado con $\mathrm{Ran}P = S$ (Ejercicio 8 Sección 2.6).

4.4. Operador traspuesto

Definición 4.18 (Traspuesto de un operador lineal). Sean E, F espacios normados, $T \in \mathcal{L}(E, F)$, $f \in F'$. Como $f \circ T \in E'$, induce un operador lineal $T' : F' \to E'$ dado por

$$T' f = f \circ T,$$

es decir $T' f(x) = f(Tx)$ para $x \in E$. Este operador se conoce como *operador traspuesto* de T.

Lema 4.19. *Si $T_i \in \mathcal{L}(E, F)$ y $S \in \mathcal{L}(F, G)$ con E, F, G normados, entonces*

1. $T' \in \mathcal{L}(F', E')$ y además $\|T'\| = \|T\|$.
2. $(T_1 + T_2)' = T_1' + T_2'$, $(\lambda T)' = \lambda T'$,

3. $(ST)' = T'S'$,

4. $T''J_E = J_F T$.

Demostración. Como $\|T'f\| = \|f \circ T\| \leqslant \|f\|\,\|T\|$, se deduce $T' \in \mathcal{L}(F', E')$, y además $\|T'\| \leqslant \|T\|$. Pero por otro lado, para cada $x \in B_E$, $f \in B_{F'}$,

$$|f(Tx)| = |T'f(x)| = |J(x)(T'f)| \leqslant \|J(x)\|\,\|T'f\| = \|x\|\,\|T'f\| \leqslant \|T'f\| \leqslant \|T'\|,$$

y entonces (Ejercicio 15 Sección 2.6), tomando máximo sobre $f \in B_{F'}$ obtenemos $\|Tx\| \leqslant \|T'\|$, y tomando supremo sobre $x \in B_E$, obtenemos $\|T\| \leqslant \|T'\|$. Esto es, $\|T'\| = \|T\|$.

Las verificaciones del segundo ítem quedan a cargo del lector, y respecto al tercero, si $g \in G'$, entonces por definición

$$(ST)'g = g(ST) = (gS)T = (S'g)T = T'(S'g) = (T'S')g.$$

Por último, para cada $x \in E$, $f \in F'$,

$$T''J_E(x)f = (T')'(J_E(x))f = (J_E(x)T')f = J_E(x)T'f = J_E(x)fT = fTx = J_F(Tx)f.$$

□

§ Las propiedades que relacionan el rango y el núcleo de T con los de T' son bastante útiles, cabe recordar que el *anulador* de un conjunto $S \subset E$ es

$$S^{\perp} = \{\varphi \in E' : \varphi(s) = 0 \quad \forall s \in S\},$$

mientras que el *preanulador* de un conjunto $M \subset F'$ es

$${}^{\perp}M = \{y \in F : f(y) = 0 \quad \forall f \in M\}.$$

Es fácil ver que ambos conjuntos son cerrados *en norma*. Ver los Ejercicios 9 y 29 en la Sección 2.6 para más propiedades.

Veamos una propiedad importante no trivial del operador traspuesto:

Proposición 4.20. *Si E, F son espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tiene rango cerrado, entonces $Ran(T') = \ker T^{\perp}$ y en particular T' tiene rango cerrado.*

Demostración. Sea $\varphi \in \ker(T)^{\perp}$, es decir $\varphi \in E'$ y $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in \ker T$. Definimos $f : \operatorname{Ran} T \to \mathbb{K}$ como

$$f(Tx) = \varphi(x) \text{ para } x \in E.$$

Está bien definida pues si $Tx = Ty$, entonces $x - y \in \ker T$, luego $\varphi(x) = \varphi(y)$. También es fácil ver que es lineal. Como T tiene rango cerrado, existe $C > 0$ tal que para todo $y = Tx$ en el rango de T, existe $x_0 \in E$ tal que $\|x_0\| \leqslant C\|Tx_0\| = C\|y\|$ (Teorema 4.10). Luego

$$|f(Tx)| = |f(Tx_0)| = |\varphi(x_0)| \leqslant \|\varphi\|\,\|x_0\| \leqslant C\|\varphi\|\,\|Tx_0\| = C\|\varphi\|\,\|Tx\|,$$

es decir $|f(y)| \leqslant C\|\varphi\|\,\|y\|$ en el rango de T. Por el teorema de Hahn-Banach, f se extiende a una $f \in F'$ con la misma norma, y para esta extensión se tiene

$$\varphi(x) = f(Tx) = T'f(x),$$

luego $\varphi = T'f$ y esto dice que $\ker T^{\perp} \subset \mathrm{Ran}(T')$. La otra inclusión es trivial y queda como ejercicio. □

Corolario 4.21. *Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ es inversible entonces $T' \in \mathcal{L}(F',E')$ es inversible.*

Demostración. Si T es inversible, entonces en particular tiene rango cerrado, luego T' tiene rango cerrado pero además $\mathrm{Ran}(T') = \ker(T)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = E'$ por lo recién probado. Por otro lado $\ker(T') = \mathrm{Ran}(T)^{\perp}$ (Ejercicio 12, Sección 4.6), pero como T es sobreyectivo, $\ker(T') = \{0\}$. □

§ Como $T''J_E = J_F T$, si T' es inversible, se sigue que T'' es inversible y luego $Tx = 0$ implica $T''J_E x = J_F T x = 0$ luego $J_E x = 0$, pero entonces $x = 0$, es decir, T resulta inyectivo.

Cuando E es reflexivo es fácil ver si T' es inversible, entonces T es también sobreyectivo: dado $y \in F$, existe $e'' \in E''$ tal que $T''e'' = J_F(y)$ pues T'' es sobreyectivo, pero como E es reflexivo $e'' = J_E(e)$ para algún $e \in E$, luego $J_F(y) = T''J_E(e) = J_F T(e)$ y entonces $y = Te$.

§ Resumiendo, si T' es inversible y E es reflexivo, entonces T es inversible.

4.4.1. El traspuesto en espacios localmente convexos

Como ya mencionamos, podemos considerar en E' la topología ω^* aunque E no sea normado; basta con que E sea un e.v.t. para poder definir esta noción, y resulta así que (E', ω^*) es un espacio localmente convexo. Entonces si $T : E \to F$ es lineal y continuo, y E, F son e.v.t. podemos definir $T'f = f \circ T$ que resulta un elemento de E' por ser composición de dos operadores lineales continuos.

La continuidad de T' es un poco más delicada, pues depende de las topologías que deseemos considerar en E', F'. En el caso particular en el que en ambos miramos la ω^*, es inmediato de la definición que T' resulta continuo.

Sin embargo, consideraremos en la próxima sección operadores lineales $T : E \to F$ donde uno de los espacios es normado y el otro sólo es localmente convexo; allí en cada caso hay que estudiar la continuidad de T' si dotamos a un dual de la topología de la norma (el dual del normado) y al otro de la ω^* (el dual del localmente convexo).

4.5. Transformada de Fourier

En esta sección desarrollamos los fundamentos del operador lineal conocido como *transformada de Fourier*.

Sea $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de Schwartz (Ejercicio 22, Sección 1.5), de funciones *a valores complejos*. Recordemos que la convergencia está dada por la familia de seminormas

$$\|f\|_{\alpha,k} = \sup_{\mathbb{R}^n}(1+\|x\|)^k|\partial^\alpha f(x)|.$$

donde $k \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ es un multí-indice.

Necesitamos algunas comparaciones entre espacios antes de proseguir. Como

$$\|x\|\,|f(x)| \leqslant (1+\|x\|)|f(x)| \leqslant \|f\|_{0,1} < \infty,$$

toda función del espacio de Schwartz tiende a cero en infinito. Entonces

Lema 4.22. *Se tiene una cadena de inclusiones continuas*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

donde el tercer conjunto indica las funciones suaves que tienden a cero en infinito, y el cuarto indica las funciones continuas que tienden a cero en infinito con la norma infinito.

Demostración. Veamos que las inclusiones son continuas; las únicas a verificar son las primeras tres ya que se sobreentiende que los últimos dos espacios tienen la convergencia en norma infinito.

Sea $\mathcal{D}_N \subset \mathcal{D}$ las funciones test con soporte en el compacto $K_N = \{x : \|x\| \leqslant N\}$. Tenemos $i : \mathcal{D} \to \mathcal{S}$ que es lineal, queremos ver que es continuo. Pero por la definición de la topología de $\mathcal{D}$ (un conjunto es entorno abierto de cero si cortado con cada D_{K_N} es abierto), basta probar que $i|_{\mathcal{D}_N}$ es continuo para cada $N \in \mathbb{N}$. Entonces si $f \in \mathcal{D}_N$, $k \in \mathbb{N}$ y α es un multi-índice,

$$\|f\|_{\alpha,k} = \sup_{x\in K_N}(1+\|x\|)^k|\partial^\alpha f(x)| \leqslant (1+N)^k \sup_{x\in K_N}|\partial^\alpha f(x)|$$

así que si $f_n \to 0 \in \mathcal{D}_N$, se tiene $f_n \to 0$ en $\mathcal{S}$, luego i es continua.

Veamos ahora la segunda inclusión $i : \mathcal{S} \to C_0^\infty$. Se tiene para $f \in \mathcal{S}$

$$\sup_{\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha f(x)| = \|f\|_{\alpha,0} < \infty$$

y entonces $f_n \to 0$ en $\mathcal{S}$, $f_n \to 0$ en C_0^∞ (el término de la izquierda da las seminormas de este último espacio).

Respecto de la tercer inclusión, también es muy simple la continuidad ya que la norma infinito es *una* de las seminormas de C_0^∞. □

Observación 4.23. Como las funciones de soporte compacto son densas en L^∞_{loc} (con la norma infinito), entonces también el espacio de Schwarz es denso en L^∞_{loc} y en C_0 (con la norma infinito).

Observación 4.24. Si $i : E \to F$ es una inclusión de espacios normados, $i' : F' \to E'$ dada por $i'(\varphi)(x) = \varphi(i(x)) = \varphi(x)$ da una aplicación entre los duales (no necesariamente inyectiva). Si i es continua, entonces i' es continua en norma.

Ahora bien, si $i : E \to F$ es una inclusión continua de espacios vectoriales topológicos, la misma definición da una aplicación $i' : F' \to E'$ y si les damos a los duales la topología ω^* (convergencia puntual), entonces i' resulta continua: si $\varphi_l \to 0$ ω^* en F', entonces $i'\varphi_l(x) = \varphi_l(x) \xrightarrow{l} 0$ para cada $x \in E$.

Denotando $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ a las medidas de Borel regulares finitas μ en $\mathbb{R}^n$, y por el Teorema de Riesz-Markov (Teorema 2.21), tenemos una cadena de inclusiones continuas

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

donde los espacios los consideramos con la topología ω^*. Por la densidad de $\mathcal{S}$ en C_0, y la densidad de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{S}$ (Proposición 4.26), estas inclusiones *también son densas*.

Observación 4.25 (Multi-índices y la fórmula de Leibniz). Para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, denotamos el combinatorio de multi-indices α,β como

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n}$$

y les damos un orden parcial a los multi-índices tomando el orden coordenada a coordenada,

$$\beta \leqslant \alpha \Longleftrightarrow \beta_i \leqslant \alpha_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

No es difícil probar entonces que si $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, vale la *fórmula de Leibniz* para la derivada del producto,

$$\partial^\alpha fg = \sum_{\nu \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\nu f \, \partial^{\alpha-\nu} g$$

También, dado $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, , x_n)$, denotamos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Probaremos ahora que las funciones de soporte compacto son densas en el espacio de Schwartz, en la topología del espacio de Schwartz.

Proposición 4.26 (C_c^∞ es denso en $\mathcal{S}$). *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe una sucesión de funciones $(\phi_N)_N \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que $\phi_N \xrightarrow{N} f$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sea $j \geq 0$ una función suave tal que $j(x) = 0$ si $\|x\| \geq 2$, y $j(x) = 1$ si $\|x\| \leqslant 1$. Consideramos $\phi_N(x) = f(x)j(x/N)$, claramente ϕ_N es suave y tiene soporte compacto (de hecho, su soporte está contenido en $\|x\| \leqslant 2N$). Veamos que converge a f en el espacio de Schwarz. Para eso, primero observemos que dado $k \in \mathbb{N}_0$, como

$$(1 + \|x\|)(1 + \|x\|)^k |f(x)| \leqslant \|f\|_{0,k+1},$$

entonces $(1+\|x\|)^k|f(x)|$ tiende a cero en infinito, en particular dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x\| \geqslant N \geqslant N_0$ implica

$$(1+\|x\|)^k|f(x)| < \varepsilon/2.$$

Luego como siempre $|1 - j(x/N)| \leqslant 2$,

$$(1+\|x\|)^k|\phi_N(x) - f(x)| = (1+\|x\|)^k|f(x)|\,|1 - j(x/N)|$$

esta cantidad es nula si $\|x\| \leqslant N$ (pues $\|x/N\| \leqslant 1$), y menor a ε si $\|x\| \geqslant N \geq N_0$. Luego $\|\phi_N - f\|_{0,k} < \varepsilon$ si $N \geqslant N_0$.

Ahora dado un multi-indice α, por la fórmula de Leibniz y la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha \phi_N &= \sum_{\nu\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\nu}\left(\frac{1}{N}\right)^{|\alpha|-|\nu|} \partial^\nu f(x)\partial^{\alpha-\nu} j(x/N) \\
&= \sum_{\nu<\alpha} \binom{\alpha}{\nu}\left(\frac{1}{N}\right)^{|\alpha|-|\nu|} \partial^\nu f(x)\partial^{\alpha-\nu} j(x/N) + j(x/N)\partial^\alpha f.
\end{aligned}$$

Con esto,

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha(\phi_N - f)(x)| &= |\partial^\alpha \phi_N(x) - \partial^\alpha f(x)| \\
&\leqslant \sum_{\nu<\alpha} \binom{\alpha}{\nu}\frac{1}{N^{|\alpha|-|\nu|}}|\partial^\nu f(x)\partial^{\alpha-\nu} j(x/N)| + |j(x/N) - 1||\partial^\alpha f(x)| \\
&< \frac{1}{N}\sum_{\nu<\alpha} \binom{\alpha}{\nu}|\partial^\nu f(x)|\,|\partial^{\alpha-\nu} j(x/N)| + |j(x/N) - 1||\partial^\alpha f(x)|.
\end{aligned}$$

La última parte, aún multiplicada por $(1+\|x\|)^k$, la podemos hacer tan pequeña como deseemos en $\mathbb{R}^n$, para $N \geqslant N_0$, repitiendo el argumento que usamos para acotar f.

Veamos que la primer parte de la suma (tambien multiplicada por este factor adicional) está acotada en $\mathbb{R}^n$; como está multiplicada por N^{-1}, habremos entonces probado que $\|\phi_N - f\|_{\alpha,k} \xrightarrow{N} 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo multi-indice α.

Notemos que $\partial^\beta j(x/N)$ se anula en $\|x\| \geq 2N$, luego hay una cota uniforme

$$M = \max_{\beta\leqslant\alpha} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |\partial^\beta j(y)| < \infty,$$

y entonces

$$\begin{aligned}
(1+\|x\|^k)\sum_{\nu<\alpha}\binom{\alpha}{\nu}|\partial^\nu f(x)|\,|\partial^{\alpha-\nu} j(x/N)| &\leqslant M\sum_{\nu<\alpha}\binom{\alpha}{\nu}(1+\|x\|)^k|\partial^\nu f(x)| \\
&\leqslant M\sum_{\nu<\alpha}\binom{\alpha}{\nu}\|f\|_{\nu,k}.
\end{aligned}$$

□

§ Notamos ahora que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $1 \leqslant p < \infty$, existe $K = K(n,p) \in \mathbb{N}$ tal que

$$I = I(n,p) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x\|)^{Kp}}\, dx < \infty.$$

Entonces, para cada cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|x\|)^{Kp} |f(x)|^p \frac{1}{(1+\|x\|)^{Kp}}\, dx \leqslant I \|f\|_{0,K}^p < \infty. \tag{4.3}$$

Observación 4.27. La cota recién obtenida nos dice entonces que para toda $f \in \mathcal{S}$, se tiene

$$\|f\|_p \leqslant C \|f\|_{0,K},$$

donde $\|f\|_{0,K} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+\|x\|)^K |f(x)|$, y las constantes C, K dependen únicamente de n, p. Se deduce entonces que también

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$$

de manera continua para cada $1 \leqslant p < \infty$ y la inclusión es además densa en L^p (con la norma p) pues C_c^∞ es denso en L^p.

Dualizando también tenemos una inclusión $(L^p)' \subset \mathcal{S}'$, pero en base a la identificación $(L^p)' = L^q$ dada por la integral, podemos dar más precisión a esta afirmación, cosa que haremos más adelante (Lema 4.40).

4.5.1. La transformada como operador de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Por la observación anterior, toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es integrable. Definimos entonces la *transformada de Fourier* de f como

$$\mathcal{F} f(u) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\, x\cdot u} f(x)\, dx.$$

En ocasiones es práctico usar la notación

$$\widehat{f} = \mathcal{F} f.$$

Asimismo, definimos la *antitransformada de Fourier* de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como

$$\mathcal{F}^{-1} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\, x\cdot u} f(u)\, du$$

y denotamos

$$\check{f} = \mathcal{F}^{-1} f.$$

Es fácil ver que $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ son operadores lineales.

Observación 4.28. Sean $P, Q : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ los operadores *posición* y *momento*, dados respectivamente por $Pf(x) = xf(x)$, $Qf(x) = if'(x)$. Entonces ambos son operadores lineales, y además

$$||Qf||_{\alpha,k} = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^k|\partial^\alpha f'(x)| = ||f||_{\alpha+1,k}$$

así que Q es continuo en el espacio de Schwartz. También notamos que

$$\partial^\alpha xf = \alpha f^{(\alpha-1)}(x) + xf^{(\alpha)}(x) \quad \forall\alpha \in \mathbb{N}_0. \tag{4.4}$$

Luego, como $|x| \leqslant 1 + |x|$,

$$\begin{aligned} ||Pf||_{\alpha,k} &= \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^k|\partial^\alpha xf(x)| \\ &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}}[(1+|x|^k)\alpha|\partial^{\alpha-1}f(x) + (1+|x|)^{k+1}|\partial^\alpha f(x)|] \\ &\leqslant \alpha||f||_{\alpha-1,k} + ||f||_{\alpha,k+1}. \end{aligned}$$

Esto prueba que P también es continuo en el espacio de Schwartz.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}\mathcal{F}f(u) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ixu}(-ix)f(x)\,dx \\ &= -i\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ixu}\,xf(x)\,dx = -i\mathcal{F}[Pf](u). \end{aligned}$$

En términos de P y Q,

$$Q\widehat{f} = \widehat{Pf}, \text{ o bien } Q\mathcal{F} = \mathcal{F}P \text{ en } \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

es decir que la tranformada de Fourier intercambia los operadores posición y momento.

Veremos ahora que la transformada de Fourier es continua, para ello establecemos primero una identidad que generaliza la observación sobre posición y momento.

Notemos que

$$|x^\alpha| = |x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}| \leqslant ||x||^{|\alpha|}$$

y que

$$\partial_u^\alpha\left(e^{-ix\cdot u}\right) = e^{-ix\cdot u}(-ix)^\alpha = e^{-ix\cdot u}(-i)^{|\alpha|}x^\alpha.$$

Lema 4.29. *El sistema de seminormas original de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es equivalente al sistema*

$$q_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x|^\beta|\partial^\alpha f(x)|,$$

donde α,β son multi-índices.

Demostración. Observamos primero que $q_{\alpha,0} = \|\cdot\|_{\alpha,0}$. Ahora si β es no trivial,

$$|x|^\beta < 1 + \|x\|^{|\beta|} \leqslant (1+\|x\|)^{|\beta|},$$

luego

$$q_{\alpha,\beta}(f) < \|f\|_{\alpha,|\beta|} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+\|x\|)^{|\beta|}|\partial^\alpha f(x)|.$$

Para probar la otra implicación, notemos primero que como todas las normas son equivalentes en $\mathbb{R}^n$, existe para cada $j \in \mathbb{N}$ una constante $c_j = C(j,n)$ tal que

$$\|x\| = (\sum_i |x_i|^2)^{1/2} \leqslant c_j\|x\|_j = c_j(\sum_i |x_i|^j)^{1/j}.$$

Luego si $k \in \mathbb{N}$,

$$(1+\|x\|)^k = 1 + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j}\|x\|^j \leqslant 1 + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} c_j^j \sum_{i=1}^n |x_i|^j,$$

y asi, multiplicando por $|\partial^\alpha f(x)|$ y tomando supremo,

$$\|f\|_{\alpha,k} \leqslant q_{\alpha,0}(f) + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} c_j^j \sum_{i=1}^n q_{\alpha,\beta_{ij}}(f),$$

donde β_{ij} es el multi-índice que sólo tiene j en el lugar i-ésimo, esto es $\beta_{ij} = (0,\ldots,0,j,0,\ldots,0)$. □

Lema 4.30. *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, α,β multi-índices. Entonces*

1. $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2. *Si $k \in \mathbb{N}$, entonces existen: $\alpha_j \in \mathbb{N}_0^n, k_j \in \mathbb{N}_0$, $t_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1\ldots M$) tales que*

$$(1+\|x\|)^k|\partial^\alpha(x^\beta f(x))| \leqslant \sum_{j=1}^M t_j\|f\|_{\alpha_j,k_j} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

   En particular $x^\beta f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

3. *Para cada $u \in \mathbb{R}^n$, $g(x) = e^{-ix\cdot u}f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

4. *Si α es no nulo, entonces $\int_{\mathbb{R}^n}\partial^\alpha f = 0$.*

5. *Si $g,h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\,\partial^\alpha h = (-1)^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} h\,\partial^\alpha g.$$

Demostración. De la definición: $\|\partial^\alpha f\|_{\beta,k} = \|f\|_{\beta+\alpha,k}$ y esto prueba la primera afirmación.

Razonando como en la ecuación (4.4), usando la regla de Leibniz para el producto, y la desigualdad $|x_i|^\nu \leqslant (1+\|x\|)^{|\nu|}$ para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, obtenemos la desigualdad del segundo item.

Por la observación previa al lema,

$$\begin{aligned}(1+\|x\|)^k|\partial_x^\alpha(e^{-i\,x\cdot u}f(x))| &\leqslant \sum_{\nu\leq\alpha}\binom{\alpha}{\nu}(1+\|x\|)^k|e^{-i\,x\cdot u}(-iu)^\nu\partial^{\alpha-\nu}f(x)| \\ &\leqslant \sum_{\nu\leq\alpha}\binom{\alpha}{\nu}(1+\|x\|)^k|u|^{|\nu|}|\partial^{\alpha-\nu}f(x)| \\ &\leqslant \sum_{\nu\leq\alpha}\binom{\alpha}{\nu}\|u\|^\nu\|f\|_{\alpha-\nu,k}\end{aligned}$$

y esto prueba la tercera afirmación.

Por el primer item de este lema, basta probar la última afirmación para una derivada parcial. Por la densidad, basta también probarlo para una función f de soporte compacto, supongamos entonces que el soporte de f está estrictamente en el cubo $C_R^n = [-R,R]^n$. Entonces por el Teorema de Fubini,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \int\limits_{C_R^{n-1}}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \int\limits_{C_R^{n-1}}[f(x_1,\ldots,R,\ldots)-f(x_1,\ldots,-R,\ldots)] = \int\limits_{C_R^{n-1}} 0-0 = 0,$$

puesto que $f(x_1,\ldots,\pm R,\ldots)\in\partial C_R^n$ y allí f es nula.

La prueba del último item es por inducción. Por lo que recién probamos,

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial(gh)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial g}{\partial x_i}h + g\frac{\partial h}{\partial x_i},$$

luego $\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial g}{\partial x_i}h = -\int_{\mathbb{R}^n}g\frac{\partial h}{\partial x_i}$. Con el mismo razonamiento, derivando $\frac{\partial g}{\partial x_i}h$ respecto de x_j y derivando $g\frac{\partial h}{\partial x_j}$ respecto de x_i, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\,x_j}h + \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial x_j} = 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial x_j} + g\frac{\partial^2 h}{\partial x_j\,x_i} = 0.$$

Combinando ambas identidades e intercambiando derivadas parciales, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\,x_j}h = \int_{\mathbb{R}^n}g\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\,x_j}.$$

□

Teorema 4.31. *Si* $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$ *son multi-índices y* $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *entonces*

$$\mathcal{F}[\partial_x^\alpha\left((-ix)^\beta f(x)\right)] = (iu)^\alpha\partial_u^\beta(\mathcal{F}f),$$

y además $\mathcal{F},\mathcal{F}^{-1}:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *son acotados.*

Demostración. Notemos que $e^{-ix\cdot u}(-ix)^\beta f(x)$ está en el espacio de Schwartz (consecuencia de los items b) y c) del lema previo). Entonces, por el último item del mismo lema,

$$\begin{aligned}
(iu)^\alpha \partial_u^\beta \widehat{f}(u) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (iu)^\alpha e^{-ix\cdot u} (-ix)^\beta f(x) dx \\
&= \frac{(-1)^\alpha}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (-iu)^\alpha e^{-ix\cdot u} (-ix)^\beta f(x) dx \\
&= \frac{(-1)^\alpha}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha \{e^{-ix\cdot u}\} (-ix)^\beta f(x) dx \\
&= \frac{(-1)^{2\alpha}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot u} \partial_x^\alpha \{(-ix)^\beta f(x)\} dx \\
&= \mathcal{F}[\partial_x^\alpha \{(-ix)^\beta f(x)\}](u)
\end{aligned}$$

que es la identidad que queríamos probar.

De la propiedad recién probada, obtenemos la cota

$$\begin{aligned}
|u|^{|\alpha|} |\partial^\beta \widehat{f}(u)| &\leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ix\cdot u} \partial^\alpha (-ix)^\beta f(x)| dx \\
&= C \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha (x^\beta f(x))| = C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x\|)^k} (1+\|x\|)^k |\partial^\alpha (x^\beta f(x))| \\
&\leqslant C \sum_{j=1}^{M} t_j \|f\|_{\alpha_j,k_j} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x\|)^k}
\end{aligned}$$

por la segunda propiedad del lema previo, donde k está elegido suficientemente grande como para que la integral sea convergente. Tomando supremo sobre $u \in \mathbb{R}^n$, tenemos

$$q_{\beta,\alpha}(\mathcal{F} f) \leqslant C \sum_{j=1}^{M} t_j \|f\|_{\alpha_j,k_j}$$

y como las $q_{\beta,\alpha}$ forman un sistema equivalente de seminormas del espacio de Schwartz, se deduce que la transformada de Fourier es continua. La demostración para la anti-transformada es casi idéntica y la omitimos. □

Observación 4.32. El resultado anterior puede reescribirse usando los operadores *posición parcial* y *momento parcial*, $Q^\alpha, P^\beta : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (donde α,β son multi-indices) y

$$P^\beta f(x) = x^\beta f(x), \quad Q^\alpha f(x) = i^\alpha \partial^\alpha f(x).$$

Ambos son operadores lineales acotados en el espacio de Schwartz, y la identidad del teorema anterior se reescribe como

$$\mathcal{F} Q^\alpha P^\beta = (-1)^\alpha P^\alpha Q^\beta \mathcal{F}.$$

A continuación probaremos que en el espacio de Schwartz, transformada y anti-transformada son una la inversa de la otra. Para ello primero necesitamos algunos observaciones, de resultados de las series de Fourier que dejamos como ejercicios.

Observación 4.33. [Series de Fourier en intervalos y cubos] Sabemos que

$$e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

es una b.o.n. de $L^2[-\pi,\pi]$. Luego si $f \in L^2[-N\pi, N\pi]$, $y \mapsto f(Ny) \in L^2[-\pi,\pi]$ y entonces

$$f(Ny) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} f(Nz) \frac{e^{-ikz}}{\sqrt{2\pi}} dx \; e_k(y)$$

donde la serie converge uniformemente si f es continua. Cambiando de variable en la integral $z \mapsto x/N$, y en la variable $Ny \mapsto u$, tenemos

$$f(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi N} \int_{-N\pi}^{N\pi} f(x) e^{-i\frac{k}{N}x} dx \; e^{i\frac{k}{N}u}.$$

Esto prueba que

$$e_k(x) = \frac{e^{i\,kx}}{\sqrt{2\pi N}}, \quad k \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}$$

es una b.o.n. de $L^2[-N\pi, N\pi]$. Denotando al cubo $C_N = [-N\pi, N\pi]^n \subset \mathbb{R}^n$, se sigue que

$$e_{\mathbf{k}}(x) = \frac{e^{i\,\mathbf{k}\cdot x}}{(2\pi N)^{n/2}}, \quad \mathbf{k} \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}^n$$

es una b.o.n. de $L^2(C_N)$ (Ejercicio 14, Sección 5.5).

Teorema 4.34 (Teorema de inversión en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} f = f = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} f$$

y en particular $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ son isomorfimos topológicos del espacio de Schwartz.

Demostración. Por la Proposición 4.26 podemos suponer que $f \in C_c^\infty$. Por la observación previa, tomando N suficientemente grande para que $sop(f) \subset C_N$, tenemos que, uniformemente en C_N

$$\begin{aligned}
f(u) &= \sum_{\mathbf{k}\in\frac{1}{N}\mathbb{Z}^n} \frac{1}{(2\pi N)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\mathbf{k}\cdot x} dx \; e^{i\,\mathbf{k}\cdot u} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{\mathbf{k}\in\frac{1}{N}\mathbb{Z}^n} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\mathbf{k}\cdot x} dx \right\} e^{i\,\mathbf{k}\cdot u} \frac{1}{N^n} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{\mathbf{k}\in\frac{1}{N}\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\mathbf{k}) \, e^{i\,\mathbf{k}\cdot u} \frac{1}{N^n}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, si calculamos la integral de Riemann de $\widehat{f}$ (que es una función suave que tiende a cero en infinito) sobre $\mathbb{R}^n$ usando cubos de lado $1/N$ centrados en coordenadas $\mathbf{k} \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}^n$, obtenemos exactamente la última expresión de la derecha. Entonces, haciendo tender $N \to \infty$,

$$f(u) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{\mathbf{k}\in\frac{1}{N}\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\mathbf{k})\, e^{i\,\mathbf{k}\cdot u} \frac{1}{N^n} \xrightarrow{N} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\,x\cdot u} \widehat{f}(x)\, dx = \mathcal{F}^{-1}\widehat{f}(u) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} f(u).$$

Hemos probado que $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}$ es la identidad del espacio de Schwartz. La otra igualdad tiene una demostación idéntica. □

§ La observación sobre los operadores posición y momento puede reescribirse ahora como

$$\mathcal{F} P \mathcal{F}^{-1} = Q$$

es decir, uno es conjugado por un operador inversible del otro (es decir que "salvo un cambio de base" se trata del mismo operador).

Observación 4.35. Si $f \in \mathcal{S}$, entonces directamente de la definición, podemos ver que conjugar $\widehat{f}$ es lo mismo que antitransformar la función conjugada de f, esto es

$$\overline{\widehat{f}} = \check{\overline{f}}.$$

4.5.2. Extensión de $\mathcal{F}$ a espacios clásicos de funciones

Comenzamos con un lema sobre la norma de L^2, cuya prueba se apoya en la construcción del teorema de inversión.

Lema 4.36 (Fórmulas de Plancherel). *Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(x)|^2\, dx$$

y además

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\, g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \widehat{g}(x). \tag{4.5}$$

Demostración. Nuevamente, basta probarlo para funciones de soporte compacto. Escribimos como en la demostración del teorema de inversión

$$f(u) = \sum_{\mathbf{k}\in\frac{1}{N}\mathbb{Z}^n} \langle f, e_{\mathbf{k}}\rangle e_{\mathbf{k}}(u).$$

Por el Teorema de Bessel, razonando como antes, calculamos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|^2\, du = \int_{C_N} |f(u)|^2\, du = \|f\|^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\frac{1}{N}\mathbb{Z}^n} |\langle f, e_{\mathbf{k}}\rangle|^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\frac{1}{N}\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(\mathbf{k})|^2 \frac{1}{N^n} \xrightarrow{N} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(x)|^2\, dx.$$

Polarizando, obtenemos para $f, h \in \mathcal{S}$, $\langle \mathcal{F} f, \mathcal{F} h\rangle = \langle f, h\rangle$, es decir

$$\int \widehat{f}\,\overline{\widehat{\overline{h}}} = \int f\,\overline{h}$$

Tomando $h = \overline{\widehat{g}}$ se tiene $\overline{h} = \widehat{g}$. Pero por otro lado, y por la Observación 4.35,

$$\overline{\widehat{\overline{h}}} = \check{\overline{h}} = \check{\widehat{g}} = g,$$

y esto prueba la segunda afirmación del lema. □

Extensión a distribuciones temperadas

Dada $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, consideramos la inclusión *traspuesta* $T_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} fg$. Notemos que

$$|T_g(f)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,|g(x)| dx \leqslant I\,\|g\|_\infty \|f\|_{0,K}$$

razonando como en (4.3). Esto dice que $T_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, y nos da un operador lineal $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ que resulta inyectivo, puesto que $T_g(\overline{g}) = \int_{\mathbb{R}^n} |g|^2 > 0$ si $g \neq 0$. Tenemos entonces una inclusión natural

$$T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

que es continua si dotamos a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ de la topologia ω^*, puesto que si tomamos $g_n \to 0$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, y calculamos

$$|T_{g_n}(f)| \leqslant I\,\|g_n\|_\infty \|f\|_{0,K} = I\|f\|_{0,K}\|g_n\|_{0,0} \xrightarrow{n} 0$$

para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ fija.

Definición 4.37 (Transformada de Fourier traspuesta). Sea $\mathcal{F}' : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ el traspuesto de $\mathcal{F}$. Para $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ denotamos $\widehat{\varphi} = \mathcal{F}' \circ \varphi$,

$$\widehat{\varphi}(f) = \varphi(\widehat{f}), \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 4.38. *Sea $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ la inclusión natural, donde $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tiene la topologia ω^*.*

1. *T es lineal continuo e inyectivo.*
2. *$\mathcal{F}' \circ T = T \circ \mathcal{F}$, es decir $\mathcal{F}' T_g = T_{\widehat{g}}$ para toda $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*
3. *$\mathcal{F}' : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es biyectivo y continuo, su inversa es $(\mathcal{F}^{-1})'$.*

Demostración. Ya vimos que T es lineal inyectivo y continuo. Para $g, f \in \mathcal{S}$, calculamos usando el lema anterior

$$(\mathcal{F}' \circ T)(g)(f) = (\mathcal{F}' T_g)f = (T_g \circ \mathcal{F})(f) = \int g\widehat{f} = \int \widehat{g}f = T_{\widehat{g}}(f) = (T \circ \mathcal{F})(g)(f),$$

luego $\mathcal{F}' \circ T = T \circ \mathcal{F}$.

La continuidad de $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ extendidos es inmediata de la definición: si $\varphi_n \to 0$ en la topología ω^*, entonces para toda $f \in \mathcal{S}$,

$$\mathcal{F}\varphi_n(f) = \widehat{\varphi_n}(f) = \varphi_n(\widehat{f}) \xrightarrow{n} 0.$$

Por otro lado, como también debe ser $\mathcal{F}^{-1}\varphi(f) = \check{\varphi}(f) = \varphi(\check{f})$ para toda $f \in \mathcal{S}$, entonces

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi(f) = \widehat{\mathcal{F}^{-1}\varphi}(f) = \mathcal{F}^{-1}\varphi(\widehat{f}) = \varphi(\check{\widehat{f}}) = \varphi(f),$$

luego $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi = \varphi$ para toda $\varphi \in \mathcal{S}'$. La otra composición se calcula de manera similar. □

Observación 4.39. La inclusión $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ también es densa. No usaremos este resultado en lo que sigue; una demostración usando la convolución queda para el lector (Ejercicio 22, Sección 4.6).

4.5.3. Extensión a espacios L^p

§ De la misma manera que el espacio de Schwartz se puede incluir continua e inyectivamente en su dual, lo mismo ocurre con las funciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Lema 4.40. *Dado $1 \leqslant p \leqslant \infty$, sea $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Definimos T_g como $T_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\,g$. Entonces $T_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es lineal, inyectivo y continuo si le damos a las distribuciones la topología ω^*.*

Demostración. El operador T es claramente lineal. Si $p = 1$,

$$|T_g(f)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |g|\,|f| \leqslant \|g\|_1 \|f\|_\infty = \|g\|_1 \|f\|_{0,0}$$

lo que nos dice que $T_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y además es T es continuo ya que si $g_n \to 0$ en L^1 entonces para cada $f \in \mathcal{S}$ fija, $Tg_n = T_{g_n} \to 0$.

Si $p > 1$, se tiene $1 \leqslant q < \infty$, luego existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $(1 + \|x\|)^{Kq}$ es integrable en $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\|f\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + \|x\|)^{Kq}} \{(1 + \|x\|)^K f(x)\}^q \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|f\|_{0,K}^q \frac{1}{(1 + \|x\|)^{Kq}},$$

luego $\|f\|_q \leqslant C\|f\|_{0,K}$ y así

$$|T_g(f)| \leqslant \|g\|_p \|f\|_q \leqslant C\|g\|_p \|f\|_{0,K}$$

y nuevamente $T_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y T es continuo.

Sobre la inyectividad: si $p < \infty$, tomando una sucesión de funciones en el espacio de Schwartz que converja en $\|\cdot\|_q$ a $f = \operatorname{sgn}(g)|g|^{p-1}$ (que es una función de L^q), tenemos

$$\left|T_g(f_n) - \int_{\mathbb{R}^n} |g|^p\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} g\{f_n - f\}\right| \leqslant \|g\|_p \|f_n - f\|_q,$$

luego $\lim_n T_g(f_n) = \|g\|_p^p > 0$ si $g \neq 0$, luego T es inyectivo. Si $p = \infty$, tomamos una sucesión de funciones $f_n \in \mathcal{S}$ tales que

$$f_n \xrightarrow{n} \frac{\overline{g}}{(1 + \|x\|)^K}$$

en L^1, donde K se elige para que

$$R = \int \frac{|g|^2}{(1 + \|x\|)^K} < \infty.$$

Nuevamente se tiene $\lim_n T_g(f_n) = R > 0$ si $g \neq 0$, luego T es inyectivo. □

§ Hacemos notar al lector que esta operación no es otra que la trasposición de la inclusión continua $i : \mathcal{S} \hookrightarrow L^p$ demostrada en la Observación 4.27, seguida de la identificación $(L^q)' = L^p$ que se realiza en efecto trasponiendo en la integral sobre $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.41 (Riemann-Lebesgue). *La transformada de Fourier tiene una única extensión continua $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$, que es la restricción de la transformada en las distribuciones temperadas. Además vale la fórmula*

$$\widehat{f}(u) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iu\cdot x} f(x)\, dx$$

donde la integral es en el sentido de Lebesgue.

Demostración. Para f en el espacio de Schwartz, $\widehat{f} \in S(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$, y además

$$\|\mathcal{F} f\|_\infty \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_1.$$

Así que $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$ es acotado. Pero $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ de manera densa (con la norma $\|\cdot\|_1$), y también C_0 es completo con la norma infinito. Luego $\mathcal{F}$ se extiende por densidad a un único operador lineal acotado entre L^1 y C_0.

Dada $g \in L^1$, tomamos $g_n \in \mathcal{S}$ tal que $\|g_n - g\|_1 \to 0$ y entonces $\|\widehat{g_n} - \widehat{g}\|_\infty \to 0$ por la definición de la extensión. Así que

$$\left|\lim_n \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g_n} f - \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g} f\right| \leqslant \|\widehat{g_n} - \widehat{g}\|_\infty \|f\|_1 \xrightarrow{n} 0 \tag{4.6}$$

para toda $f \in \mathcal{S}$. Similarmente,

$$\left|\lim_n \int_{\mathbb{R}^n} g_n \widehat{f} - \int_{\mathbb{R}^n} g\widehat{f}\right| \leqslant \|g_n - g\|_1 \|\widehat{f}\|_\infty \xrightarrow{n} 0 \tag{4.7}$$

Entonces

$$T_{\widehat{g}} f = \int \widehat{g} f = \int \lim_n \widehat{g_n} f \overset{(4,6)}{=} \lim_n \int \widehat{g_n} f \overset{(4,5)}{=} \lim_n \int g_n \widehat{f} \overset{(4,7)}{=} \int g \widehat{f} = \widehat{T_g}(f)$$

Esto prueba que si $g \in L^1$, su transformada (mapeada por T dentro de $\mathcal{S}'$) coincide con la transformada que habiamos definido en el espacio de distribuciones.

Para probar la fórmula enunciada, si $f \in L^1$, entonces existe una sucesión de funciones $(f_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tales que $\|f - f_n\|_1 \to 0$, y por definición de la transformada extendida, $\|\widehat{f} - \widehat{f_n}\|_\infty \to 0$. Pero entonces

$$\widehat{f}(u) = \lim_n \widehat{f_n}(u) = \lim_n \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-iu\cdot x} f_n(x)\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-iu\cdot x} f(x)\, dx,$$

donde la última identidad es porque la convergencia en L^1 implica la convergencia de las integrales. □

Observación 4.42 (El rango de $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$). Para $n \geq 2$, puede probarse que $f(x)\sqrt{1 - \|x\|^2}\chi_{B_1(0)} \in C_0$ pero no está en el rango de la transformada; luego la misma no es sobreyectiva. Para $n = 1$ se puede considerar cualquier función impar que tienda a cero muy lentamente (del orden de $\ln(x)^{-1}$) para tener la misma afirmación (ver [15, pag. 34]). El rango de la transformada de Fourier con dominio en L^1 es actualmente un problema abierto.

Observación 4.43 (Operadores unitarios en espacios de Hilbert). Diremos que $U \in \mathcal{L}(H)$, con H espacio de Hilbert, es *unitario* si se verifica cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes (invitamos al lector a verificarlo):

1. U es inversible y $U^* = U^{-1}$ ($UU^* = U^*U = 1$)
2. U es inversible y además, $UU^* = 1$ ó $U^*U = 1$
3. U es inversible y $\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x \in H$
4. U es inversible y $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in H$.
5. U verifica $\|Ux\| = \|x\|$, $\|U^*x\| = \|x\|$ para todo $x \in H$.

§ Respecto de la última caracterización, puede reescribirse la condición $\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x \in H$ como $U^*U = 1$, en este caso se dice que U es una *isometría*. Claramente $U^*Ux = x$ para todo $x \in H$ dice que U es inyectivo (y que U^* es sobreyectivo).

En cambio, la condición $\|U^*x\| = \|x\|$ para todo $x \in H$ se reescribe como $UU^* = 1$, en este caso se dice que U es una *coisometría*. Aquí, la condición $UU^*x = x$ para todo $x \in H$ dice que U es sobreyectivo (y que U^* es inyectivo).

Notemos que un operador unitario es ambas cosas, pero en dimensión finita basta con pedir una de las dos condiciones.

Corolario 4.44 (Teorema de Plancherel). *La transformada de Fourier se extiende de manera única a un operador unitario de $H = L^2(\mathbb{R}^n)$ cuya inversa es la extensión de $\mathcal{F}^{-1}$, y valen las fórmulas de Plancherel (4.5).*

Esta extensión es la restricción de la transformada de las distribuciones temperadas y en particular es el mismo operador en la restricción a $L^1 \cap L^2$.

Además, para cada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, si

$$\widehat{f_R}(u) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\|x\| \leqslant R} e^{-iu\cdot x} f(x)\,dx = \mathcal{F}(\chi_{B_R} f)$$

se tiene $\|\widehat{f_R} - \hat{f}\|_2 \xrightarrow{R\to\infty} 0$.

Demostración. La extensión existe y es única por la densidad del espacio de Schwartz en L^2 (Observaciones 4.27 y 3.6).

Que la extensión es unitaria se deduce directamente del Lema 4.36; que uno es la inversa del otro también es evidente a partir del teorema de inversión en el espacio de Schwartz, y la validez de las fórmulas de Plancherel también se sigue por la densidad.

Dada $g \in L^2$, tomamos $g_n \in \mathcal{S}$ tal que $g_n \to g$ en L^2, entonces $\widehat{g_n} \to \widehat{g}$ en L^2 y si $f \in \mathcal{S}$,

$$\left| \int \widehat{g_n} f - \int \widehat{g} f \right| \leqslant \|\widehat{g_n} - \widehat{g}\|_2 \, \|f\|_2 \xrightarrow{n} 0$$

y también

$$\left| \int g_n \widehat{f} - \int g \widehat{f} \right| \leqslant \|g_n - g\|_2 \, \|\widehat{f}\|_2 \xrightarrow{n} 0$$

así que nuevamente

$$T_{\widehat{g}} f = \int \widehat{g} f = \int \lim_n \widehat{g_n}\, f = \lim_n \int \widehat{g_n}\, f = \lim_n \int g_n\, \widehat{f} = \int g\, \widehat{f} = \widehat{T_g}(f)$$

prueba que si $g \in L^2$, su transformada (mapeada por T dentro de $\mathcal{S}'$) es la transformada que habiamos definido en el espacio de distribuciones.

Ahora bien, si $g \in L^1 \cap L^2$, entonces tenemos que

$$T\mathcal{F}_1 g = \mathcal{F}' T g = T\mathcal{F}_2 g$$

donde $\mathcal{F}_1$ (resp. $\mathcal{F}_2$) denota la transformada definida en L^1 (resp. L^2). Como T es inyectivo en L^2, es inyectivo en la intersección, luego ambas transformadas coinciden en la intersección.

Tomando la función característica de la bola de radio R, se verifica $\chi_{B_R} f \in L^1 \cap L^2$, así que su transformada está bien definida y es un elemento de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ por el Teorema de Riemann-Lebesgue. Además $\chi_R f \to f$ en L^2, pero por el Teorema 4.36, también se tiene la convergencia para las transformadas, que es exactamente lo que dice el enunciado. □

§ Se puede extender la transformada de Fourier a los espacios $L^q(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leqslant q \leqslant 2$, obteniendo un operador lineal inyectivo y acotado

$$\mathcal{F} : L^q(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n),$$

y esta extensión, por la identidad de Plancherel, verifica

$$\int (\mathcal{F} g)\, f = \int g \widehat{f} \qquad \forall g \in L^q, f \in \mathcal{S}.$$

Es decir, sigue siendo la restricción de la transformada en las distribuciones temperadas, con lo cual coincide en $L^{q_1} \cap L^{q_2}$ para todo $1 \leqslant q_1, q_2 \leqslant 2$. Omitimos la prueba del resultado de extensión (y la cota para la norma), que requiere de la noción de interpolación compleja de operadores (ver [11], Theorem IX.8), el resultado preciso se enuncia a continuación:

Teorema 4.45 (Desigualdad de Hausdorff-Young). *Si* $1 \leqslant q \leqslant 2$ *y* $1/p + 1/q = 1$, *entonces la transformada de Fourier tiene una extensión continua* $\mathcal{F} : L^q(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ *tal que*

$$\|\widehat{f}\|_p \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n(1/q - 1/2)}} \|f\|_q$$

para toda $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$.

Medidas y funciones de tipo positivo

Definición 4.46 (Operadores positivos). Un operador lineal $A : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ es *positivo* si

$$\langle A\eta, \eta \rangle \geqslant 0 \qquad \forall\, \eta \in \mathbb{C}^d.$$

Si $a = (a_{ij})_{i,j} \in M_d(\mathbb{C})$ denota la matriz de A en la base canónica, que A sea positivo es equivalente a que

$$xax^t \geqslant 0 \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{C}^d.$$

En particular la matriz a es simétrica (decimos que el operador A es autoadjunto), y entonces existen una base de autovectores $\{\eta_i\}_{i=1\ldots d} \in \mathbb{C}^d$, y d autovalores reales λ_i (contados con multiplicidad). Por la condición de positividad, debe ser $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 1 \ldots d$,

$$0 \leqslant \langle A\eta_i, \eta_i \rangle = \lambda_i \|\eta_i\|^2.$$

Y recíprocamente, toda matriz diagonalizable con autovalores no negativos define un operador positivo en $\mathbb{C}^d$.

Definición 4.47 (Funciones de tipo positivo). Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es continua, decimos que f es de *de tipo positivo* si para todo $d \in \mathbb{N}$, y toda d-upla $(u_i)_{i=1\ldots d} \in \mathbb{R}^n$, la matriz $a_{ij} = f(\lambda_i - \lambda_j) \in M_d(\mathbb{C})$ es positiva.

Observación 4.48. Si $f \in C(\mathbb{R}^n)$ es continua y de tipo positivo, entonces tomando $d = 1$, $u = 0 \in \mathbb{R}^n$, $\eta = 1 \in \mathbb{R}$ se deduce que $f(0) \geqslant 0$. Mientras que tomando $d = 2$, $u_1 = u, u_2 = 0 \in \mathbb{R}^n$ se tiene que la matriz

$$\begin{pmatrix} f(0) & f(u) \\ f(-u) & f(0) \end{pmatrix}$$

tiene que ser definida positiva, con lo cual tiene que ser simétrica y tener determinante positivo. Esto implica que $f(u) = \overline{f(-u)}$ y que $|f(u)| \leqslant f(0)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. En particular f resulta acotada.

Extendiendo en cierto sentido el resultado para la transformada de Fourier en L^1, tenemos el siguiente resultado para transformar medidas finitas.

Lema 4.49 (Transformada de medidas). *Si μ es una mediada finita y positiva en $\mathbb{R}^n$, su tranformada de Fourier*

$$\widehat{\mu}(u) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\,u\cdot x} d\mu(x)$$

es una función continua de tipo positivo, en particular acotada. Esta transformada coincide con la transformada de las distribuciones temperadas.

Demostración. La transformada es continua puesto que si $u_n \to u$ en $\mathbb{R}^n$ entonces $\widehat{\mu}(u_n) \to \widehat{\mu}(u)$ por el teorema de convergencia dominada. Por otro lado, si $u_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1 \dots d)$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{\mu}(u_i - u_j)\eta, \eta \rangle &= \sum_{i,j=1}^{d} \widehat{u}(u_i - u_j)\eta_i\overline{\eta_j} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^{d} e^{-i\,(u_i-u_j)\cdot x}\, \eta_i\overline{\eta_j}\, d\mu(x) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^{d} e^{-i\,u_i\cdot x}\,\eta_i\, \overline{e^{-i\,u_j\cdot x}\,\eta_j}\, d\mu(x) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{i=1}^{d} e^{-i\,u_i\cdot x}\,\eta_i \right|^2 d\mu(x) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Tomamos $f \in C_c^\infty$ y calculamos

$$\begin{aligned}
\int f(u)\widehat{\mu}(u)\, du &= \int f(u) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-i\,u\cdot x} d\mu(x)\, du \\
&= \int \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(u) e^{-i\,u\cdot x} du \right\} d\mu(x) \\
&= \int \widehat{f}(x)\, d\mu(x),
\end{aligned}$$

esto es $T_{\widehat{\mu}} = \mathcal{F}'(d\mu)$ donde estamos pensando a $d\mu$ como elemento de $\mathcal{S}'$. Una vez mas, esto prueba que la transformada de la medida (mapeada por $T : L^\infty \to \mathcal{S}'$) coincide con la extensión de la transformada a $\mathcal{S}'$. □

La recíproca de este resultado también es cierta, toda función de tipo positivo se obtiene haciendo la transformada de una medida finita y positiva; una demostración puede leerse en [11], Theorem IX.9.

Teorema 4.50 (Teorema de Bochner). *La imagen por la transformada de Fourier de las medidas finitas y positivas es exactamente el conjunto de las funciones de tipo positivo.*

4.6. Ejercicios

En esta sección de ejercicios, E, F denotan espacios normados.

1. Sean $\varphi_n, \varphi \in E'$ con E espacio de Banach y $\varphi_n \xrightarrow{\omega^*} \varphi$. Entonces $(\|\varphi_n\|)_n \subset \mathbb{R}$ es acotado y además $\|\varphi\| \leqslant \liminf_n \|\varphi_n\|$.

2. Sea E un espacio normado, sean $x_n, x \in E$ tales que $x_n \xrightarrow{\omega} x$. Probar que $(\|x_n\|)_n$ es acotado y que $\|x\| \leqslant \liminf_n \|x_n\|$ *(sug: usar la inclusión canónica en el bidual).*

3. Sean $x_n, x \in E$ un Banach, $\varphi_n, \varphi \in E'$. Si $\varphi_n \xrightarrow{\omega^*} \varphi$ y $x_n \to x$ entonces $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.

4. Si $x_n, x \in E$, $\varphi_n, \varphi \in E'$. Si $x_n \xrightarrow{\omega} x$ y $\varphi_n \to \varphi$ entonces $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.

5. Sean E, F Banach, $\beta : E \times F \to \mathbb{K}$ bilineal. Probar que β es continua si y solo si es continua en cada variable.

6. Sean H un espacio de Hilbert, $\{e_n\}_n$ una b.o.n. de H. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) $e_n \xrightarrow{\omega} 0$.

   b) Si $x_n \xrightarrow{\omega} x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$ entonces $x_n \to x$.

   c) $x_n \xrightarrow{\omega} x$ si y solo si $(x_n)_n$ está acotada y $\langle x_n, e_m\rangle \xrightarrow{n} \langle x, e_m\rangle \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

7. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto ortogonal en un espacio de Hilbert H, son equivalentes:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge débilmente.

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ converge.

8. Probar que si E, F son Banach y $T_n x$ es de Cauchy para cada $x \in E$, entonces existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $\text{SOT-}\lim_n T_n = T$.

9. Sean E y F espacios normados, E completo, sea $T_n \in \mathcal{L}(E, F)$.

   a) Si para cada $x \in E$ la sucesión $(T_n x)_n$ es ω acotada en F, entonces $(\|T_n\|)_n$ está acotada.

b) Si F es reflexivo y $T_n x$ es ω convergente, entonces existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $T = $wot-$\lim_n T_n$.

10. Sea H espacio de Hilbert, $(T_n)_n \subset \mathcal{L}(H)$ tal que para todo $x, y \in H$, la sucesión $\langle y, T_n x\rangle$ es convergente.

a) Probar que $B(x, y) = \lim_n \langle T_n x, y\rangle$ es continua usando el ejercicio anterior.

b) Probar que existe $T \in \mathcal{L}(H)$ tal que wot-$\lim_n T_n = T$ usando el Lema de Riesz.

11. *Operadores de multiplicación*. Sea (X, μ) espacio de medida finita, para cada $\varphi : X \to \mathbb{C}$ medible definimos el operador lineal $M_\varphi f = \varphi f$. Dado $1 \leqslant p < \infty$, probar

a) $M_\varphi : L^p(X, \mu) \to L^p(X, \mu)$ está bien definido si y solo si es acotado (*sug.: teorema del gráfico cerrado y convergencia en L^p implica convergencia p.p.*)

b) M_φ es acotado sii $\varphi \in L^\infty(X, \mu)$ *(sug.: si φ no estuviese acotada p.p. considerar los conjuntos de medida positiva $\{x : |\varphi(x)| \geqslant n\}$.*

c) $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$ *(sug.: para ver $\|M_\varphi\| \geqslant \|\varphi\|_\infty$ considerar primero $\varphi \geq 0$).*

d) M_φ es inyectivo sii $\varphi \neq 0$ p.p., y es inversible sii es inyectivo y $1/\varphi \in L^\infty$.

e) Dadas $\varphi_n, \varphi \in L^\infty$, probar que $\varphi_n \xrightarrow{\omega^*} \varphi$ si y solo si, para algún $1 \leqslant p < \infty$

$$M_{\varphi_n}(f) \xrightarrow{\omega} M_\varphi(f) \qquad \forall f \in L^p.$$

12. Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, probar que

$$\begin{array}{llcl@{\qquad}llcl} i) & \mathrm{Ran}(T)^\perp & = & \ker(T') & ii) & {}^\perp\mathrm{Ran}(T') & = & \ker(T) \\ iii) & \overline{\mathrm{Ran}(T)} & = & {}^\perp\ker(T') & iv) & \mathrm{Ran}(T') & \subset & \ker(T)^\perp. \end{array}$$

Además, si E, F son completos y $\mathrm{Ran}(T)$ es cerrado, entonces $\mathrm{Ran}(T')$ es cerrado y $\mathrm{Ran}(T') = \ker(T)^\perp$.

13. En cada uno de los siguientes casos, probar que el operador T es continuo, caracterizar T' y calcular su norma ($\Omega \subset \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ abiertos y $1 \leqslant p \leqslant \infty$).

a) $T : \ell^2 \to c_0$, $x \mapsto x$.

b) $T : L^p(\Omega) \to L^p(\hat{\Omega})$, $f \mapsto \hat{f}$ donde $\hat{f}$ es f extendida por 0.

c) $T : L^p(\hat{\Omega}) \to L^p(\Omega)$, $f \mapsto f|_\Omega$.

d) $T : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$, $T = M_\varphi$ para $\varphi \in L^\infty(\Omega)$.

e) $T : L^p[0, 1] \to L^p[0, 1]$, $f \mapsto \int_0^x f(t)dt$ el *operador de Volterra*

f) $S, T : \ell^p \to \ell^p$ los shifts a derecha e izquierda respectivamente.

14. Probar el PAU para espacios de Frechét: si E es Fréchet, y $(\varphi_i)_{i\in I} \in E'$ es tal que para cada $x \in E$, $|\varphi_i(x)| \leqslant c_x < \infty$, entonces existe $C > 0$ y finitas seminormas $(p_j)_{j=1\ldots M}$ de E, tales que para todo $x \in E$, y todo $i \in I$,

$$|\varphi_i(x)| \leqslant C \sum_{j=1}^{M} p_j(x).$$

15. Probar que si E es Fréchet, entonces (E', ω^*) es secuencialmente completo. Y que si E es espacio de Banach separable, (E', ω^*) es completo.

16. Para $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, y α un multi-índice, definimos su *convolución* como $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$. Probar que

    a) $f * g = g * f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

    b) $\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f * g) = (f * \partial^\alpha g)$ y $\int_{\mathbb{R}^n}(f * g)(x)\, dx = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx\right)$

    c) $\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2}\widehat{f}\,\widehat{g}$, $\widehat{fg} = (2\pi)^{-n/2}(\widehat{f} * \widehat{g})$,

    d) $(f * g) * h = f * (g * h)$,

    e) $C_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dado por $C_f(g) = f * g$ es lineal y continuo. ¿Es el operador bilineal $(f, g) \mapsto f * g$ continuo en $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$?

17. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, probar que

    a) $\widehat{f}$ es uniformemente continua,

    b) si $\widehat{f} = \widehat{g}$ entonces $f = g$ en casi todo punto,

    c) $\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2}\widehat{f}\,\widehat{g}$.

18. Probar que $\mathcal{F}^4 = 1$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, y que lo mismo vale en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

19. Sea $1 \leqslant q \leqslant 2$, probar que si $\mathcal{F} : L^q(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ extiende la transformada de Fourier en $\mathcal{S}$, entonces esta extensión verifica

$$\int (\mathcal{F}g)\, f = \int g\widehat{f} \qquad \forall g \in L^q, f \in \mathcal{S}.$$

20. Si $f, g \in \mathcal{S}$ y $\varphi \in \mathcal{S}'$, definimos para cada $f \in \mathcal{S}$, las distribuciones *producto* $(f\varphi)(g) = \varphi(fg)$ y *convolución* $(\varphi * f)(g) = \varphi(\tilde{f} * g)$, donde $\tilde{f}(x) = f(-x)$. Probar que

    a) $\varphi * f \in \mathcal{S}'$ y que $C'_f : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ dado por $C'_f(\varphi) = \varphi * f$ es ω^* continuo.

    b) $\partial^\alpha(\varphi * f) = (\partial^\alpha\varphi * f) = \varphi * \partial^\alpha f$ para todo multi-índice.

    c) $(\varphi * f) * g = \varphi * (f * g)$.

    d) $\widehat{\varphi * f} = (2\pi)^{n/2}\widehat{f}\,\widehat{\varphi}$.

21. Sean $f \in \mathcal{S}$, $g, h \in C_c^\infty$, $\varphi \in \mathcal{S}'$. Definimos la *traslación* para $x \in \mathbb{R}^n$ como $\tau_x f(y) = f(y - x)$. Probar que

    a) Si $F(x) = g(x)\varphi(\tau_x f)$, entonces $F \in C_c^\infty$.

    b) $\int Fh = \varphi(f * (gh))$ *(sug: escribir las sumas de Riemann de la izquierda en un cubo).*

22. Sea $j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que: tiene soporte en la bola unitaria, es positiva, $j(0) = 1$, $j(x) = j(-x)$, $\int_{\mathbb{R}^n} j = 1$. Sean $j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} j(x/\varepsilon)$, $g_\varepsilon(x) = j(\varepsilon x)$ $h \in C_c^\infty$ y $\varphi \in \mathcal{S}'$, Probar que

a) $j_\varepsilon * h \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} h$ en $\mathcal{S}$ *(sug: basta probar que converge en $\mathcal{D}$).*

b) $(\varphi * j_\varepsilon) \xrightarrow{\omega^*} \varphi$ en $\mathcal{S}'$ cuando $\varepsilon \to 0^+$.

*c)** $j_\varepsilon * (g_\varepsilon h) \to h$ en $\mathcal{S}$ *(sug: $(g_\varepsilon(y-x)-1) = \nabla g(c)\cdot(y-x)$).*

d) $g_\varepsilon(\varphi * j_\varepsilon) \xrightarrow{\omega^*} \varphi$ en $\mathcal{S}'$.

e) $T(\mathcal{S})$ es ω^* denso en $\mathcal{S}'$, donde $T_g(h) = \int gh$ *(sug: considerar $F_\varepsilon(x) = g_\varepsilon(x)\varphi(\tau_x j_\varepsilon)$ y el ejercicio anterior).*

4.7. Operadores compactos en espacios de Banach

Definición 4.51 (Operadores compactos). Sean E, F espacios de Banach. Diremos que $T : E \to F$ lineal es un *operador compacto* si dado $A \subset E$ acotado, $T(A) \subset F$ es precompacto (tiene clausura compacta).

Notemos que todo operador lineal en dimensión finita es compacto. También que si T es compacto entonces es acotado, puesto que $A = B_E$ es acotado y entonces $T(B_A)$ debe ser precompacto en un espacio métrico, luego es totalmente acotado y en particular acotado.

Lema 4.52. *Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$, son equivalentes:*

1. *T es compacto*
2. *$T(B_E)$ tiene clausura compacta*
3. *Para toda sucesión acotada $(x_n)_n \subset E$, $(Tx_n)_n$ tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Si T es compacto, como la bola es acotada, su imagen tiene clausura compacta. Si $T(B_E)$ tiene clausura compacta, y $\|x_n\| \leqslant M$, entonces $x_n/M \in B_E$, luego $T(x_n)/M$ tiene una subsucesión convergente, y así Tx_n tiene una subsucesión convergente. Por último, como las sucesiones caracterizan la compacidad en F pues F es normado y completo, la tercer afirmación implica que T es compacto. □

Denotaremos al conjunto de operadores compactos como $\mathcal{K}(E, F)$.

Proposición 4.53. *Sean E, F, G, H espacios de Banach, $K, \tilde{K} \in \mathcal{K}(E, F)$, $A \in \mathcal{L}(F, G)$, $B \in \mathcal{L}(H, E)$. Entonces*

1. *$\alpha K + \beta \tilde{K} \in \mathcal{K}(E, F)$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,*
2. *$AK \in \mathcal{K}(E, G)$, $KB \in \mathcal{K}(H, F)$.*
3. *Si $(T_n)_n \subset \mathcal{K}(E, F)$ es de Cauchy en norma, entonces es convergente a un operador compacto T_0, luego $\mathcal{K}(E, F)$ es completo en norma.*
4. *$T \in \mathcal{L}(E, F)$ es compacto si y solo si $T' \in \mathcal{L}(F', E')$ es compacto.*

Demostración. Dada una sucesión $(x_n)_n \subset E$ acotada, extraemos una subsucesión convergente de $K(x_n)$, y de esta misma extreamos una subsucesión convergente de $\tilde{K}(x_{n_j})$, asi $(\alpha K + \beta \tilde{K})(x_{n_j})$ es convergente y por el lema previo $(\alpha K + \beta \tilde{K})$ es compacto.

Ahora supongamos que A es acotado y K compacto, tomemos una sucesión acotada $(x_n)_n$ en E y una subsucesión convergente $(Tx_{n_j})_j$ en F. Entonces $(AKx_{n_j})_j$ también es convergente en G pues A es continuo; esto prueba que AK es compacto. Por otra parte, si $(z_n)_n \subset H$ es una sucesión acotada, $x_n = Bz_n$ también es acotada pues B es continuo, luego $KBz_n = Kx_n$ tiene una subsucesión convergente, lo que prueba que KB es compacto si K lo es.

Sea T_0 el operador acotado que es límite de los operadores compactos T_n ($\mathcal{L}(E,F)$ es completo pues F lo es). Veamos que T_0 es compacto, basta ver que el conjunto $T_0(B_E)$ es totalmente acotado en F. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos N tal que $\|T_N - T_0\| < \varepsilon/3$ si $n \geqslant N$, y cubrimos $T_N(B_E)$ (que es totalmente acotado) con finitas bolas de radio $\varepsilon/3$ en F,

$$T_N(B_E) \subset \bigcup_{i=1}^{j} ({}^{\varepsilon}\!/_{3} B_F + T_N x_i)\,,$$

donde $\{x_i\}_{i=1,\ldots,j} \subset B_E$. Afirmamos que

$$T_0(B_E) \subset \bigcup_{i=1}^{j} (\varepsilon B_F + T_0 x_i)\,,$$

luego $T_0(B_E)$ seria totalmente acotado y por ende precompacto ya que F es completo. Tomamos entonces $x \in B_E$, y elegimos $x_i \in E$ tal que $\|T_N x - T_N x_i\| < \varepsilon/3$, luego

$$\|T_0x - T_0x_i\| \leqslant \|T_0x - T_Nx\| + \|T_Nx - T_Nx_i\| + \|T_Nx_i - T_0x_i\| < \|T_0 - T_N\| + \varepsilon/3 + \|T_0 - T_N\| < \varepsilon$$

con lo cual $T_0 x \in \varepsilon B_F + T_0 x_i$.

Si T es compacto, podemos suponer que $\|T\| = 1$. Tomemos $(f_n)_n \subset B_{F'}$, y observemos que

$$|f_n(y) - f_n(y')| \leqslant \|f_n\|\,\|y - y'\| \leq \|y - y'\|,$$

luego la familia $(f_n)_n$ es equicontinua y equiacotada en F. Como $\|Tx\| \leqslant \|x\| \leqslant 1$ si $x \in B_E$, por restricción, es equiacotada y equicontinua en $\overline{T(B_E)} \subset B_F$. Por hipótesis este conjunto $\overline{T(B_E)}$ es compacto, luego por el Teorema de Ascoli, existe una subsucesión $(f_{n_j})_j$ que converge uniformemente, en particular es de Cauchy. Pero

$$\|T'f_{n_j} - T'f_{n_k}\| = \sup_{x\in B_E} |f_{n_j}(Tx) - f_{n_k}(Tx)| = \sup_{y\in \overline{T(B_E)}} |f_{n_j}(y) - f_{n_k}(y)| = \|f_{n_j} - f_{n_k}\|_\infty < \varepsilon$$

si $j,k \geq k_0$. Esto prueba que $(T'f_{n_j})_j \subset E'$ es un sucesión de Cauchy, y por ende converge en E', así que T' es compacto.

Si T' es compacto, por lo recién probado T'' es compacto, y si J_E es la inclusión canónica en el bidual, entonces $T''J_E$ es compacto. Pero según el Lema 4.19, $T''J_E = J_F T$, luego $J_F T$ es compacto. Como J_F es una isometría, y $J_F T(B_E)$ es totalmente acotado, entonces $T(B_E)$ es también totalmente acotado y por ende, T es compacto. □

Corolario 4.54. *Si E es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{K}(E)$ es un ideal bilátero cerrado (en particular completo) de $\mathcal{L}(E)$.*

4.7.1. Aproximación por rango finito

Notemos que si E, F son Banach y $\dim \operatorname{Ran} T < \infty$, entonces T es un operador compacto, puesto que la bola cerrada en dimensión finita es compacto. Combinando esta observación con el tercer item de la Proposición 4.53, obtenemos:

Corolario 4.55. *Si $T : E \to F$ es lineal y es limite en norma de operadores de rango finito, entonces T es compacto.*

Veremos que en ciertos espacios, todo operador compacto se aproxima con operadores de rango finito.

Teorema 4.56 (Propiedad de aproximación finita). *Si E, F son espacios de Banach y F tiene base de Schauder, entonces todo operador compacto $T \in \mathcal{K}(E, F)$ es límite en norma de operadores de rango finito en $\mathcal{L}(E, F)$.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_n$ base de Schauder de F, denotamos $P_N \in \mathcal{L}(F)$ a los proyectores a la base (recordemos que proyectan sobre los primeros N términos de la base, y existe $K \geq 1$ tal que $\|P_N\| \leqslant K$ para todo N, ver Sección 4.2.1). Sea $T : E \to F$ compacto, definimos $T_N = P_N T \in \mathcal{L}(E, F)$. Para cada $x \in E$,

$$T_N x = P_N T x = \sum_{n=1}^{N} f_n'(Tx) f_n \subset \langle f_n \rangle_{n=,1\dots,N},$$

luego $T_N = P_N T$ tiene rango finito.

Sea $\varepsilon > 0$, como $T(B_E)$ tiene clausura compacta, es totalmente acotado, tomamos entonces una $\varepsilon/3K$-red que lo cubra, esto es, existen $\{x_i\}_{i=1\dots n} \subset B_E$ de manera tal que

$$T(B_E) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (\varepsilon/3K\, B_F + T x_i)\,.$$

Como $\|y - P_N y\| \xrightarrow{N} 0$ para cada $y \in F$, existe N_0 tal que $N \geq N_0$ implica que

$$\|T x_i - P_N T x_i\| < \varepsilon/3 \quad \forall i = 1 \dots n.$$

Entonces, dado $x \in B_E$, tomamos x_i tal que $\|Tx - Tx_i\| < \varepsilon/3K \leqslant \varepsilon/3$, y calculamos

$$\begin{aligned} \|Tx - P_N T x\| &\leqslant \|Tx - Tx_i\| + \|Tx_i - P_N T x_i\| + \|P_N T x_i - P_N T x\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3K} + \frac{\varepsilon}{3} + \|P_N\|\,\|Tx_i - Tx\| < \frac{2\varepsilon}{3} + K\frac{\varepsilon}{3K} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando supremo sobre $x \in B_E$ se deduce que $\|T - P_N T\| < \varepsilon$ si $N \geq N_0$, esto es, $T_N = P_N T \in \mathcal{L}(E, F)$ tiende en norma a T. □

Denotaremos con $\mathcal{L}_0(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F)$ a los operadores de rango finito, notemos que se trata de un subespacio propio si la dimensión de F es infinita. Dados $x' \in E', y \in F$, denotaremos $x' \otimes y$ al operador definido como

$$(x' \otimes y)(x) = x'(x) y$$

para $x \in E$. Notemos que $x' \otimes y$ es lineal, de hecho $x' \otimes y \subset \mathcal{L}_0(E, F)$ y es fácil ver que $\|x' \otimes y\| = \|x'\|\,\|y\|$. Ya que se trata de operadores de rango uno, se los suele denominar *operadores elementales*.

Con esta notación, si $\{f_n\}_n$ es la base de Schauder de F y $\{f'_n\}_n \subset F'$ sus funciones coordenadas, como $f'_n \circ T \in E'$, tenemos que

$$P_N = \sum_{n=1}^{n} f'_n \otimes f_n, \qquad T_N = P_N T = \sum_{n=1}^{N} (f'_n \circ T) \otimes f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T.$$

4.7.2. Alternativa e índice de Fredholm

En esta sección discutiremos propiedades del núcleo y el rango de los operadores compactos, y de los llamados operadores de Fredholm. Comenzamos con un teorema.

Teorema 4.57. *Sea E espacio de Banach, $T \in \mathcal{K}(E)$, $A \in \mathcal{L}(E)$ inversible. Entonces*

1. $\dim \ker(A - T) < \infty$.
2. *$\mathrm{Ran}(A - T)$ es cerrado.*
3. *$\mathrm{Ran}(A - T) = E \iff \ker(A - T) = \{0\}$.*

Demostración. Llamando $\hat{T} = A^{-1}T$, este operador también es compacto por la Proposición 4.53. Además, como $A - T = A(1 - \hat{T})$ y

$$\ker(A - T) = \ker(1 - \hat{T}), \quad \mathrm{Ran}(A - T) = A\,\mathrm{Ran}(1 - \hat{T}),$$

y A es un isomorfirmo, podemos suponer que $A = 1$.

El operador T restringido al subespacio cerrado $S = \ker(I - T)$ sigue siendo compacto, pero para cada $y \in S$ se tiene $Ty = Iy$, luego $T|_S = I|_S$ y entonces S debe tener dimensión finita (Ejercicio 1 Sección 4.8).

Como S tiene dimensión finita, es suplementado (Ejercicio 8 Sección 2.6), esto es existe $F \subset E$ subespacio cerrado tal que $E = S \oplus F$. Tomemos y en la clausura del rango de $I - T$, luego existe $(x_n)_n \subset E$ tal que $(1 - T)x_n \xrightarrow{n} y$. Descomponiendo $x_n = s_n + f_n$ en la suma directa, observamos que también

$$(1 - T)f_n = (1 - T)(f_n + s_n) = (1 - T)x_n \xrightarrow{n} y$$

pues $s_n \in S = \ker(1 - T)$. Afirmamos que $(f_n)_n \subset F$ está acotada. De no ser así, pasando a una subsucesión, podemos suponer que $\|f_n\| \to +\infty$, y si definimos $z_n = \frac{f_n}{\|f_n\|} \in F$, pasando una vez más a una subsucesión podemos suponer que $Tz_n \xrightarrow{n} v \in E$, ya que T es compacto. Pero entonces

$$z_n - Tz_n = (1 - T)z_n = (1 - T)\frac{f_n}{\|f_n\|} \xrightarrow{n} 0,$$

luego $\lim_n z_n = \lim_n Tz_n = v$, y con esto $(1 - T)v = \lim_n (1 - T)z_n = \lim_n z_n - Tz_n = 0$, esto es $v \in \ker(1 - T) = S$. Pero por otro lado $v \in F$ por ser límite de elementos de F, y además $\|v\| = \lim_n \|z_n\| = 1$ luego $v \neq 0$. Esto es absurdo puesto que S y F están en suma directa.

Entonces $(f_n)_n$ está acotada y pasando a una subsucesión, $Tf_n \xrightarrow{n} v$. Pero entonces

$$f_n = (1-T)f_n + Tf_n \to y + v,$$

luego $y = \lim_n (1-T)f_n = (1-T)(y+v)$, así que $y \in \mathrm{Ran}(1-T)$.

Para probar el tercer item, supongamos primero que el rango de $1-T$ es todo E, y supongamos que $1-T$ no es inyectivo, considerando $x_1 \neq 0$ tal que $(1-T)x_1 = 0$, y la cadena de subespacios cerrados

$$\ker(1-T) \subset \ker(1-T)^2 \subset \cdots \subset \ker(1-T)^n \subset \ldots.$$

Como $1-T$ es sobreyectivo, existe x_2 tal que $(1-T)x_2 = x_1$, y asi sucesivamente obtenemos una sucesión tal que $(1-T)x_n = x_{n-1}$. Como $x_1 \neq 0$, $x_n \neq 0$ para todo n. Por un lado

$$(1-T)^n x_n = (1-T)^{n-1}(1-T)x_n = (1-T)^{n-1}x_{n-1} = \cdots = (1-T)x_1 = 0,$$

luego $x_n \in \ker(1-T)^n$. Por otro lado,

$$(1-T)^{n-1}x_n = (1-T)x_2 = x_1 \neq 0,$$

luego $x_n \notin \ker(1-T)^{n-1}$. Hemos probado que todas las inclusiones de la cadena son propias. Ahora vamos a construir una sucesión tal que Ty_n no tenga ningún punto de acumulación, arribando a una contradicción. Para ello, y apelando al Lema de Riesz, tomamos para cada n un vector $y_n \in \ker(1-T)^n$ de norma unitaria de manera tal que

$$\|y_n - x\| \geqslant 1/2 \quad \forall x \in \ker(1-T)^{n-1}.$$

Ahora bien, para $m \leqslant n-1$,

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|y_n - (y_m + (1-T)y_n - (1-T)y_m)\| \geqslant 1/2$$

puesto que

$$(1-T)^{n-1}(y_m + (1-T)y_n - (1-T)y_m) = (1-T)^{n-1}y_m - (1-T)^n y_n - (1-T)^n y_m = 0 + 0 - 0 = 0.$$

Como T es compacto, esto es imposible, y debe ser entonces $1-T$ inyectivo.

Ahora supongamos que $1-T$ es inyectivo; como T es compacto también T' es compacto (Proposición 1.39), y además $\mathrm{Ran}(1-T)$ y $\mathrm{Ran}(1-T')$ son cerrados. Pero entonces (Ejercicio 12)

$$\mathrm{Ran}(1-T') = \ker(1-T)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = E',$$

y por lo recién probado debe ser $1-T'$ inyectivo. Pero entonces

$$\mathrm{Ran}(1-T) = \overline{\mathrm{Ran}(1-T)} = {}^{\perp}\ker(1-T') = {}^{\perp}\{0\} = E,$$

lo que prueba que $1-T$ es sobreyectivo. □

Corolario 4.58 (Alternativa de Fredholm). *Si E es un espacio de Banach, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ y $T \in \mathcal{K}(E)$, entonces la ecuación*

$$Kg = \lambda g$$

tiene una solución no trivial $g \in E$, o bien la ecuación

$$Kg - \lambda g = f$$

tiene solución para cualquier $f \in E$. Ambas opciones son excluyentes.

4.7.3. Operadores de Fredholm

Definición 4.59 (Codimensión). Dado $S \subset E$ espacio vectorial, definimos la *codimensión* de S en E como la dimensión algebraica del espacio vectorial E/S. Si E es un e.v.t. definimos la *codimensión topológica* de S como la dimensión algebraica de $E/\overline{S}$ (la clausura de S en E).

§ Ambas dimensiones pueden ser bien distintas, por ejemplo, si $E = C[0,1]$ con la norma uniforme y S son los polinomios, entonces por el teorema de Stone Weierstrass la clausura de S es E, luego la codimensión topológica es 0. Sin embargo la codimensión algebraica es infinita, puesto que $f_n(x) = \text{sen}(nx) \in E$ son linealmente independientes en E/S como puede el lector verificar.

Al igual que en el resto de este capítulo, en esta sección los espacios considerados son completos.

Definición 4.60 (Conúcleo). Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$ con E, F espacios de Banach. Denominamos conúcleo de T al cociente F por su rango,

$$\text{coker}T = F/\text{Ran}T,$$

y diremos que T es *operador de Fredholm* si tiene rango cerrado, y tanto $\ker T$ como $\text{coker}T$ tienen dimensión (algebraica) finita. El *índice de Fredholm* de T se define como

$$\text{ind}(T) = \dim\ker T - \dim\text{coker}T.$$

§ Notemos que todo operador inversible es un operador de Fredholm de índice 0, mientras que el operador nulo no es de Fredholm si E tiene dimensión infinita.

Veamos que la condición de rango cerrado es superflua si el espacio vectorial $F/RanT$ tiene dimensión *algebraica* finita:

Lema 4.61. *Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ con E, F espacios de Banach, y $RanT$ tiene un complemento cerrado, entonces $RanT$ es cerrado. En particular si $\dim cokerT < \infty$, entonces T tiene rango cerrado.*

Demostración. Escribimos
$$F = \text{Ran}T \oplus Z,$$
y dotamos al producto directo $E/\ker T \times Z$ de la norma $\|([x],z)\| = \|T\|\,\|[x]\| + \|z\|$, de esta forma resulta un espacio de Banach ya que $E/\ker T$ y Z son espacios de Banach. Consideramos $M : E/\ker T \times Z \to F$ dado por $([x],z) \mapsto Tx + z$, notemos que está bien definido, es lineal y sobreyectivo. Además, para cada $s \in \ker T$

$$\|M([x],z)\| = \|Tx + z\| = \|T(x-s) + z\| \leqslant \|T\|\,\|x-s\| + \|z\|,$$

tomando ínfimo sobre s se tiene $\|M([x],z)\| \leqslant \|T\|\,\|[x]\| + \|z\| = \|([x],z)\|$.

Afirmamos que es inyectivo, supongamos que $Tx + z = 0$, entonces $z = -Tx \in \mathrm{Ran}T$, pero esto solo es posible si $z = 0$, luego $Tx = 0$ es decir $x \in \ker T$ y en consecuencia $[x] = 0$. Por el teorema de la función abierta M es un isomorfismo y en particular cerrado, pero $E/\ker T \times \{0\}$ es cerrado en $E/\ker T \times Z$ y además

$$\mathrm{Ran}T = T(E) = M(E/\ker T \times \{0\})$$

que es cerrado en F, luego T tiene rango cerrado. □

Observación 4.62. La función $i : \mathrm{Ran}T^{\perp} \to (F/\mathrm{Ran}T)'$ dado por $i\varphi([x]) = \varphi(x)$ es un isomorfimo (con inversa $f \mapsto f \circ \pi$). Además $F/\mathrm{Ran}T$ tiene dimensión finita si y solo si su dual tiene dimensión finita. Entonces en ese caso de dimensión finita

$$\dim \mathrm{coker}T = \dim \mathrm{Ran}T^{\perp} = \dim \ker(T').$$

Esto es, el co-núcleo de T se identifica con el núcleo de su adjunto T'. Y entonces

$$\mathrm{ind}(T) = \dim \ker(T) - \dim \ker(T').$$

Observación 4.63. Si $K : E \to E$ es compacto entonces $1 + K$ es Fredholm, puesto que por el Teorema 1.39, $\dim \ker(1 + K) < \infty$, y además, como K' es compacto (Proposición 4.53),

$$\dim \mathrm{coker}(1 + K) = \dim \mathrm{Ran}(1 + K)^{\perp} = \dim \ker(1 + K') < \infty$$

ya que $\mathrm{Ran}(T)^{\perp} = \ker(T')$ (Ejercicio 12, Sección 4.6).

Con esta herramienta, podemos caracterizar los operadores de Fredholm como aquellos que son inversibles módulo un operador compacto:

Teorema 4.64 (Atkinson). *Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Entonces T es Fredholm si y solo si existe $R \in \mathcal{L}(F, E)$, $K_1 \in \mathcal{K}(E)$, $K_2 \in \mathcal{K}(F)$ tales que*

$$RT = 1 + K_1, \qquad TR = 1 + K_2.$$

En ese caso, R es de Fredholm y además $ind(R) = -ind(T)$.

Demostración. Si existen los operadores R, K_1, K_2, como $1+K_1$ es Fredholm, tiene núcleo de dimensión finita. Pero entonces $\ker T \subset \ker(RT) = \ker(1+K_1)$ también tiene dimensión finita. Asimismo, como $1 + K_2$ también es Fredholm, tiene rango de codimensión finita. Pero entonces $\mathrm{Ran}T \supset \mathrm{Ran}(TR) = \mathrm{Ran}(1 + K_2)$, y tenemos una inclusión natural

$$F/\mathrm{Ran}T \subseteq F/\mathrm{Ran}(1 + K_2)$$

luego $\mathrm{Ran}T$ tiene codimensión finita, y por el lema anterior, T tiene rango cerrado.

Ahora supongamos que T es de Fredholm, descomponemos

$$E = E_1 \oplus \ker T, \quad F = E_2 \oplus \mathrm{Ran}T,$$

definimos $K_1 = -P_{\ker T}$, $K_2 = -P_{E_2}$ que son compactos pues estos subespacios tienen dimensión finita. Como $T|_{E_1} : E_1 \to \mathrm{Ran}T$ es biyectivo y continuo, por el teorema de la función abierta tiene una inversa $R_0 : \mathrm{Ran}T \to E_1$ acotada, la extendemos por cero en el suplemento E_2 para obtener un operador acotado $R : F \to E$ (notar que $R = R_0 P_{\mathrm{Ran}T}$ es acotado pues R_0 lo es y el proyector lo es).

Dado $y \in F$, escribiéndolo como $y = e_2 + Tx \in E_2 \oplus \mathrm{Ran}T$ se verifica $TRy = Tx = (1+K_2)y$. Dado $x \in E$, escribiéndolo como $x = e_1 + z \in E_1 \oplus \ker T$ se verifica $RTx = e_1 = (1+K_1)x$. Observando que $\ker R = E_2$ y que $\mathrm{Ran}R = \ker T$, se tiene la afirmación sobre su índice. □

Corolario 4.65. *Si T es Fredholm y K es compacto, entonces $T+K$ es Fredholm.*

Demostración. Con la notación del Teorema de Atkinson

$$R(T+K) = RT + RK = 1 + K_1 + RK = 1 + \hat{K}_1, \quad (T+K)R = TR + KR = 1 + K_2 + KR = 1 + \hat{K}_2$$

donde $\hat{K}_1, \hat{K}_2$ son compactos por la Proposición 4.53. □

A continuación E, F, G son espacios de Banach.

Corolario 4.66. *Si $R \in \mathcal{L}(E,F), T \in \mathcal{L}(F,G)$ son operadores de Fredholm, entonces TR es Fredholm y además $ind(TR) = ind(T) + ind(R)$.*

Demostración. Si R, T son Fredholm escribimos $RA = 1 + K_1, AR = 1 + K_2$ para A acotado y K_i compactos, mediante el Teorema de Atkinson. Entonces como T es Fredholm y TK_1 es compacto, $T(1+K_1) = T + TK_1$ es Fredholm por el corolario previo, luego existe C acotado, K_3, K_4 compactos tales que $T(1+K_1)C = 1 + K_3$ y $CT(1+K_1) = 1 + K_4$. Pero entonces

$$TR(AC) = TRAC = T(RA)C = T(1+K_1)C = 1 + K_3$$

y por otro lado, como $CT + CTK_1 = 1 + K_4$,

$$\begin{aligned} (AC)TR &= ACTR = A(CT)R = A(1 + K_4 - CTK_1)R = AR + AK_4R - ACTK_1R \\ &= 1 + K_2 + AK_4R - ACTK_1R = 1 + K_5, \end{aligned}$$

luego TR es Fredholm. La fórmula de los índices es un ejercicio de álgebra lineal (no necesariamente fácil), y queda para probar por el lector (Ejercicio 10, Sección 4.8). □

Teorema 4.67. *Los operadores de Fredholm $\mathcal{F}(E,F) \subset \mathcal{L}(E,F)$ son un subconjunto abierto y el índice es una función localmente constante. En particular $ind : \mathcal{F}(E,F) \to \mathbb{Z}$ es continua.*

Demostración. Dado T de Fredholm, descomponemos

$$E = E_1 \oplus \ker T, \quad F = E_2 \oplus \mathrm{Ran}T,$$

y consideramos $P = P_{\mathrm{Ran}T} : F \to \mathrm{Ran}T$, $i : E_1 \to E$ la inclusión. Ambos son operadores de Fredholm, además

$$\mathrm{ind}(P) = \dim \mathrm{coker}T, \quad \mathrm{ind}(i) = -\dim \ker T.$$

Si $S \in \mathcal{L}(E, F)$ es tal que $\|S - T\| < \varepsilon$, entonces

$$\|PS\,i - PTi\| \leqslant \|P\|\,\|S - T\| < \varepsilon'$$

y como $PTi : E_1 \to \mathrm{Ran}T$ es inversible (ya que es biyectivo y acotado), entonces $PS\,i$ también es inversible en $\mathcal{L}(E_1, \mathrm{Ran}T)$ (Teorema 5.7). Pero entonces

$$0 = \mathrm{ind}(PS\,i) = \mathrm{ind}(P) + \mathrm{ind}(S) + \mathrm{ind}(i) = \dim \mathrm{coker}T + \mathrm{ind}(S) - \dim \ker T,$$

luego $\mathrm{ind}(S) = \mathrm{ind}(T)$. □

§ Por el teorema previo, como $\alpha(s) = T + sK$ es una función continua y $T + sK$ es operador de Fredholm siempre que T lo sea y K es compacto, se deduce que

$$\mathrm{ind}(T + K) = \mathrm{ind}(\alpha(1)) = \mathrm{ind}(\alpha(0)) = \mathrm{ind}(T),$$

esto es, *el índice es invariante por perturbaciones compactas*. En particular, si A es inversible, $A + K$ tiene índice cero para todo K compacto.

Definición 4.68 (Álgebra de Calkin). Como $\mathcal{K}(E)$ es un ideal bilátero cerrado en $\mathcal{L}(E)$, podemos considerar $C(E) = \mathcal{L}(E)/\mathcal{K}(E)$ que resulta un álgebra completa con la norma cociente (como espacios de Banach). Notemos que $C(E) = \{0\}$ si y solo si E tiene dimensión finita. Dado $[T] \in C(E)$, tiene un índice bien definido dado por $\mathrm{ind}([T]) = \mathrm{ind}(T)$. Este número no depende del representante ya que las perturbaciones compactas no modifican el índice. Los operadores de Fredholm pasan en el cociente a operadores inversibles, y las componentes conexas del grupo de inversibles en el álgebra de Calkin están parametrizadas por el índice de Fredholm, en particular los operadores de índice cero conforman la componente conexa de la identidad en $C(E)$.

4.8. Ejercicios

En esta sección de ejercicios, E, F denotan espacios de Banach.

1. Sea E de dimensión infinita. Entonces

   a) $Id : E \to E$ no es compacto.

   b) Si $T \in \mathcal{K}(E, F)$, entonces T no es inversible.

2. Sea $T \in \mathcal{K}(E, F)$. Entonces $\forall\ x_n, x \in E$,

   $$x_n \xrightarrow{\omega} x \Rightarrow T(x_n) \to T(x).$$

   Probar que si $E = F$ es reflexivo, entonces la condición enunciada arriba implica que T es compacto.

3. Sea $T \in \mathcal{K}(E, F)$. Probar que

   a) Ran$T$ es separable.

   b) Si existe $S \subset \mathrm{Ran}(T)$ subespacio cerrado entonces $\dim S < \infty$.

   c) Si $\mathrm{Ran}(T)$ es cerrado entonces $\dim \mathrm{Ran}(T) < \infty$.

   d) Si $\dim E = \infty$, entonces existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ tal que $\|x_n\| = 1 \quad \forall n$ y $Tx_n \to 0$ (*sug.: T acotado inferiormente $\Rightarrow$ Ran(T) cerrado).*

4. Sea E reflexivo y separable. Probar que todo operador $T \in \mathcal{L}(E, \ell^1)$ es compacto.

5. *a*) Si $T \in \mathcal{L}(\ell^2, \ell^1)$ entonces T es compacto.

   b) Sea $i : \ell^1 \to \ell^2$ la inclusión. ¿Es i compacta?

   c) Probar que la inclusión $i : C^1([0, 1]) \to C([0, 1])$ es compacta.

6. Sean $k \in C([a, b] \times [a, b])$ y $K : C[a, b] \to C[a, b]$ el operador integral con núcleo k,

$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x, y)f(y)\, dy.$$

   Probar que K es un operador lineal compacto *(sug.: Arzela-Ascoli).*

   ¿Qué sucede si se reemplaza $[a, b]$ por $\overline{U}$ con U abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$?

7. Probar que el operador de Volterra $V : C[0, 1] \to C[0, 1]$ dado por $Vf(x) = \int_0^x f(t)dt$ es compacto.

8. Probar que para cada $g \in L^2[0, \pi]$, la ecuación $f(x) - \int_0^{\pi} \mathrm{sen}(x + y)f(y)dy = g(x)$ tiene solución $f \in L^2[0, \pi]$.

9. Probar que si $K : E \to E$ es compacto, entonces $(1 - K)^n$ tiene núcleo de dimensión finita, para cada $n \in \mathbb{N}$.

10. Sea $T : E \to F$ operador de Fredholm. Probar que

    a) T' es de Fredholm y además $\mathrm{ind}(T') = -\mathrm{ind}(T)$.

    b) Si $\dim(\ker(T')) = 0$ entonces para cada $y \in E$ la ecuación $Tx = y$ tiene solución.

    c) Si $A : F \to G$ es inversible entonces AT es de Fredholm y además $\mathrm{ind}(AT) = \mathrm{ind}(T)$.

    e)* Si $R : F \to G$ es de Fredholm entonces $\mathrm{ind}(RT) = \mathrm{ind}(R) + \mathrm{ind}(T)$.

11. Considerar $S : \ell^2 \to \ell^2$ el operador Shift y T su inverso a izquierda,

    a) Mostrar que son operadores de Fredholm y calcular sus índices.

    b) Mostrar que S^k y T^k también son operadores de Fredholm y calcular sus índices.

12. Sea H espacio de Hilbert, $\{e_n\}_n$ b.o.n. de H. Supongamos que $\{y_n\}_n$ es un conjunto linealmente independiente de H, tal que $\sum_n \|e_n - y_n\|^2 < \infty$.

    a) Sea $Tx = \sum_n \langle x, e_n\rangle y_n$. Probar que T es un operador acotado e inyectivo en H.

    b) Probar que $T - 1$ es compacto.

    c) Probar que $\operatorname{span}\{y_n\}_n$ es denso en H *(sug: $T = 1 + (T-1)$)*.

    d) Si $\{y_n\}$ es un conjunto ortonormal, resulta una b.o.n.

13. (Espacio de Hardy). Sea $H = L^2(\mathbb{T})$, con $\mathbb{T}$ la circunferencia unitaria. Consideramos la descomposición en coeficientes de Fourier de $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)z^n \in H$ dada por

$$H^+ = \{f \in H : \hat{f}(n) = 0\,\forall n < 0\}, \quad H^- = \{f \in H : \hat{f}(n) = 0\,\forall n \geq 0\}.$$

    Denotamos $H^+ = H^2(\mathbb{T})$ el *espacio de Hardy*. Probar que ambos subespacios son cerrados y ortogonales, que $H = H^+ \oplus H^-$, y que toda función $\varphi \in C(T)$ es límite uniforme de polinomios trigonométricos.

14. (Operadores de Hankel) Sean $P_+, P_- \in \mathcal{L}(H)$ los proyectores ortogonales con rango H^+, H^- respectivamente. Si y $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ está acotada, entonces el *operador de Hankel* $H_\varphi : H^+ \to H^-$ está dado por $H_\varphi = P_- M_\varphi|_{H^+}$. Probar que

    a) Si $k \in \mathbb{K}$, y $\varphi(z) = z^k$, entonces el rango de H_φ está contenido en el subespacio de dimensión finita $\langle z^j\rangle_{j=-k,\ldots,-1}$.

    b) Probar que H_φ es compacto para toda φ continua.

15. (Operadores de Toeplitz). Si $\varphi \in C(\mathbb{T})$, el *operador de Toeplitz* $T_\varphi : H^+ \to H^+$ está dado por $T_\varphi = P_+ M_\varphi|_{H^+}$. Probar que

    a) Si φ no se anula, T_φ es un operador de Fredholm *(sugerencia: probar que $T_\varphi T_{1/\varphi} = P_+ - P_+ M_\varphi H_{1/\varphi} = 1 + K$)*.

    b) Si $k \in \mathbb{Z}$ y $\varphi(z) = z^k$, entonces $\operatorname{ind}(T_\varphi) = -k$.

    c) Si φ es no nula y $\omega(\varphi)$ denota el índice de vueltas que da la imagen de φ alrededor de $z = 0$, entonces $\operatorname{ind}(T_\varphi) = -\omega(\varphi)$.

5. Teoría espectral en espacios de Banach

> El camino más corto entre dos verdades en el dominio real, pasa por el dominio complejo.
>
> J. Hadamard

En este capitulo estudiaremos el espectro de operadores acotados en espacios normados, y daremos los fundamentos del cálculo funcional analítico de Riesz. En este capítulo todos los espacios vectoriales son sobre $\mathbb{C}$.

Dado un e.v.t. E, definimos el espectro de $A \in \mathcal{L}(E)$ como

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \text{ no es inversible}\}.$$

El conjunto *resolvente* de A, es el complemento del espectro, esto es

$$\sigma(A)^c = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \text{ es inversible}\}.$$

Veamos un par de ejemplos patológicos antes de seguir adelante.

Ejemplo 5.1 (Un operador acotado con espectro vacio). Sea

$$E = \{f \in C^\infty[0, +\infty) : f^{(k)}(0) = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0\},$$

con la familia de seminormas $\|f\|_n = \sup\{|f^{(k)}(t)| : k \leqslant n,\ t \in [0, n]\}$ (sobreentendemos que para cada $f \in E$, existe $\varepsilon > 0$ tal que f es suave en algún intervalo $(-\varepsilon, +\infty)$). Entonces es fácil ver que E es Fréchet. Definimos $A = \frac{d}{dt}$, A es claramente lineal y además preserva E. Por otro lado, para cada n,

$$\begin{aligned}\|Af\|_n &= \sup\{|(Af)^{(k)}(t)| : k \leqslant n,\ t \in [0, n]\} = \sup\{|f^{(k+1)}(t)| : k \leqslant n,\ t \in [0, n]\} \\ &\leqslant \sup\{|f^{(k+1)}(t)| : k \leqslant n,\ t \in [0, n + 1]\} \leqslant \|f\|_{n+1},\end{aligned}$$

luego A es continuo. Pero para cada $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(R_\lambda f)(x) = e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda t} f(t) dt$$

es también continuo en E y es inversa bilátera de $A - \lambda$ (afirmaciones que puede el lector verificar). Luego $\sigma(A) = \emptyset$.

Ejemplo 5.2 (Un operador acotado cuyo espectro es todo el plano). Sea $E = \mathcal{H}ol(\mathbb{C})$ con la familia de seminormas usual. Si A está dado por $(Af)(z) = zf(z)$ entonces A es lineal y continuo. Pero

$$(A - \lambda)f(z) = zf(z) - \lambda f(z) = (z - \lambda)f(z)$$

asi que toda función en el rango de $A - \lambda$ debe tener una raíz en $z = \lambda$. Esto prueba que $A - \lambda$ nunca es sobreyectivo, asi que no puede ser inversible. En conclusión, $\sigma(A) = \mathbb{C}$.

Estos ejemplos muestran que la teoría espectral en espacios de Fréchet es salvaje, y una manera de atacar estas dificultades es pedir que las inversas de los operadores $A - \lambda$ estén en familias más restrictivas dentro de $\mathcal{L}(E)$, obteniendo así más control sobre los posibles valores espectrales de A. No seguiremos ese camino en este texto, sino que limitaremos la familia de espacios vectoriales a los espacios de Banach, donde el espectro tiene propiedades más controlables.

5.1. Espectro, autovalores, radio espectral

De aquí en más, y en lo que resta de este capítulo, sea E espacio de Banach, $A \in \mathcal{L}(E)$. Un número λ puede estar en el espectro de A por diversos motivos:

1. $A - \lambda$ no es inyectivo, en ese caso decimos que $\lambda \in \sigma_p(A)$, el *espectro puntual* de A. En este caso $E_\lambda = \ker(A - \lambda)$ se denomina *autoespacio* del *autovalor* λ, y todo $v \in E_\lambda$ se denomina *autovector* de A.

2. $A - \lambda$ es inyectivo y tiene rango propiamente denso (es denso y no es todo E). En ese caso diremos que $\lambda \in \sigma_c(A)$, el *espectro continuo* de A.

3. $A - \lambda$ es inyectivo y su rango tiene codimensión mayor o igual a uno, en ese caso diremos que $\lambda \in \sigma_r(A)$, el *espectro residual*.

Notemos que denotando con $\sqcup$ la unión disjunta,

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) \sqcup \sigma_r(A).$$

Consideraremos también los siguientes subconjuntos del espectro:

1. $A - \lambda$ no es un operador de Fredholm, en ese caso diremos que $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$, el *espectro esencial*.

2. El *espectro discreto*, $\sigma_d(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_{ess}(A)$.

§ También es relevante considerar cuando $A - \lambda$ no está acotado inferiormente. En ese caso diremos que $\lambda \in \sigma_{ap}(A)$, el *espectro puntual aproximado*.

§ El espectro esencial de A es el espectro de A mirado como operador en el álgebra de Calkin $\mathcal{L}(E)/\mathcal{K}(E)$ (Ejercicio 12, Sección 5.5).

Señalamos ahora algunas relaciones entre estas clasificaciones:

Si λ es autovalor de A, entonces $A - \lambda$ no puede estar acotado inferiormente; lo mismo ocurre si λ está en el espectro continuo (si fuese acotado inferiormente, entonces tendria rango cerrado, luego seria sobreyectivo), luego

$$\sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) \subset \sigma_{ap}(A).$$

Es posible que λ esté en el espectro residual y el puntual aproximado simultáneamente, basta tomar un operador que no sea inyectivo ni sobreyectivo, y entonces 0 estará en ambos espectros.

Una caracterización útil del espectro puntual aproximado y su relación con el espectro esencial:

Lema 5.3. *Sea $A \in \mathcal{L}(E)$. Entonces $\lambda \in \sigma_{ap}(A)$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_n \subset E$ tal que $\|x_n\| = 1$ y*

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n - \lambda x_n\| = 0.$$

Demostración. Si existe una sucesión así, $A - \lambda$ no está acotado inferiormente, luego aunque fuera inyectivo, su inversa no sería acotada ya que

$$1 = \|x_n\| = \|(A - \lambda)^{-1}(A - \lambda)x_n\| \leqslant C\|(A - \lambda)x_n\| \xrightarrow{n} 0$$

es absurdo. Pero esto dice que $A - \lambda$ no puede estar acotado inferiormente, luego $\lambda \in \sigma_{ap}(A)$. Supongamos ahora que $\lambda \in \sigma_{ap}(A)$, tenemos que existe x_n con la propiedad deseada ya que $A - \lambda$ no está acotado inferiormente. □

§ Notemos que si $\lambda \in \sigma_{ap}(A) \setminus \sigma_p(A)$, entonces $A - \lambda$ es inyectivo pero no puede ser sobreyectivo ya que en ese caso (por el Teorema de la función abierta) seria inversible. Se dan dos posibilidades: o bien $\lambda \in \sigma_r(A)$ (cuando el rango tiene codimensión positiva), o bien el rango de A es denso. Entonces

$$\sigma_c(A) = \sigma_{ap}(A) \setminus (\sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)).$$

5.1.1. Propiedades del espectro

Observación 5.4. Si $\mu \in \mathbb{C}$, entonces para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ se tiene

$$\sigma(1 - \mu A) = \{1 - \mu\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Para $\mu = 0$ la afirmación es trivial. Supondremos $\mu \neq 0$. Si $\lambda \in \sigma(A)$ entonces

$$1 - \mu A - (1 - \mu\lambda) = \mu(\lambda - A)$$

lo que prueba que $1 - \mu\lambda \in \sigma(1 - \mu A)$. Recíprocamente, si $x \in \sigma(1 - \mu A)$, tomamos $\lambda = \frac{1-x}{\mu}$ y se tiene

$$A - \lambda = {}^1\!/\!_\mu[(1 - \mu A) - x]$$

lo que prueba que $\lambda \in \sigma(A)$ y $x = 1 - \mu\lambda$.

Lema 5.5. *Para todo $A, B \in \mathcal{L}(E)$,*

1. *$1 - AB$ tiene inversa a izquierda (resp. derecha) si y sólo si $1 - BA$ tiene inversa a izquierda (resp. derecha).*
2. *$\sigma(AB) \cup \{0\} = \sigma(BA) \cup \{0\}$.*

Demostración. Supongamos que $C \in \mathcal{L}(E)$ es la inversa a derecha de $1 - AB$, es decir

$$(1 - AB)C = 1.$$

Esto se puede reescribir como $ABC = C - 1$. Se tiene que $1 + BCA$ es la inversa a derecha de $1 - BA$:

$$\begin{aligned}(1 - BA)(1 + BCA) &= 1 - BA + BCA - BABCA = 1 - BA + BCA - B(C - 1)A \\ &= 1 - BA + BCA - BCA + BA = 1.\end{aligned}$$

Para la inversa a izquierda se razona de forma análoga. Ahora bien si $\lambda \notin \sigma(AB)$, y $\lambda \neq 0$, dividiendo por λ tenemos que $1 \notin \sigma(ab)$ donde a, b son A, B divididos por λ. Así que $1 - ab$ tiene inversa a izquierda y a derecha, luego $1 - ba$ tiene inversa a izquierda y a derecha, luego es inversible. Multiplicando por λ, deducimos que $\lambda - BA$ es inversible y por ende $\lambda \notin \sigma(BA)$. Esto prueba que $\sigma(BA) \subset \sigma(AB) \cup \{0\}$. Por simetría, tenemos una inclusión análoga, lo que prueba el resultado. □

5.1.2. Radio espectral

El *radio espectral* de $A \in \mathcal{L}(E)$ es

$$\rho(A) = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Observemos que ρ puede anularse sobre elementos no nulos. Por ejemplo, si $E = \mathbb{C}^2$ y

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces $\sigma(A) = \{0\}$, con lo cual $\rho(A) = 0$, pero $A \neq 0$. En general, el radio espectral de cualquier nilpotente ($A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$) es nulo.

Lema 5.6 (Serie de Neumann). *Si $A \in \mathcal{L}(E)$ verifica $\|1 - A\| < 1$, entonces A es inversible,*

$$A^{-1} = \sum_{n \geq 0} (1 - A)^n$$

y además $\|A^{-1}\| \leqslant (1 - \|1 - A\|)^{-1}$.

Demostración. Basta probar que la serie es convergente en la norma de $\mathcal{L}(E)$, puesto que operando formalmente con ella se verifica que multiplicada de cualquiera de los dos lados por A devuelve la identidad. Pero la serie de las normas es convergente por la hipótesis y $\mathcal{L}(E)$ es completo pues E lo es, luego la serie es convergente. La cota para la norma de la inversa se obtiene acotando la serie que define A^{-1}. □

§ Denotamos $GL(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$ al conjunto de operadores inversibles de E en F.

Teorema 5.7 (Operadores inversibles). *Si $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$, A es inversible y $\|A - B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, entonces B es inversible. Además la inversión $I : GL(E, F) \to GL(F, E)$ es continua y tiene dominio abierto en $\mathcal{L}(E, F)$.*

Demostración. Como

$$\|1 - A^{-1}B\| = \|A^{-1}(A - B)\| \leqslant \|A^{-1}\| \, \|A - B\| < 1,$$

se sigue que $A^{-1}B$ es inversible por el lema previo, y en consecuencia, B es inversible. Esto dice que los operadores inversibles forman un abierto en $\mathcal{L}(E, F)$.

Si A, B son inversibles y $\|A - B\| < \frac{1}{2}\|A^{-1}\|^{-1}$, entonces $\|1 - A^{-1}B\| < \frac{1}{2}$ y en consecuencia $A^{-1}B$ es inversible y

$$\|B^{-1}A\| = \|(A^{-1}B)^{-1}\| \leqslant (1 - \|1 - A^{-1}B\|)^{-1} < 2$$

por la cota del lema anterior. Entonces

$$\|B^{-1}\| \leqslant \|B^{-1}A\| \, \|A^{-1}\| < 2\|A^{-1}\|.$$

Como $A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}$,

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| \leqslant \|A^{-1}\| \, \|A - B\| \, \|B^{-1}\| < 2\|A^{-1}\|^2 \, \|A - B\|.$$

Así que si $A \to B$, con A, B inversibles, $A^{-1} \to B^{-1}$ con lo cual la inversión es continua. □

Corolario 5.8 (El radio espectral está acotado por la norma). *Si $A \in \mathcal{L}(E)$, entonces*

$$\rho(A) \leqslant \|A\|,$$

y en particular el espectro es un conjunto acotado del plano complejo.

Demostración. Observemos que si $|\lambda| > \|A\|$ entonces $\|A/\lambda\| < 1$ con lo cual $1 - A/\lambda$ es inversible o equivalentemente $\lambda - A$ es inversible. Esto nos dice que $\lambda \notin \sigma(A)$, y hemos probado que $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|A\|\}$. □

Corolario 5.9 (El espectro es un subconjunto compacto del plano).

Demostración. Ya vimos que el espectro es acotado. Consideremos $g(\lambda) = A - \lambda$, que resulta ser una función continua $g : \mathbb{C} \to \mathcal{L}(E)$. El conjunto

$$g^{-1}(GL(E)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \text{ es inversible}\}$$

coincide con el complemento del espectro de A, es decir $\sigma(A)^c = g^{-1}(GL(E))$, lo que prueba que la resolvente es abierta, y en consecuencia $\sigma(A)$ es cerrado; como es acotado resulta ser compacto. □

Veremos más adelante que el espectro es siempre no vacío.

Definición 5.10 (Resolvente). Dado $A \in \mathcal{L}(E)$, definimos la función *resolvente* de A, denotada $R_A(\lambda) : \sigma(A)^c \to \mathcal{L}(E)$ como

$$\lambda \mapsto R_A(\lambda) = (A - \lambda)^{-1}.$$

Si no hay ambiguedades, podemos denotar $R(\lambda) = (A - \lambda)^{-1}$.

Observación 5.11 (La resolvente es continua). Como vimos, el dominio de R_A es un abierto no vacio del plano complejo, entorno de infinito (está definida en, por lo menos $|\lambda| > \|A\|$). Se trata claramente de una función continua, ya que la inversión es una función continua en $\mathcal{L}(E)$ (Teorema 5.7).

Dejamos para el lector manipularla para obtener (Ejercicio 3, Sección 5.5):

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu) \quad \forall \lambda, \mu \in \rho(A) = \sigma(A)^c. \tag{5.1}$$

§ Diremos que una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathcal{L}(E)$ es *analítica* si para cada $\varphi \in \mathcal{L}(E)'$, la composición $\varphi \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa.

Lema 5.12. *Dado $A \in \mathcal{L}(E)$, la resolvente $R_A(\lambda) : \rho(A) \to \mathcal{L}(E)$ es analítica y además*

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} R_A(\lambda) = 0.$$

Demostración. Para λ suficientemente grande, se tiene $\|A/\lambda\| < 1$ y entonces

$$\|(A - \lambda)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|}\|(1 - A/\lambda)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n \geq 0}\|A/\lambda\|^n = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|} \xrightarrow{\lambda \to \infty} 0.$$

Luego $R_A(\lambda)$ tiende a cero en infinito. Por otro lado, dada $\varphi \in \mathcal{L}(E)'$, podemos hallar una fórmula explícita para la derivada holomorfa de $\varphi \circ R_A(\lambda)$:

$$\frac{d}{d\lambda}\varphi((A - \lambda)^{-1}) = \varphi((A - \lambda)^{-2}).$$

La prueba de esta fórmula queda para el lector (Ejercicio 4, Sección 5.5). □

Corolario 5.13. *Para todo $A \in \mathcal{L}(E)$, el espectro de A es un conjunto compacto y no vacio del plano complejo.*

Demostración. Ya probamos que es compacto. Supongamos que es vacio para algún A, entonces dada $\varphi \in \mathcal{L}(E)'$, la función $g(\lambda) = \varphi((A-\lambda)^{-1})$ es una función entera (holomorfa en todo el plano complejo) y tiende a cero en infinito. Por ser continua, debe ser acotada en todo el plano, y esto por el Teorema de Louiville nos dice que g debe ser constante; como su límite es nulo, debe ser $g = 0$ en $\mathbb{C}$. Pero $\varphi((A-\lambda)^{-1}) = 0$ para toda funcional del dual implica que $(A-\lambda)^{-1} = 0$, y esto es absurdo. □

Probamos ahora un lema que establece que el espectro $\sigma : \mathcal{L}(E) \to 2^{\mathbb{C}}$ es una función semicontinua superiormente, en el siguiente sentido:

Lema 5.14. *Sea $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $\sigma(A) \subset \Omega$ con $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Entonces existe $\varepsilon = \varepsilon(A,\Omega)$ tal que $\|B - A\| < \varepsilon$ implica $\sigma(B) \subset \Omega$.*

Demostración. Si $\lambda \notin \sigma(A)$, entonces $f(\lambda) = \|(A-\lambda)^{-1}\|$ es una función continua, que verifica $f(\lambda) \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$. En consecuencia, existe $M > 0$ tal que $f(\lambda) < M$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} - \Omega$. Sea $\varepsilon = 1/M$, entonces si $B \in \mathcal{L}(E)$ verifica $\|B - A\| < \varepsilon$ y $\mu \notin \Omega$, probaremos que $\mu \notin \sigma(B)$. Se tiene que $\mu - A$ es inversible y además

$$\|(\mu - A)^{-1}(B - A)\| < f(\mu)\|B - A\| < 1,$$

con lo cual $1 - (\mu - A)^{-1}(B - A)$ es inversible y entonces

$$\mu - B = (\mu - A)\left[1 - (\mu - A)^{-1}(B - A)\right]$$

también es inversible por ser producto de inversibles. □

Corolario 5.15. *El radio espectral $\rho : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ es semicontinuo superiormente, esto es, si $A_n \to A$ en $\mathcal{L}(E)$, entonces*

$$\rho(A) \geqslant \limsup_n \rho(A_n).$$

Demostración. Supongamos que no es así, existe entonces $A_n \to A$ y $\delta > 0$ tales que, pasando a una subsucesión si es necesario, $\rho(A_n) \geqslant \rho(A) + \delta$. Ahora para cada n tomamos $\lambda_n \in \sigma(A_n)$ tal que

$$|\lambda_n| \geqslant \rho(A) + \delta, \tag{5.2}$$

y como $|\lambda_n| = \rho(A_n) \leqslant \|A_n\|$, esta sucesión de números complejos resulta acotada. Pasando nuevamente a una subsucesión, podemos suponer que $\lambda_n \to \lambda$ in $\mathbb{C}$. Notemos ahora que los operadores $A_n - \lambda_n$ no son inversibles, y convergen en norma al operador $A - \lambda$. Como el conjunto de inversibles es abierto, $A - \lambda$ tampoco es inversible, esto es $\lambda \in \sigma(A)$, y en particular, $|\lambda| \leqslant \rho(A)$. Pero por otro lado, tomando límite en (5.2) tenemos que $|\lambda| \geqslant \rho(A) + \delta > \rho(A)$, una contradicción. □

Observación 5.16. El radio espectral no es una función continua, es decir, el espectro no depende continuamente del operador elegido.

Un ejemplo de esto, debido a Kakutani (ver [10, pag. 113]) se obtiene con una sucesión de operadores nilpontentes $A_n \in \mathcal{L}(H)$, -donde H es un espacio de Hilbert separable-, que convergen en norma a un operador acotado A, pero A tiene radio espectral no nulo.

En particular la función radio espectral no es semicontinua inferiormente, pues en este ejemplo, se deduce que $\rho(A) > 0$ mientras que $\rho(A_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego *es falso* que $\rho(A) \leqslant \liminf_n \rho(A_n)$.

5.2. Cálculo funcional holomorfo

En esta sección presentamos el cálculo holomorfo de Cauchy-Dunford-Riesz, y para ello debemos extender primero la noción de integral de linea (usada en el plano complejo para la fórmula de Cauchy) al contexto de espacios vectoriales. Dado que el teorema de Hahn-Banach será necesario para separar puntos, es razonable suponer que este espacio es al menos localmente convexo.

5.2.1. Integración de curvas en espacios de Fréchet

Sea F espacio de Fréchet, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo, y $f : I \to F$ una función. Diremos que f es una función *elemental* o simple si existe una partición de I en finitos intervalos disjuntos $I_j \subset I$ y una colección de vectores $\{v_j\}_{j=1\ldots n} \subset F$ tales que $f|_{I_j} = v_j$, es decir, si f es constante en cada intervalo $I_j = [t_j, t_{j+1})$ de la partición.

Hacemos de $C = C([a, b], F)$ un espacio localmente convexo con la familia de seminormas

$$\|f\|_n = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|_n$$

donde $(\|\cdot\|_n)_n$ es la familia de seminormas de F. No es difícil ver que resulta completo, luego F es un espacio de Fréchet.

Definimos de manera similar el espacio de las *funciones continuas a trozos por derecha a valores en* F, $\mathcal{PC} = PC([a, b], F)$ de manera similar a las funciones que toman valores en $\mathbb{K}$ (ver la Definición 2.17). Claramente $C \subset \mathcal{PC}$ pero también es evidente que toda función simple está en $\mathcal{PC}$ y que las mismas son densas.

Luego para cada $f \in C$, podemos tomar una función simple que la aproxime tanto como deseemos en $\mathcal{PC}$.

Cuando f es elemental, definimos la integral de f sobre $[a, b]$ con la regla del trapezoide

$$\int_a^b f = \sum_{i=1\ldots n} \frac{1}{2}[f(t_{i-1}) + f(t_i)](t_i - t_{i-1}).$$

§ Definimos la *derivada* de $f \in C([a, b], F)$ como

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(t + h) - f(t)\right],$$

en caso que exista. Si existe y la función $t \mapsto f'(t)$ es continua, decimos que f es de clase C^1. Diremos que f es C^1 a trozos si es de clase C^1 salvo finitos puntos $t_i \in [a,b]$, y allí existen los límites

$$f'(t_i^+) = \lim_{t \to t_i^+} f'(t), \qquad f'(t_i^-) = \lim_{t \to t_i^-} f'(t).$$

Definición 5.17 (Integral de una curva). Sea $f \in F = C = C([a,b],F)$, $(f_n)_n \subseteq C$ funciones elementales tales que $f_n \to f$ en C. Definimos

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_n \int_a^b f_n(t)dt.$$

Lema 5.18 (Propiedades de la integral de curvas). *Sea $f \in C([a,b],F)$. Entonces su integral no depende de la sucesión de funciones elementales que la aproxime. Además*

1. *Si $T : F \to G$ es un operador lineal continuo (G espacio de Fréchet), entonces*

$$T\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b T(f(t))dt,$$

2. *Si $\|\cdot\| : F \to \mathbb{R}$ es seminorma continua, entonces*

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|dt,$$

en particular si $\|f(t)\| \leqslant M$ en $[a,b]$, entonces $\|\int_a^b f\| \leqslant M(b-a)$,

3. $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$,

4. $\int_a^b(\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$ *para toda $g \in C([a,b],F)$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$,*

5. *si f es C^1 entonces $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$,*

Demostración. Todas las propiedades menos la última son evidentes si f es constante a trozos, y se llega a ellas aproximando funciones continuas con funciones de esta familia. Respecto de la última identidad, consideramos $g(t) = \varphi(f(t))$ para $\varphi \in F'$, y notamos que $g : [a,b] \to \mathbb{K}$ es de clase C^1. Entonces

$$\varphi(f(b)) - \varphi(f(a)) = g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)dt = \int_a^b \varphi(f'(t))dt$$

donde la derivada pasa dentro de la funcional φ ya que la misma es lineal y continua. Como esta identidad vale para toda φ, y el dual separa puntos de F, deducimos la identidad del último item. □

La primer propiedad es particularmente útil para reducir una ecuación a valores reales o complejos si usamos funcionales del dual. Así, por ejemplo, si

$$\int_a^b (\varphi \circ f) = 0 \in \mathbb{K}$$

para toda $\varphi \in F'$, se deduce por el teorema de Hahn-Banach que $\int_a^b f = 0 \in F$.

5.2.2. Integrales de linea en $\mathcal{L}(E)$

Ahora introducimos el cálculo funcional con una identidad fundamental:

Lema 5.19. *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva simple de clase C^1 a trozos, alrededor del espectro de $A \in \mathcal{L}(E)$, orientada de forma positiva. Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene*

$$A^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma w^n (w - A)^{-1} dw.$$

Demostración. La integral está bien definida pues parametrizando γ, como la inversión es continua, se obtiene una función continua $f : t \mapsto \gamma(t)^n(\gamma(t) - A)^{-1}\dot{\gamma}(t)$ a valores en $F = \mathcal{L}(E)$, que es exactamente el integrando considerado.

Sea $\varphi \in \mathcal{L}(E)'$ una funcional continua, consideramos la composición $g = \varphi \circ R_A : \sigma(A)^c \to \mathbb{C}$, que es una función holomorfa por el Lema 5.12. Supongamos que $|\lambda| > \|A\|$: entonces por la fórmula de la serie de Neumann,

$$g(\lambda) = \varphi((\lambda - A)^{-1}) = \sum_{k \geqslant 0} \lambda^{-1-k} \varphi(A^k).$$

Tomando una circunferencia $\Gamma_R \subset \mathbb{C}$ centrada en el origen y de radio $R > \|A\|$ nos aseguramos que $\Gamma_R \subset \sigma(A)^c$ y que $\sigma(A) \subset Int(\Gamma_R)$. Podemos entonces calcular, para cualquier $n \in \mathbb{N}_0$, la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \lambda^n g(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \sum_{k \geqslant 0} \lambda^{n-k-1} d\lambda \varphi(A^k) = \varphi(A^n),$$

donde el único término que sobrevive es el correspondiente a $k = n$ pues todos los demás tienen primitiva (estamos usando la fórmula de los residuos).

Reemplazando la curva Γ_R por una curva C^1 a trozos γ simplemente orientada que tenga al espectro de A en su interior, tenemos que

$$\varphi(A^n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \lambda^n \, \varphi((\lambda - A)^{-1}) \, d\lambda$$

pues $\lambda^n g(\lambda)$ es analítica en el interior de la región encerrada por γ y Γ_R. Como esto vale para cualquier φ en el dual, se tiene

$$A^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \lambda^n (\lambda - A)^{-1} \, d\lambda.$$

□

5.2.3. Radio espectral y fórmula de Riesz

Estamos en condiciones de dar una fórmula para el radio espectral, que utiliza la norma de las potencias del operador.

Corolario 5.20 (Fórmula del radio espectral). *Si $A \in \mathcal{L}(E)$, entonces*

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = \inf_{n\geq 1} \|A^n\|^{1/n}.$$

Demostración. Si $z \in \sigma(A)$, entonces $z^n \in \sigma(A^n)$ (Ejercicio 1, Sección 5.5), luego $|z|^n = |z^n| \leqslant \rho(A^n) \leqslant \|A^n\|$, de donde deducimos $|z| \leqslant \|A^n\|^{1/n}$, con lo cual

$$|z| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$$

y tomando supremo sobre $z \in \sigma(A)$ se tiene

$$\rho(A) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Por otra parte, consideramos para $r > \rho(A)$, $M(r) = \max_{\theta} \|R_A(re^{i\theta})\|$. Este número es finito puesto que $\lambda \mapsto \|(\lambda - A)^{-1}\|$ es continua en $\sigma(A)^c$ (Observación 5.11). Por la fórmula integral y la Observación 5.18

$$\|A^n\| = \frac{1}{2\pi}\|\int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta} R_A(re^{i\theta})\, rie^{i\theta}\, d\theta\| \leqslant r^{n+1} M(r),$$

con lo cual $\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \leqslant r$, de manera que

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \leqslant \rho(A).$$

Ahora

$$\rho(A) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \leqslant \rho(A),$$

con lo cual el límite existe y coincide con $\rho(A)$.

Por último, de $|z| \leqslant \|A^n\|^{1/n}$ también se deduce que

$$\rho(A) \leqslant \inf_{n\geqslant 1} \|A^n\|^{1/n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = \rho(A).$$

□

Consideremos, para $A \in \mathcal{L}(E)$, el conjunto

$$\mathcal{H}ol(\sigma(A)) = \{f : \text{ existe un abierto } \Omega \supset \sigma(A) \text{ tal que } f \text{ es analítica en } \Omega\}.$$

Notemos que el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ *depende de* f.

§ Dada $f \in \mathcal{H}ol(\sigma(A))$, consideremos una curva simple cerrada $\gamma : [0,1] \to \Omega$ de clase C^1 alrededor del espectro de A, orientada de forma positiva, y notamos que

$$t \mapsto f(\gamma(t))(A - \gamma(t))^{-1}\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{L}(E)$$

es una función continua en $\sigma(A)^c$.

Definición 5.21 (Fórmula de Riesz del cálculo funcional holomorfo). La integral

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(w)(w-A)^{-1}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 f(\gamma(t))(\gamma(t)-A)^{-1}\dot{\gamma}(t)dt \tag{5.3}$$

está bien definida como integral de una curva continua a valores en el espacio de Banach $\mathcal{L}(E)$, y además *no depende de la curva* γ.

Para verificar la última afirmación, componemos con $\varphi \in \mathcal{L}(E)'$, y si $\tilde{\gamma}$ es otra curva con las mismas características, entonces la diferencia de las integrales -que son ahora integrales de funciones a valores en $\mathbb{C}$- se puede reescribir -como es habitual- como suma de integrales de curvas cerradas, y en este caso los integrandos quedan analíticos en los interiores, con lo cual la diferencia es nula. Una vez más, como la integral es nula para cada $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, la integral es nula como operador.

5.2.4. Aproximación por polinomios y funciones racionales

Tomemos un polinomio

$$p(z) = \alpha_n z^n + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

donde los α_i son números reales o complejos. Entonces tiene sentido calcular

$$p(A) = \alpha_n A^n + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0$$

para cualquier $A \in \mathcal{L}(E)$. Como es habitual, evaluar α_0 en el elemento $A \in \mathcal{L}(E)$ lo pensamos como el elemento $\alpha_0 1 \in \mathcal{L}(E)$, donde 1 denota el operador identidad. También seguimos la costumbre de denotar $\alpha_0 1$ directamente como α_0.

Con esta notación, si q es una función racional cuyos polos no están en el espectro de A, usando la escritura en fracciones parciales (Observación 2.22) podemos escribir

$$q(A) = p_0(A) + \sum_{i=1}^{k} p_j((A-\lambda_j)^{-1}) \in \mathcal{L}(E)$$

donde $\lambda_j \in \mathbb{C}$ son los polos de q (las raíces del denominador) contadas con multiplicidad, y los p_i ($i = 0 \ldots k$) son polinomios; para $i \neq 0$, los polinomios p_i no tienen término independiente.

Si γ es cualquier curva simple orientada de manera positiva alrededor de $\sigma(A)$, se tiene

$$p(A) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma p(w)(w-A)^{-1}dw$$

por el Lema 5.19, pero entonces también, aplicando el razonamiento a $p_0(A)$ y a p_j (evaluado en $A_j = (A-\lambda_j)^{-1}$) se tiene

$$q(A) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma q(w)(w-A)^{-1}dw$$

para toda función racional cuyos polos no estén en $\sigma(A)$ (eligiendo la curva γ para que deje los polos fuera).

Observación 5.22 (Aproximación por funciones racionales). Tomamos $f \in \mathcal{H}ol(\sigma(A))$ y una curva simple $\gamma \subset \Omega \setminus \sigma(A)$ (Ω es el dominio de holomorfía de f). Consideramos el compacto $K = \overline{Int(\gamma)}$. Se sigue del teorema de Runge (Teorema 2.24) que existe una sucesión de funciones racionales q_n que converge uniformemente a f en K, en particular en γ (y podemos suponer que todos los polos están lejos de K). Luego

$$\begin{aligned} \|f(A) - q_n(A)\| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_\gamma |f(w) - q_n(w)|\, \|(w - A)^{-1}\| d|\gamma| \\ &\leqslant cte. \max_{w\in\gamma} |f(w) - q_n(w)| \to 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Esto prueba que la definición de la fórmula de Riesz es natural para toda $f \in \mathcal{H}ol(\sigma(A))$.

En cada componente conexa de $\sigma(A)$, podemos reemplazar la aproximación por una sucesión de *polinomios*, también por el teorema de Runge.

5.3. Teorema espectral

Veamos ahora como se relacionan el espectro de A y el de $f(A)$.

Proposición 5.23. *Si p es un polinomio y $A \in \mathcal{L}(E)$, entonces*

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Demostración. Sea $n \geqslant 1$ el grado de p. Supongamos primero que $\alpha \in \sigma(p(A))$. Escribimos

$$p(z) - \alpha = c_n \prod (z - \lambda_i)$$

con $\lambda_i \in \mathbb{C}$ las n raíces del polinomio $p - \alpha$. Como

$$p(A) - \alpha = c_n \prod (A - \lambda_i)$$

y $p(A)-\alpha$ no es inversible, al menos uno de los factores -digamos $A-\lambda_1$- es no inversible, es decir $\lambda_1 \in \sigma(A)$. Ahora observemos que $p(\lambda_1) - \alpha = 0$, luego $\alpha = p(\lambda_1)$ con $\lambda_1 \in \sigma(A)$ lo que prueba que $\alpha \in p(\sigma(A))$.

Para ver la otra inclusión, tomamos $p(\lambda) \in p(\sigma(A))$ con $\lambda \in \sigma(A)$. Escribimos

$$p(z) = c_n z^n + \cdots + c_1 z + c_0,$$

luego

$$p(A) - p(\lambda) = c_n(A^n - \lambda^n) + \cdots + c_1(A - \lambda) = (A - \lambda)q(A, \lambda) = q(A, \lambda)(A - \lambda).$$

Como $A - \lambda$ no es inversible, concluimos que $p(A) - p(\lambda)$ no es inversible puesto que de serlo, si C es su inversa entonces $Cq(A, \lambda)$ resultaría la inversa de $A - \lambda$. □

Teorema 5.24 (Teorema espectral). *Dado $A \in \mathcal{L}(E)$, consideramos la aplicación $ev_A = f \mapsto f(A)$ de $\mathcal{H}ol(\sigma(A)) \to \mathcal{L}(E)$. Entonces*

1. *ev_A es lineal, continua y multiplicativa,*

2. *$f(A)$ es inversible si y solo si $f \neq 0$ en $\sigma(A)$,*

3. *$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.*

Demostración. Que $(f+g)(A) = f(A)+g(A)$ es evidente de la fórmula integral de Riesz, la prueba de la continuidad es idéntica a la que hicimos para aproximar f con una función racional. Para ver que es multiplicativa, supongamos primero que f, g son funciones racionales sin polos en Ω, tales que $fg = h$. Entonces simplemente manipulando los polinomios se tiene $f(A)g(A) = h(A)$. El caso general es imediato aproximando f, g con sucesiones de funciones racionales cuyos polos estén lejos de Ω (Teorema de Runge 2.24).

Supongamos primero que f no se anula en el compacto $\sigma(A)$; como f es holomorfa en un entorno abierto Ω que contiene al mismo, existe un abierto Ω_1 donde f no se anula, $\sigma(A) \subset \Omega_1 \subset \Omega$. Luego $g = 1/f$ es holomorfa en Ω_1 y $fg = 1$ allí. Aplicando el primer item a este producto, obtenemos $f(A)g(A) = 1$, puesto que $ev_A(1) = 1$. Pero entonces también $g(A)f(A) = 1$, y deducimos que $f(A)$ es inversible. Recíprocamente, supongamos que existe $\lambda \in \sigma(A)$ tal que $f(\lambda) = 0$. Entonces como f es holomorfa en Ω, existe h holomorfa en Ω tal que

$$(w - \lambda)h(w) = f(w) \quad \forall w \in \Omega,$$

y aplicando el morfismo ev_A obtenemos $(A - \lambda)h(A) = f(A)$, y esto dice que $f(A)$ no es inversible (si C fuese inversa de $f(A)$ es fácil ver que $Ch(A)$ seria inversa de $A - \lambda$, lo cual es absurdo pues $\lambda \in \sigma(A)$).

Para probar la fórmula del espectro, fijado $\lambda \in \mathbb{C}$, tenemos que $\lambda \notin \sigma(f(A))$ si y solo si $f(A) - \lambda 1$ es inversible. Por lo recién probado, esto es si y solo si $f - \lambda$ no se anula en $\sigma(A)$, o equivalentemente, si y solo si $\lambda \neq f(\beta)$ para todo $\beta \in \sigma(A)$, esto es, si y solo si $\lambda \notin f(\sigma(A))$. □

Teorema 5.25 (Composición de funciones). *Sea $A \in \mathcal{L}(E)$. Si f, g son dos funciones tales que $f \in \mathcal{H}ol(\sigma(A))$, $g \in \mathcal{H}ol(\sigma(f(A)))$, entonces $g \circ f \in \mathcal{H}ol(\sigma(A))$ y además*

$$(g \circ f)(A) = g(f(A)).$$

Demostración. La primera afirmación es trivial ya que $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$, para probar la segunda consideramos una curva suave simple γ_1 alrededor de $f(\sigma(A))$, y dentro del dominio de holomorfia Ω_g de g.

Como f es holomorfa en un entorno Ω_f de $\sigma(A)$, existe Ω abierto tal que $\sigma(A) \subset \Omega \subset \Omega_f$, (donde Ω_f es el dominio de f) y una curva suave simple γ_0 alrededor de $\sigma(A)$ de manera tal que $f(\Omega) \subset \mathrm{Int}(\gamma_1)$, y además el indice de γ_1 alrededor de cualquier $f(\lambda)$ es uno para cualquier $\lambda \in \Omega$.

Entonces por un lado,

$$g(f(z)) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{g(w)}{w - f(z)} dw, \qquad z \in \Omega$$

y por otro lado como $w - f$ es inversible para todo $w \in \gamma_1$, se tiene $(w - f)^{-1}$ holomorfa en Ω (y $w \notin \sigma(f(A))$), así que también

$$(w - f(A))^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_0} (w - f(z))^{-1}(z - A)^{-1} dz.$$

Pero entonces

$$\begin{aligned} g(f(A)) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} g(w)(w - f(A))^{-1} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_0} g(w)(w - f(z))^{-1}(z - A)^{-1}\, dz\, dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_0} g(f(z))\,(z - A)^{-1}\, dz = (g \circ f)(A). \end{aligned}$$

El intercambio de las integrales está justificado componiendo con $\varphi \in \mathcal{L}(E)'$ y usando el Teorema de Fubini. □

Corolario 5.26 (Ecuaciones espectrales). *Si existe $f \in \mathcal{H}ol(\sigma(A))$ tal que $f(A) = 0$, entonces $\sigma(A) \subset Z(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : f(\lambda) = 0\}$.*

Demostración. Como 0 es el único valor espectral de $0 = f(A)$, de deduce que $\{0\} = \sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$, de ahí la conclusión. □

§ Algunas consecuencias simples:

1. Si $P^2 = P \in \mathcal{L}(E)$ es un proyector no trivial, entonces $\sigma(P) = \{0, 1\}$.

2. Si $A^2 = 1$, entonces $\sigma(A) \subset \{-1, 1\}$.

3. Si $\mathcal{F}$ es el operador de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\sigma(\mathcal{F}) \subset \{1, i, -1, -i\}$, pues $\mathcal{F}^4 = 1$.

4. Si A es nilpontente (existe n tal que $A^n = 0$), entonces $\sigma(A) = \{0\}$.

§ Si consideramos una función holomorfa

$$f(z) = \sum_{n \in N} c_n (z - z_0)^n$$

en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \|z - z_0\| < R\}$, entonces la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} c_n (A - z_0)^n$ es convergente en $\mathcal{L}(E)$ si $\|A - z_0\| < R$. También puede probarse que si $\sigma(A) \subset \Omega$, este operador coincide con el cálculo funcional de Riesz. Lo mismo ocurre si f es entera, la serie de f evaluada en A coincide con el cálculo funcional de Riesz. Estas afirmaciones quedan como ejercicio para el lector (Ejercicio 5, Sección 5.5).

Definición 5.27 (Subespacios invariantes). Diremos que un subespacio $S \subset E$ es *subespacio invariante de $A \in \mathcal{L}(E)$* si $AS \subset S$.

§ La búsqueda de subespacios invariantes es un problema importante de la teoría de operadores, ya que permite reducir el estudio de A a sus subespacios invariantes. Un problema abierto muy importante es si todo operador en un espacio de Hilbert tiene un subespacio invariante no trivial.

Si $A \in \mathcal{L}(E)$ tiene un autovalor λ, entonces el subespacio

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda) \subset E$$

de todos los autovectores ligados a λ, es un subespacio invariante para A, pues para todo $v \in E_\lambda$, $Av = \lambda v \in E_\lambda$.

5.3.1. Proyectores espectrales

Dado $A \in \mathcal{L}(E)$, supongamos que $V \subset \sigma(A)$ es una componente de $\sigma(A)$ separada del resto, $\sigma(A) = V \cup V^c$ y V no es vacío ni todo $\sigma(A)$.

Entonces $V \subset \mathbb{C}$ es compacto y podemos considerar una curva suave simple γ alrededor de V, que no toque las otras componentes, orientada de manera positiva, y definir

$$P = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma (w - A)^{-1} dw.$$

Es fácil ver que P es lineal y acotado, ya que la resolvente es continua en $\sigma(A)^c$, luego

$$\|P\| \leqslant \frac{L(\gamma)}{2\pi} \operatorname{máx}\{\|R_w\| : w \in \gamma\}.$$

Lema 5.28 (Proyectores de Riesz). *Sea $A \in \mathcal{L}(E)$, $\sigma(A) = V \cup V^c$ con V componente conexa no trivial. El operador acotado así definido verifica:*

1. $P^2 = P$ *(P es un proyector)*, $0 \neq P \neq 1$.
2. $PA = AP$ *(P conmuta con A)*
3. *Los subespacios $RanP, \ker P$ son invariantes para A.*
4. *Si $A = A_1 + A_2 = AP + A(1 - P)$, entonces $A_1 A_2 = 0$ y $\sigma(A_1) = V \cup \{0\}$, $\sigma(A_2) = (\sigma(A) \setminus V) \cup \{0\}$.*
5. *Si $0 \notin V$, entonces $A_V = A|_{RanP} : RanP \to RanP$ es inversible y $\sigma(A_V) = V$.*

Demostración. Separamos V y su complemento en $\sigma(A)$ con sendos abiertos Ω_1, Ω_2, entonces $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ es un abierto que contiene $\sigma(A)$ y si definimos f como 1 en Ω_1 y 0 en Ω_2, se tiene f holomorfa en Ω. Entonces inspeccionando la definición de P se observa que $P = f(A)$. Como $f^2 = f$, y la evaluación en A es un homomorfismo, se arriba a $P^2 = f(A)^2 = f^2(A) = f(A) = P$.

Si fuese $P = 0$, tendriamos $0 = P = f(A)$ y entonces $\sigma(A) \subset Z(f) = \Omega_2$ (Corolario 5.26), contradiciendo que $\sigma(A)$ tiene dos componentes conexas distintas. De la misma manera, no puede ser $P = 1$ ya que $1 - P = 0 = (1 - f)(A)$ y nuevamente llegamos que $\sigma(A) \subset Z(1 - f) = \Omega_1$, contradicción.

Como A conmuta con $(w - A)^{-1}$, la integral es un límite de sumas y A es continuo, A conmuta con P. Sea $v \in \mathrm{Ran}P$, entonces $Pv = v$, luego $Av = APv = PAv$, y esto dice que $Av \in \mathrm{Ran}P$. Si $v \in \ker P$, entonces $PAv = APv = A0 = 0$, luego $Av \in \ker P$.

Que $A_1A_2 = 0$ es inmediato de que $P^2 = P$ luego $P(1 - P) = 0$. Consideremos $f_1(z) = zf(z)$, $f_2(z) = z(1 - f(z))$, entonces $A_i = f_i(A)$, luego

$$\sigma(A_1) = \sigma(f_1(A)) = f_1(\sigma(A)) = \{zf(z) : z \in \sigma(A)\} = V \cup \{0\},$$

y con un razonamiento similar se obtiene el espectro de $\sigma(A_2)$.

Si $0 \notin V$, podemos suponer que $0 \notin \Omega_1$. Entonces la función definida como $g(z) = 1/z$ para $z \in \Omega_1$ y extendida por 0 en Ω_2, es holomorfa en Ω. Luego $B = g(A)$ es acotado, y como $g(z)f(z) = g(z)$, se tiene $BP = PB = B$, luego el rango de P también es invariante para B. Ahora como $zg(z) = f(z)$ y el cálculo funcional es multiplicativo, se tiene $AB = BA = P$, y esto dice que la restricción de B al rango de P es la inversa de la restricción de A. Del ítem anterior y de que esta restricción es inversible deducimos que $\sigma(A_V) = V$. □

§ Si el espectro de $A \in \mathcal{L}(E)$ tiene dos componentes conexas, hemos probado que A tiene un subespacio invariante no trivial.

5.3.2. Operadores compactos

Teorema 5.29. *Sea $K \in \mathcal{L}(E)$ operador compacto. Sea $\lambda \neq 0$ y $\lambda \in \sigma(K)$. Entonces*

1. *$\lambda \in \sigma_p(K)$, es decir λ es un autovalor de K,*
2. *El autoespacio $\ker(K - \lambda)$ tiene dimensión finita.*
3. *$\sigma(K)$ es a lo sumo numerable, y sólo se puede acumular en 0.*
4. *Si la dimensión de E es infinita, $0 \in \sigma(K)$.*

Demostración. Si $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda^{-1}K$ es compacto y entonces $1 - \lambda^{-1}K$ es Fredholm de índice cero. Pero si λ no fuera autovalor, $1 - \lambda^{-1}K$ sería inyectivo pero no suryectivo (si fuera suryectivo tendria rango cerrado, y como es inyectivo seria inversible por el teorema de la función abierta). Esto contradice que tenga índice cero.

Asimismo, como K es compacto $\dim\ker(\lambda - K) = \dim\ker(1 - \lambda^{-1}K) < \infty$.

Si el espectro es finito, no hay nada que probar. Supongamos que es al menos numerable, y tomemos $\varepsilon > 0$. Si existen infinitos $\lambda_i \in \sigma(K)$ tales que $|\lambda_i| \geqslant \varepsilon$, sea $E_n = \{v_1, \cdots, v_n\}$ el subespacio generado por los autovectores de cada λ_i, $i = 1 \ldots n$. Entonces la inclusión $E_n \subset E_{n+1}$ es estricta (Ejercicio 6, Sección 5.5), y podemos tomar para cada $n \geqslant 2$ un vector unitario $y_n \in E_n$ tal que $d(y_n, E_{n-1}) > 1/2$. Notemos primero que si $y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, entonces

$$(K - \lambda_n)y_n = \sum_i \alpha_i \lambda_i x_i - \sum_i \alpha_i \lambda_n x_i = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \lambda_n) x_i \in E_{n-1}.$$

Pero entonces para $m < n$,

$$\begin{aligned} \|K(\lambda_n^{-1} y_n) - K(\lambda_m^{-1} y_m)\| &= \|\lambda_n^{-1}(K - \lambda_n)y_n - \lambda_m^{-1}(K - \lambda_m)y_m + y_n - y_m\| \\ &= \|y_n - \left\{ y_m + \lambda_m^{-1}(K - \lambda_m)y_m + \lambda_n^{-1}(K - \lambda_n)y_n \right\}\| > 1/2 \end{aligned}$$

pues $y_m + \lambda_m^{-1}(K - \lambda_m)y_m + \lambda_n^{-1}(K - \lambda_n)y_n \in E_{n-1}$. De aquí deducimos que la sucesión acotada $\{K(\lambda_n^{-1} y_n)\}_n$ no tiene ninguna subsucesión convergente, y esto es absurdo pues K es compacto y $\|\lambda_n^{-1} y_n\| = |\lambda_n^{-1}| \leqslant \varepsilon^{-1}$. Hemos probado que 0 es el único punto de acumulación de $\sigma(K)$. Pero entonces además

$$\sigma(K) = \bigcup_n \left\{ |\lambda| > \frac{1}{n} \right\},$$

y cada uno de estos conjuntos es finito, así que $\sigma(A)$ es numerable.

Si la dimensión de E es infininita, K no puede ser inversible porque en ese caso $1 = K^{-1}K$ seria compacto, y eso es una contradicción. Luego en este caso $0 \in \sigma(K)$. □

§ Si K es compacto y su espectro no es únicamente $\{0\}$, entonces tiene un subespacio invariante. El operador de Volterra (Ejercicio 18, Sección 5.5) es un operador compacto tal que $\sigma(V) = \{0\}$, sin embargo 0 no es un autovalor, así que no podemos concluir que tiene un subespacio invariante. Sin embargo,

Teorema 5.30 (Lomonosov-Hilden). *Todo operador compacto $K \in \mathcal{L}(E)$ en un espacio de Banach complejo tiene un subespacio invariante no trivial.*

Para una demostración recomendamos el libro de Lax, [9, 25.1, Theorem 1].

5.3.3. Operadores Hermitianos

Diremos que $A \in \mathcal{L}(E)$ es *Hermitiano* si e^{itA} es una isometría para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir si

$$\|e^{itA} v\| = \|v\| \qquad \forall v \in E.$$

Notar que e^X siempre es inversible puesto que $e^{-X} = (e^X)^{-1}$ se sigue de inspeccionar la serie de potencias.

Los elementos Hermitianos son los más lejanos a los nilpotentes, en el siguiente sentido:

Teorema 5.31. *Sea $A \in \mathcal{L}(E)$ Hermitiano. Entonces $\|A\| = \rho(A)$.*

Demostración. Usaremos el desarrollo en serie de potencias de la función $\operatorname{arc\,sen} : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$:

$$\operatorname{arc\,sen}(x) = \sum_{n\geq 0} a_k x^k.$$

Los a_k son reales y positivos. No es difícil probar que la serie converge uniformemente en $|x| < 1$, y que para $x = 1$ es convergente y

$$\operatorname{arc\,sen}(1) = \sum_{n\geq 0} a_k = \frac{\pi}{2}.$$

Sea B Hermitiano tal que $\rho(B) < \pi/2$. Entonces $\rho(\operatorname{sen}(B)) = \operatorname{sen}(\rho(B)) < 1$, y por el cálculo funcional analítico,

$$B = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen}(B)) = \sum_{n\geq 0} a_k \operatorname{sen}(B)^k.$$

Como $\operatorname{sen}(B) = \frac{e^{iB}-e^{-iB}}{2i}$ y B es Hermitiano, resulta $\|\operatorname{sen}(B)\| \leqslant 1$, con lo cual

$$\|B\| \leqslant \sum_{n\geq 0} a_k \|\operatorname{sen}(B)\|^k \leqslant \sum_{n\geq 0} a_k = \frac{\pi}{2}.$$

Para A Hermitiano, supongamos primero que $\rho(A) = 0$. Tomamos $t > 0$ y entonces por lo que acabamos de probar, como $\rho(tA) = \rho(A)t = 0$, se tiene $\|tA\| \leqslant \pi/2$; haciendo tender $t \to +\infty$ se tiene un absurdo, salvo que $\|A\| = 0$, luego $\rho(A) = \|A\| = 0$.

Sabemos que $\rho(A) \leqslant \|A\|$ siempre es válido. Veamos que vale la otra desigualdad. Sea entonces $0 < t < \frac{\pi}{2\rho(A)}$. Entonces $\rho(tA) = \rho(A)t < \pi/2$, con lo cual $t\|A\| = \|tA\| \leqslant \pi/2$. Haciendo tender $t \to \frac{\pi}{2\rho(A)}$ por la izquierda, se tiene $\frac{\pi}{2\rho(A)}\|A\| \leqslant \pi/2$, luego $\|A\| \leqslant \rho(A)$. □

5.4. Resultados complementarios: álgebras de Banach

Un *álgebra de Banach* $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ que tiene un producto tal que $\|ab\| \leqslant \|a\|\,\|b\|$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$. En general las álgebras se consideran con unidad, y se pide que $\|1\| = 1$.

Observación 5.32. En caso de no poseer unidad, hay un procedimiento sencillo para adjuntarle una unidad en la inclusión natural $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \times \mathbb{K}$, definiendo la unidad de $\mathcal{A}_1$ como el elemento $(0, 1)$ y dandole la estructura de álgebra ineludible

$$(A, \alpha) \cdot (B, \beta) = (AB + \alpha B + \beta A, \alpha\beta).$$

Hacemos de $\mathcal{A}_1$ un espacio normado con la fórmula

$$\|(A, \alpha)\| = \sup\{\|(A + \alpha)B\| : B \in \mathcal{A},\ \|B\| = 1\}.$$

Claramente $\|1\| = \|(0, 1)\| = 1$, como deseábamos. Puede el lector comprobar que se trata de un espacio de Banach, ya que $\mathcal{A}$ lo era. Y por último, que

$$\|(A, \alpha)(B, \beta)\| \leqslant \|(A, \alpha)\|\,\|(B, \beta)\|.$$

De hecho, con esta norma la inclusión $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$ resulta obviamente contractiva $\|(A, 0)\| \leqslant \|A\|$, en particular continua e inyectiva, y como tanto $\mathcal{A}$ como su imagen $(\mathcal{A}, 0) \subset \mathcal{A}_1$ son espacios de Banach, entonces la inclusión es abierta, y da un homeomorfismo entre $\mathcal{A}$ e $i(\mathcal{A}) = (\mathcal{A}, 0) \subset \mathcal{A}_1$. Por eso el procedimiento se denomina *adjunción* de unidad (en caso de tener $\mathcal{A}$ unidad aproximada, es fácil ver que la inclusión es *isométrica*).

La teoría de Álgebras de Banach da un marco abstracto para los cálculos que hicimos en este capítulo, ya que si E es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ es un álgebra de Banach. Todos los resultados que probamos en este capítulo (que los inversibles forman un conjunto abierto, la continuidad de la inversión, la holomorfía de la función resolvente, las propiedades del espectro, la fórmula de Riesz del cálculo funcional, la fórmula del radio espectral, el teorema del cálculo funcional holomorfo) tienen validez en álgebras de Banach complejas, con la misma demostración.

5.4.1. Representación como operadores lineales acotados

Cabe notar que en cierto sentido no hemos perdido generalidad trabajando en $\mathcal{L}(E)$, ya que toda álgebra se representa isométricamente en el espacio de Banach $E = \mathcal{A}$, simplemente actuando por multiplicación a izquierda (o derecha): dado $A \in \mathcal{A}$, consideramos $L_A : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dado por $L_A B = AB$. Entonces L_A es lineal y acotado $\|L_A\| \leqslant \|A\|$, pero como $L_A 1 = A$, se sique que $\|L_A\| = \|A\|$.

Por otro lado, $L : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{A})$ dado por $L(A) = L_A$ es lineal, e isométrico, ya que $\|L(A)\| \leqslant \|L(A)1\| = \|A\|$, y $L(1) = 1$ asi que $\|L\| = 1$. Como L es isométrico y A es completa, es fácil ver que $L(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{A})$ es una subálgebra cerrada en norma.

Con esto, no es difícil ver que entonces A es inversible en $\mathcal{A}$ si y solo si L_A es inversible en $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, y reemplazando A por $A - \lambda$, arribamos a $\sigma(A) = \sigma(L_A)$.

Observación 5.33. Estas observaciones muestran que la teoría espectral en álgebras de Banach puede hacerse, *sin pérdida de generalidad*, suponiendo que el álgebra es una subálgebra cerrada de $\mathcal{L}(E)$, para algún espacio de Banach E (de hecho, $E = \mathcal{A}$).

5.5. Ejercicios

En esta sección de ejercicios, E, F denotan espacios de Banach.

1. Sea $A \in \mathcal{L}(E)$, sea $n \in \mathbb{N}_0$. Probar que
   a) $\sigma(A^n) = \sigma(A)^n$.
   b) $\sigma(A^{-1}) = \sigma(A)^{-1}$ si $A \in GL(E)$.
   c) $\sigma(A) = \sigma(A')$.
2. Sea $T : \ell^p \to \ell^p$ dado por $T(x) = (\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $1 \leqslant p < \infty$ y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

a) $R(T)$ es cerrado si y sólo si $(1/\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada (considerando sólo los n tales que $\alpha_n \neq 0$).

b) T es compacto si y sólo si $\alpha_n \to 0$

c) $\operatorname{Ran}(T)$ es finito si y solo si finitos α_n son no nulos.

d) Hallar $\sigma(T)$.

3. Dado $A \in \mathcal{L}(E)$, si $R(\lambda) = (A-\lambda)^{-1}$ es la resolvente de A definida en $\Omega = \sigma(A)^c$, probar que para todo $\lambda, \mu \in \Omega$

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu).$$

4. Sea $A \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi \in \mathcal{L}(E)'$. Si $f : \Omega = \sigma(A)^c \to \mathbb{C}$ está dada por $f(\lambda) = \varphi((A-\lambda)^{-1})$, probar que

$$\frac{f(\lambda) - f(\lambda_0) - (\lambda-\lambda_0)\varphi((A-\lambda_0)^{-2})}{\lambda - \lambda_0} \xrightarrow{\lambda\to\lambda_0} 0,$$

concluir que f es holomorfa en Ω y que $f'(\lambda) = \varphi((A-\lambda)^{-2})$.

5. Sea $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n(z-z_0)^n$ holomorfa en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$, sea $A \in \mathcal{L}(E)$. Probar que

a) La serie $S_A = \sum_{n\in N} c_n(A-z_0)^n$ es convergente en $\mathcal{L}(E)$ si $\|A - z_0\| < R$

b) Si $\sigma(A) \subset \Omega$, este operador S_A coincide con el cálculo funcional de Riesz $f(A)$.

c) Si f es entera, la serie de f evaluada en A coincide con el cálculo funcional de Riesz $f(A)$.

6. Probar que si $\{\lambda_i\}_{i=1..n} \subset \sigma_p(A)$ son todos distintos, y $v_i \in E$ son autovectores no nulos correspondientes a cada λ_i, entonces los v_i son linealmente independientes.

7. Sea $A \in \mathcal{L}(E)$ inversible y tal que $\sigma(A)$ no separa 0 de ∞ en $\mathbb{C}$. Probar que

a) A tiene un logaritmo: existe $B \in \mathcal{L}(E)$ tal que $e^B = \exp(B) = A$.

b) A tiene raíces n-ésimas: para todo $n \geq 0$ existe $C \in \mathcal{L}(E)$ tal que $C^n = A$.

c) Si $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, entonces hay un logaritmo $B = \ln(A)$ tal que $\sigma(\ln(A)) \subset \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$.

8. Sea $A \in \mathcal{L}(E)$, λ autovalor de A. Entonces $f(\lambda)$ es autovalor de $f(A)$, para toda $f \in \mathcal{H}ol(\sigma(A))$. ¿Todo autovalor de $f(A)$ es de esta forma?

9. Sean S, T los shifts a derecha e izquierda respectivamente, actuando en ℓ^p con $1 < p < \infty$.

a) Probar que $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant 1\}$, y que si $|\lambda| < 1$ entonces es autovalor.

b) Calcular $\sigma(S)$ y probar que S no tiene autovalores.

10. Dada $\varphi \in L^\infty(X,\mu)$ y $1 \leqslant p < \infty$, consideramos M_φ el operador de multiplicación en $L^p(X,\mu)$, y definimos el rango esencial de φ como

$$\operatorname{im es}(\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0,\ \mu(x : |f(x) - \lambda| < \varepsilon) > 0\}.$$

   a) Probar que $\sigma(M_\varphi) = \operatorname{im es}(\varphi)$.
   b) $\lambda \in \sigma(M_\varphi)$ es autovalor si y solo si $\mu(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0$.
   c) Probar que $M'_\varphi = M_\varphi$, si identificamos $L^q = (L^p)'$, $1/p + 1/q = 1$.
   d) Probar que M_φ es inversible si y solo si es acotado inferiormente.
   e) Si $X = [0,1]$ y φ es continua, probar que M_φ es compacto sólo si $\varphi = 0$.

11. Si $\varphi \in C(\mathbb{T})$ y H_φ, T_φ son los operadores Hankel y Toeplitz en el espacio de Hardy $H^2(\mathbb{T}) = H^+$, denotamos $\chi_k(z) = z^k, k \in \mathbb{Z}$. Probar que

   a) $\{\chi_k f : k \in \mathbb{Z}, f \in H^2\}$ es denso en L^2.
   b) Si T_φ es inversible entonces M_φ es inversible en $L^2(\mathbb{T})$.
   c) $\sigma_{ess}(T_\varphi) \subseteq \operatorname{im}(\varphi) = \sigma(M_\varphi) \subseteq \sigma(T_\varphi)$ *(sug: considerar $T_\varphi T_{1/\varphi} = P_+ - P_+ M_\varphi H_{1/\varphi}$ para la primera inclusión).*

12. Sean $A, K \in \mathcal{L}(E)$ con K compacto, probar que $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A + K)$.

13. Sea $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto, probar que si $f \in \mathcal{H}ol(\sigma(K))$ y $f(0) = 0$, entonces $f(K)$ es compacto *(sug: $f(z) = zg(z)$ para alguna $g \in \mathcal{H}ol(\sigma(A))$).*

14. Sean $(X,\mu), (Y,\tilde{\mu})$ espacios de medida, y sean $\{f_n\}_n \subset L^2(X,\mu)$ (resp. $\{g_m\}_m \subset L^2(Y,\tilde{\mu})$) bases ortonormales. Sea $f_n g_m(x,y) = f_n(x) g_n(y)$. Probar que $\{f_n g_m\}_{n,m}$ es una b.o.n. de $L^2(X \times Y, \mu \times \tilde{\mu})$.

15. Sea $H = L^2(X,\mu)$, sea $k \in L^2(X \times X)$ y $K \in \mathcal{L}(H)$ el operador integral con núcleo k.

   a) Si $k_i \to k$ en $L^2(X \times X)$, entonces $K_i \to K$ en $\mathcal{L}(H)$.
   b) K es compacto (sug: $k = \sum_{n,m} \alpha_{nm} f_n f_m$).
   c) Si $\alpha_{nm} = 0$ para $n \neq m$, probar que los α_{nn} son autovalores de K y las f_n autofunciones, en particular $\sigma(K) \subset \ell^2$.

16. Un operador es *cuasi-nilpotente* si $\sigma(A) = \{0\}$. Probar que $A : \ell^2 \to \ell^2$ dado por $A(x_1, x_2, \cdots) = (0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{4}, \ldots, \frac{x_n}{2^n}, \ldots)$ es cuasi-nilpotente.

17. Sea $V \subset \sigma(A)$ componente conexa del operador acotado $A \in \mathcal{L}(E)$, sea P el proyector espectral de asociado a V, y $F = \operatorname{Ran} P$. Si $A_V \in \mathcal{L}(F)$ denota la restricción de A, probar que $\sigma(A_V) = V$. En particular, si $0 \notin V$, entonces A_V es inversible.

18. Sea V el operador de Volterra $V : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ dado por $V(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$. Probar que V es compacto, que $\sigma(V) = \{0\}$ y que $\ker V = \{0\}$.

   Probar que para $a > 0$, $S_a = \{f \in L^2 : f|_{[0,a]} = 0\}$ es subespacio invariante de V.

19. Si $K \in \mathcal{L}(E)$ es compacto, y $0 \neq \lambda \in \sigma(K)$, sea P_λ el proyector espectral de K asociado a λ, $E_\lambda = \mathrm{Ran} P_\lambda$. Probar que

    a) $\dim E_\lambda < \infty$.

    b) K restringido a E_λ es inversible y su espectro es $\{\lambda\}$.

    c) K admite una descomposición en bloques de Jordan como la de las matrices, en particular existe $n = n(\lambda) > 0$ tal que $E_\lambda = \ker(K - \lambda)^n$.

20. Sean $A, B \in \mathcal{L}(E)$ con A compacto. Probar que para cada $\lambda \in \sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$, la multiplicidad de λ como autovalor de AB coincide con la de BA *(sug: probar que por restricción, $B : \ker(AB - \lambda) \to \ker(BA - \lambda)$ es biyectivo).*

21. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathcal{L}(E)$, decimos que f *analítica* si es derivable en Ω.

    a) Probar que si f es analítica, entonces f' es localmente acotada en Ω *(sug: para cada $\varphi \in \mathcal{L}(E)'$, $g = \varphi \circ f$ es holomorfa en Ω, luego usar el PAU).*

    b) Probar que si f es analítica entonces es continua.

    c) Probar que f es analítica si y solo si $\varphi \circ f$ es holomorfa para toda $\varphi \in \mathcal{L}(E)'$ *(sug: probar que vale la fórmula de Riesz a valores en $\mathcal{L}(E)$ para f).*

    d) Probar que la resolvente $R_A(\lambda)$ de un operador acotado A, es analítica en $\Omega = \sigma(A)^c$.

22. Sea $(A_n)_n \subset \mathcal{L}(E)$, y supongamos que para toda $\varphi \in \mathcal{L}(E)'$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \varphi(A_n) z^n$ es convergente en $|z| < R$. Probar que la serie $f(z) = \sum_{n\geqslant 1} A_n z^n$ es convergente en $|z| < R$ y f es analítica allí *(sug: definir $f(z)(\varphi) = \varphi(f(z))$ y usar el PAU).*

6. Operadores en espacios de Hilbert

> Cuando uno se ha realmente compenetrado con un tema de estudio, cosas que previamente parecían estar en completo contraste, pueden ser vistas como meras transformaciones matemáticas una de la otra.
>
> John von Neumann

Estudiaremos en este último capítulo operadores en espacios de Hilbert, con especial énfasis en la teoría espectral de operadores autoadjuntos. Recordemos entonces la noción de operador adjunto en un espacio de Hilbert complejo H.

Definición 6.1 (Operador adjunto). Sea $A \in \mathcal{L}(H)$. El operador adjunto de A, denotado como A^* es el único operador lineal en H que verifica

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \qquad \forall x, y \in H.$$

Consideremos por un momento la forma bilineal $\beta(x, y) = \langle Ax, y\rangle$. Es inmediato que β es sesqui-lineal y acotada $\|\beta\| = \|A\|$. Entonces por el Teorema de Representación de Riesz para formas bilineales (Teorema 3.17), existe T lineal y acotado tal que $\|T\| = \|\beta\| = \|A\|$. Como

$$\langle Ax, y\rangle = \beta(x, y) = \langle x, A^*y\rangle \qquad \forall x, y \in H$$

debe ser $T = A^*$. Hemos probado que A^* es acotado en H.

Esta misma cuenta prueba además que la involución $A \mapsto A^*$ es una isometría en $\mathcal{L}(H)$, ya que $\|A\| = \|A^*\|$.

Atención que si H es complejo, la involución no es lineal sino que es anti-lineal.

Es fácil ver que $(AB)^* = B^*A^*$ para todo $A, B \in \mathcal{L}(H)$.

Definición 6.2 (Operadores normales y autoadjuntos). Diremos que $A \in \mathcal{L}(H)$ es *normal* si $A^*A = A^*A$, que es *autoadjunto* (o Hermitiano) si $A^* = A$.

Lema 6.3. *Para todo $A \in \mathcal{L}(H)$, se tiene $\|A^*A\| = \|A\|^2 = \|AA^*\|$. Si A es normal (en particular, autoadjunto), entonces*

$$\rho(A) = \|A\|$$

donde ρ denota el radio espectral.

Demostración. Tenemos $\|A^*A\| \leqslant \|A^*\|\,\|A\| = \|A\|^2$, y por otro lado, para cada $x \in B_H = \{x \in H : \|x\| \leqslant 1\}$,

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle \leqslant \|A^*A\|.$$

Tomando supremo sobre x se deduce $\|A\|^2 \leqslant \|A^*A\|$ lo que prueba que $\|A^*A\| = \|A\|^2$. Cambiando A por A^* se tiene también $\|AA^*\| = \|A\|^2$.

Supongamos ahora que A es normal, entonces $B = A^*A = A^*A$ es autoadjunto y además $(A^2)^* = (AA)^* = A^*A^* = (A^*)^2$, luego

$$\|A\|^4 = \|AA^*\|^2 = \|(AA^*)^*AA^*\| = \|AAA^*A^*\| = \|A^2(A^2)^*\| = \|A^2\|^2,$$

con lo cual $\|A\|^2 = \|A^2\|$. Iterando el procedimiento, tenemos que $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que

$$\|A\| = \|A^{2^n}\|^{1/2^n} \xrightarrow{n} \rho(A)$$

donde hemos usado la fórmula del radio espectral (Corolario 5.20). □

No es difícil probar que un operador normal es inversible si y solo si es acotado inferiormente (Ejercicio 2, Sección 6.5). Para operadores autoadjuntos esto permite caracterizar mejor su espectro:

Lema 6.4. *Si $A^* = A$ entonces $\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|] \subset \mathbb{R}$ y además $\|A\|$ ó $-\|A\| \in \sigma(A)$.*

Demostración. Sea $\lambda = a + ib \in \sigma(A)$, entonces

$$\begin{aligned}\|(A-\lambda)x\|^2 &= \|Ax - ax\|^2 + |b|^2\,\|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle (A-a)x, ibx\rangle \\ &= \|Ax - ax\|^2 + |b|^2\,\|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\{ib\langle (A-a)x, x\rangle\} = \|Ax - ax\|^2 + |b|^2\,\|x\|^2.\end{aligned}$$

Luego $\|(A-\lambda)x\| \geqslant |b|\,\|x\|$ y si $b \neq 0$, $A - \lambda$, que es normal, sería acotado inferiormente. Entonces seria inversible y $\lambda \notin \sigma(A)$. Concluimos que $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Como $\rho(A) = \|A\|$, se tiene la aseveración del lema. □

Observación 6.5 (Subespacios invariantes). Si $A^* = A$, y $S \subset H$ es subespacio invariante para A, entonces $S^\perp$ es también invariante para A y además las restricciones de A en S y $S^\perp$ son operadores autoadjuntos. En efecto, si $y \in S^\perp, x \in S$, entonces

$$\langle Ay, x\rangle = \langle y, Ax\rangle = 0$$

pues $Ax \in S$, luego $AS^\perp \subset S^\perp$.

En particular, como $S = \ker A$ es invariante para A, y $\ker A^\perp = \overline{\mathrm{Ran} A}$ (Ejercicio 1, Sección 6.5), tenemos la descomposición

$$H = \overline{\mathrm{Ran} A} \oplus \ker A$$

y ambos son subespacios invariantes para A.

Teorema 6.6 (Teorema espectral, operadores compactos autoadjuntos). *Sea $A^* = A \in \mathcal{L}(H)$ compacto, entonces existe un conjunto ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H que es b.o.n. de $\operatorname{Ran}A$ y tal que $Ae_n = \lambda_n e_n$ donde $(\lambda_n)_n = \sigma(A) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$, contando cada autovalor no nulo con su (finita) multiplicidad. Extendiendo este conjunto con una b.o.n. de $\ker A$ obtenemos una base ortonormal de H.*

Demostración. Por el teorema espectral para operadores compactos, sabemos que el espectro de A es discreto, sólo se puede acumular en $\lambda = 0$, y que la multiplicidad de cada $\lambda_n \neq 0$ es finita. Además, autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales (Ejercicio 2, Sección 6.5). Tomamos entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ una b.o.n. del autoespacio de $0 \neq \lambda_n \in \sigma(A)$. Este conjunto $\{e_n\}_n$ es a lo sumo numerable y ortonormal, y verifica $Ae_n = \lambda_n e_n$ para todo n.

Afirmamos que la clausura S del subespacio generado $\langle e_n\rangle_n$ es todo el rango de A. Notemos que $S \subset \overline{\operatorname{Ran}A} \subset H$ es un subespacio invariante para A, luego $H = S \oplus S^\perp$ con $S^\perp$ invariante para A, y la restricción $\widehat{A} = A|_{S^\perp} \in \mathcal{L}(S^\perp)$ es autoadjunta y compacta.

Supongamos que $\widehat{A}$ tiene un autovalor no nulo, tiene entonces un autovector no nulo. Pero si $\varphi \in H$ es un autovector de $\widehat{A}$, entonces $A\varphi = \lambda\varphi$, luego también es un autovector de A con el mismo autovalor, y esto dice que $\lambda = \lambda_n$ para algún n y que $\varphi \in S$, absurdo. Como $\widehat{A}$ es compacto, $\sigma(\widehat{A}) = \{0\}$. Pero como $\widehat{A}$ es autoadjunto, $0 = \rho(\widehat{A}) = \|\widehat{A}\|$, luego $\widehat{A} = 0$. Esto dice que $S^\perp \subset \ker A$, luego $\overline{\operatorname{Ran}A} = \ker A^\perp \subset S$, que es lo que afirmamos. □

Observación 6.7. En el teorema anterior, la base obtenida será numerable si y solo si H es separable, si y solo si el núcleo de A es separable, ya que en cualquier caso se tiene que para un operador compacto autoadjunto, su rango siempre es separable.

§ Denotando $P_n = e_n \otimes e_n$, donde $x \otimes y(z) = \langle z, y\rangle x$, tenemos que P_n es el proyector ortogonal en H con rango $\langle e_n\rangle$. Luego el teorema anterior nos dice que para todo $x \in H$,

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x,$$

donde la suma es convergente en H. Dejamos como ejercicio ver que la suma es convergente en norma de operadores (Ejercicio 7, Sección 6.5):

Corolario 6.8 (Forma canónica de un operador compacto autoadjunto). *Dado $A^* = A \in \mathcal{L}(H)$ operador compacto, y $(\lambda_n)_n = \sigma(A) \setminus \{0\}$, la serie*

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

es convergente en $\mathcal{L}(E)$.

6.1. Cálculo funcional continuo

Enunciamos un caso particular del teorema de Stone-Weierstrass que será de extrema utilidad. La demostración puede verse en el libro de Reed-Simon, [11, pág. 103].

Teorema 6.9 (Teorema de Stone-Weierstrass). *Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto. Si $C(K)$ denota el álgebra de Banach de funciones continuas a valores complejos sobre K, con la topología de convergencia uniforme, entonces los polinomios en dos variables $p = p(z, \bar{z})$ son densos en $C(K)$.*

En este capítulo, dado un compacto $K \subset \mathbb{C}$, y una función continua en K denotaremos

$$\|f\|_{\infty,K} = \sup_{z \in K} |f(z)|.$$

Observación 6.10. Supongamos que A es normal. Si adoptamos la convención de que evaluando $\bar{z}$ en $z = A$ obtenemos A^*, tiene sentido calcular $p(A, A^*)$ para un polinomio $p = p(z, \bar{z})$. Por ejemplo, si

$$p(z, \bar{z}) = 2z^2 + 3z + \bar{z}^2 z + \overline{z^3},$$

entonces

$$p(A, A^*) = 2A^2 + 3A + (A^*)^2 A + (A^*)^3.$$

Notemos que $p(A, A^*)$ es normal también, y el álgebra generada por A, A^* y la identidad se identifica con los polinomios en dos variables evaluados en A, A^*, donde $\bar{z}(A) = A^*$.

Observación 6.11. Si $A = A^*$, en realidad se tiene que $p(z, \bar{z})|_A = q(A)$ donde $q = q(z)$ es otro polinomio únicamente en la variable z. Luego si $p_n \rightrightarrows f$, con f continua en $\sigma(A)$, podemos suponer que los polinomios son en la variable z y además, como $p_n - p_m = q_{n,m}$ es también un polinomio en una variable,

$$\|p_n(A) - p_m(A)\| = \|q_{n,m}(A)\| = \rho(q_{n,m}(A)) = \|q_{n,m}\|_{\infty,\sigma(A)} = \|p_n - p_m\|_{\infty,\sigma(A)} \to 0.$$

Aquí usamos que para cada n, m, la norma del operador normal $q_{n,m}(A)$ se calcula usando su radio espectral, y el teorema espectral para polinomios en una variable

$$\sigma(q_{n,m}(A)) = q_{n,m}(\sigma(A)).$$

Como $\mathcal{L}(H)$ es completo, podemos *definir* como en el caso de las funciones analíticas,

$$f(A) = \lim_{n \to \infty} p_n(A).$$

Esta definición no depende de la sucesión elegida, como puede el lector verificar.

Teorema 6.12 (Cálculo funcional continuo - Operadores autoadjuntos). *Sean $A = A^* \in \mathcal{L}(E)$, $f, g \in C(\sigma(A))$. Entonces:*

1. $(fg)(A) = f(A)g(A) = g(A)f(A)$, $(\bar{f})(A) = f(A)^*$.
2. $\|f(A)\| = \|f\|_{\infty,\sigma(a)}$.
3. *$f(A)$ es inversible si y sólo si $f(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$.*
4. $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

Demostración. Las afirmaciones del primer ítem son obvias para polinomios, y se sigue que valen tomando límite. Lo mismo se puede decir del segundo ítem.

Para ver el tercer ítem, supongamos primero que f no se anula en el espectro de A. Entonces $g = 1/f$ es una función continua en $\sigma(A)$. Como $fg = 1$, obtenemos $f(A)g(A) = g(A)f(A) = 1$, lo que prueba que $f(A)$ es inversible.

Recíprocamente, sea $\lambda \in \sigma(A)$ tal que $f(\lambda) = 0$. Si p_n es una sucesión de polinomios que aproxima a f uniformemente en $\sigma(A)$, sea $n(k)$ tal que

$$|p_{n(k)}(\lambda)| < 1/k.$$

Tomamos la sucesión de polinomios q_k dada por

$$q_k(x) = p_{n(k)}(x) - p_{n(k)}(\lambda).$$

Como $\|f - q_k\|_\infty \leqslant \|f - p_{n(k)}\|_\infty + 1/k$, esta sucesión también tiende uniformemente a f en $\sigma(A)$. Como $q_k(\lambda) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se deduce que

$$0 \in q_k(\sigma(A)) = \sigma(q_k(A)).$$

Luego ninguno de los $q_k(A)$ es inversible. Se deduce que $f(A)$ no puede ser inversible, pues los inversibles forman un conjunto abierto de $\mathcal{L}(H)$.

Para probar el último ítem, sea $\beta \in \mathbb{C}$. Observemos que $f(A) - \beta$ es inversible si y sólo si $\beta \notin \sigma(f(A))$, lo cual ocurre por el ítem previo si y sólo si $f(\lambda) - \beta \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$, o equivalentemente si y sólo si $\beta \notin f(\sigma(A))$. □

Observación 6.13. Si $f \in C(\sigma(A))$ y $g \in C(f(\sigma(A)))$, entonces $g \circ f \in C(\sigma(A))$, y además

$$(g \circ f)(A) = g(f(A)).$$

Esta afirmación es obvia si f, g son polinomios, y se deduce el caso general pasando al límite.

Definición 6.14 (Álgebra C^* generada por un operador). Consideraremos $C^*(A) \subset \mathcal{L}(H)$ a la clausura en norma de operadores, del álgebra generada por A, A^* y todas sus potencias (se denomina *álgebra C^* generada por A*). Resulta un álgebra abeliana si A es normal. Y por el teorema del cálculo funcional, no es difícil ver que si $A^* = A$, entonces para toda $f \in C(\sigma(A))$, se tiene $f(A) \in C^*(A)$, y que $f \mapsto f(A)$ es un isomorfismo isométrico multiplicativo entre $C(\sigma(A))$ (con el producto puntual de funciones) y $C^*(A)$ (con el producto de operadores).

6.1.1. Elementos positivos, orden parcial

Un elemento $A \in \mathcal{L}(H)$ es *positivo* si $A^* = A$ y $\sigma(A) \subset [0, +\infty)$, lo denotamos $A \geqslant 0$. Observemos que en este caso, considerando el radio espectral, tenemos $\sigma(A) \subset [0, \|A\|]$.

Lema 6.15 (Todo operador positivo tiene una única raíz cuadrada positiva). *Si $A \in \mathcal{L}(H)$ es positivo, existe un único operador positivo que denotamos $A^{1/2}$ tal que*

$$(A^{1/2})^2 = A^{1/2}A^{1/2} = A.$$

Demostración. Si $A \geqslant 0$ la raíz cuadrada de A está bien definida pues es continua en el espectro de A, así que $A^{1/2} = \sqrt{A}$ es un operador acotado y positivo pues $\sigma(A^{1/2}) = \sqrt{(\sigma(A))} \subseteq [0, +\infty)$. Además $A^{1/2}$ es autoadjunto puesto que, aproximando la función raíz cuadrada en $[0, \|A\|]$ con polinomios con coeficientes reales, $(\sqrt{A})^* = \sqrt{A^*} = \sqrt{A} = A^{1/2}$.

Para probar la unicidad, supongamos que $B \geqslant 0$ verifica $B^2 = A$. Entonces como $\sqrt{t^2} = t$ si $t \geqslant 0$ y el cálculo funcional es compatible con la composición (Observación 6.13), tenemos $B = \sqrt{B^2} = \sqrt{A} = A^{1/2}$. □

Lema 6.16. *Sean $A, B, T \in \mathcal{L}(H)$. Entonces*

1. *$A \geqslant 0$ si y solo si $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$ para todo $x \in H$.*
2. *Si $A, B \geqslant 0$ entonces $A + B \geqslant 0$.*
3. *$A \geqslant B$ cuando $A - B \geqslant 0$ define un orden parcial en $\mathcal{L}(H)$.*
4. *Si $A^* = A$, $-\|A\| \leqslant A \leqslant \|A\|$ y además $\|A\|$ ó $-\|A\| \in \sigma(A)$.*
5. *Si $0 \leqslant A \leqslant B$ entonces $\|A\| \leqslant \|B\|$, y si A es inversible, entonces B también lo es y además $\|B^{-1}\| \leqslant \|A^{-1}\|$.*
6. *Si $A \geqslant 0$ entonces $TAT^* \geqslant 0$.*
7. *Si $A \leqslant B$ entonces $TAT^* \leqslant TBT^*$.*

Demostración. Si $A \geqslant 0$ entonces

$$\langle Ax, x\rangle = \langle A^{1/2}A^{1/2}x, x\rangle = \langle A^{1/2}x, A^{1/2}x\rangle = \|A^{1/2}x\|^2 \geqslant 0.$$

Recíprocamente, si $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$ para todo $x \in H$, entoces en particular es real y $\langle Ax, x\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \langle x, Ax\rangle = \langle A^*x, x\rangle$, luego $A = A^*$. En particular $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Supongamos que $\lambda > 0$, entonces

$$\lambda \|x\|^2 = \lambda\langle x, x\rangle \leqslant \lambda\langle x, x\rangle + \langle Ax, x\rangle = \langle (\lambda + A)x, x\rangle \leqslant \|(A + \lambda)x\| \, \|x\|.$$

Esto dice que $A + \lambda$ es acotado inferiormente, y como es normal, tiene que ser inversible. Se deduce que $-\lambda \notin \sigma(A)$, y entonces $\sigma(A) \subset [0, +\infty)$.

La segunda y tercer afirmaciones son inmediatas de la primera.

Para ver el cuarto ítem, observemos primero que $\|A\| - A$ es autoadjunto. Por otro lado, $\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$, luego

$$\sigma(\|A\| - A) = \{\|A\| - \lambda : \lambda \in \sigma(A)\} \subset [0, 2\|A\|].$$

Esto nos dice que $\|A\| - A \geqslant 0$, o equivalentemente que $A \leqslant \|A\|$. La otra desigualdad es similar.

Para probar el quinto ítem, si $0 \leqslant A \leqslant B$ entonces por el ítem anterior $0 \leqslant A \leqslant B \leqslant \|B\|$. Pero esto nos dice que

$$\|A^{1/2}x\|^2 = \langle Ax, x\rangle \leqslant \|B\|\,\|x\|^2$$

así que $\|A^{1/2}\| \leqslant \|B\|^{1/2}$, y entonces $\|A\| \leqslant \|A^{1/2}\|^2 \leqslant \|B\|$.

El resto de las afirmaciones queda para el lector (Ejercicio 8, Sección 6.5). □

Corolario 6.17 (Módulo de un operador). *Sea $A \in \mathcal{L}(H)$. Entonces*

1. *A^*A, AA^* son positivos*
2. *$\sigma(A^*A) \setminus \{0\} = \sigma(AA^*) \setminus \{0\} \subseteq (0, \|A\|^2]$ y $\lambda = \|A\|^2$ está en ambos espectros*
3. *$|A| := \sqrt{A^*A}$ verifica $|A| \geqslant 0$, $|A|^2 = A^*A$, y es el único operador positivo que lo verifica.*
4. *$|A| = 0$ si y solo si $A = 0$.*

Demostración. Como $\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2 \geqslant 0$ para todo $x \in H$, se sigue que $A^*A \geqslant 0$ por el primer item del lema anterior, y lo mismo ocurre con AA^*.

La igualdad del espectro se deduce del caso general para A, B en espacios de Banach, y la inclusión en el intervalo se deduce del hecho $\|A^*A\| = \|A\|^2$ y el tercer item del lema anterior.

Del lema de la raíz cuadrada aplicado a A^*A obtenemos la tercera afirmación; y si $|A| = 0$ entonces $A^*A = |A|^2 = 0$, pero $\|A\|^2 = \|A^*A\| = 0$ y entonces $A = 0$. □

Definición 6.18 (Valores singulares). A los elementos del espectro del módulo de A, $\sigma(|A|)$ se los denomina *valores singulares* de A. Notar que en general, $|\sigma(A)| \neq \sigma(|A|)$ puesto que no se trata de un operación hecha sobre A, sino sobre A^*A. Sin embargo, es claro que

$$\sigma(|A|) = \sqrt{\sigma(A^*A)} = \sqrt{\sigma(AA^*)} = \sigma(|A^*|)$$

También es claro que si A es compacto, $|A|, |A^*|$ son compactos y sus autovalores no nulos tienen la misma multiplicidad (Ejercicio 20, Sección 5.5), luego los valores singulares de A y los de A^* son exactamente los mismos.

Definición 6.19 (Valores singulares de un operador compacto). Si K es compacto, entonces $|K| = \sqrt{K^*K}$ también es compacto, y todos sus autovalores no nulos son estrictamente positivos, denotamos $\mu_n(K) = \lambda_k(|K|)$ ($n \in \mathbb{N}_0$). Los autovalores están ordenados *de forma decreciente y contados con multiplicidad*,

$$\|K\| = \mu_0(K) \geqslant \mu_1(K) \geqslant \cdots \geqslant \mu_n(K) \geqslant \mu_{n+1}(K) \ldots > 0.$$

También se denomina a los $\mu_n(K)$ *números-s* de K ó *valores singulares de K*.

§ Si $K^* = K$ es compacto y normal, entonces sí, es cierto que $\mu_n(K) = |\lambda_n(K)|$, donde los autovalores se cuentan con su multiplicidad. Esta y otras propiedades de los valores singulares quedan para verificar por el lector (Ejercicio 15, Sección 6.5).

Funciones monótonas y convexas de operadores

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ (con I un intervalo de $\mathbb{R}$) se denomina *monótona de operadores* si dados A, B positivos con espectro contenido en I, tales que $A \leqslant B$, se verifica $f(A) \leqslant f(B)$. Una función g se denomina *convexa de operadores* si para A, B con espectro contenido en I, se verifica

$$g\left(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B\right) \leqslant \tfrac{1}{2}g(A) + \tfrac{1}{2}g(B).$$

No toda función monótona en el sentido usual es monótona de operadores, por ejemplo $x \mapsto x^2$.

Tal vez el ejemplo más relevante de función monótona de operadores es $f(t) = t^s$ para $s \in [0, 1]$.

Teorema 6.20 (Löwner). *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $A, B \in \mathcal{L}(H)$ tales que $\sigma(A), \sigma(B) \subset I$. Si $0 \leqslant A \leqslant B$, entonces para todo $s \in [0, 1]$ se verifica*

$$A^s \leqslant B^s.$$

Demostración. Recurriendo a un argumento estándar con los números diádicos en $[0, 1]$, basta probar el resultado para $s = 1/2$. Supongamos primero que B es inversible. Entonces $A \leqslant B$ implica

$$B^{-1/2}AB^{-1/2} \leqslant 1,$$

con lo cual $\|B^{-1/2}AB^{-1/2}\| \leqslant 1$, y entonces

$$\begin{aligned} B^{-1/4}A^{1/2}B^{-1/4} &\leqslant \|B^{-1/4}A^{1/2}B^{-1/4}\| \leqslant \|A^{1/2}B^{-1/2}\| \\ &= \|(A^{1/2}B^{-1/2})^*(A^{1/2}B^{-1/2})\|^{1/2} \\ &= \|B^{-1/2}AB^{-1/2}\|^{1/2} \leqslant 1 \end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad usamos que si XY es autoadjunto entonces

$$\|XY\| = \rho(XY) = \rho(YX) \leqslant \|YX\|$$

aplicado a $X = B^{-1/4}$, $Y = A^{1/2}B^{-1/4}$. Esto prueba que $B^{-1/4}A^{1/2}B^{-1/4} \leqslant 1$ o equivalentemente $A^{1/2} \leqslant B^{1/2}$. Si B no es inversible, dado $\epsilon > 0$ tenemos $B' = B + \epsilon > B \geqslant A$ y aplicando el resultado previo a B' se deduce que

$$(B + \epsilon)^{1/2} \geqslant A^{1/2},$$

haciendo tender ϵ a cero se tiene la conclusión. □

6.2. Descomposición polar

Dado $A \in \mathcal{L}(E)$, tomemos $v \in H$. Entonces

$$\|Av\|^2 = \langle Av, Av\rangle = \langle A^*Av, v\rangle = \langle |A|^2v, v\rangle = \langle |A|v, |A|v\rangle = \|\,|A|v\|^2,$$

de donde se deduce que $\ker(A) = \ker(|A|)$. Definimos $U : \mathrm{Ran}|A| \to \mathrm{Ran}A$ como

$$U|A|\eta := A\eta$$

para $|A|\eta \in \mathrm{Ran}|A|$. Esta es una buena definición pues si $|A|\eta = |A|\xi$ entonces $\eta - \xi \in \ker|A| = \ker A$. Notemos que

$$\|U|A|\eta\| = \|A\eta\| = \|\,|A|\eta\|$$

luego U se extiende a una isometría entre $\overline{\mathrm{Ran}|A|}$ y $\overline{\mathrm{Ran}A}$.

Extendemos a U como cero en $\overline{\mathrm{Ran}A}^{\perp} = \ker|A|$, luego $U \in \mathcal{L}(H)$ y por lo recién calculado se trata de una isometría parcial (ver la Observación 4.43 y los comentarios posteriores).

Definición 6.21 (Proyectores iniciales y finales). Si U es isometría parcial, U^*U se denomina *proyector inicial* de U, y UU^* se denomina *proyector final* de U. Dado un subespacio $S \subset H$, la notación P_S indica el único proyector ortogonal a (la clausura de) el subespacio S.

Observemos que, escribiendo cualquier $v \in H$ como $v = \xi + \eta \in \overline{\mathrm{Ran}|A|} \oplus \ker|A|$, se tiene

$$U|A|v = U|A|\xi + U|A|\eta = U|A|\xi = A\xi = A\xi + A\eta = Av.$$

Es decir, $A = U|A|$ en H.

Esta fórmula se conoce como *descomposición polar de* A. Algunas propiedades útiles, como por ejemplo $U^*U = P_{\mathrm{Ran}A}$, quedan como ejercicio para el lector (Ejercicio 6.2, Sección 6.5)

6.2.1. Operadores compactos

Corolario de la descomposición polar, obtenemos la forma canónica para cualquier operador compacto (decimos que K está *diagonalizado*):

Teorema 6.22 (Forma canónica de un operador compacto). *Sea $K \in \mathcal{L}(H)$ compacto, entonces existe un conjunto ortonormal $\{e_n\}_n$ tal que si $K = U|K|$, entonces*

$$K = \sum_{n\geqslant 1} \mu_n\,(Ue_n) \otimes e_n = \sum_{n\geqslant 1} \mu_n\,\langle \cdot\,, e_n\rangle f_n,$$

los $\mu_n > 0$ son los valores singulares de K (los autovalores de $|K|$), y $f_n = Ue_n$ es otro conjunto ortonormal. La convergencia es en norma de operadores.

§ Si $K = K^*$ es compacto, y $0 \neq \lambda \in \sigma(K)$, tomando una función continua $f \geq 0$ que valga 1 en λ y 0 en $\sigma(K) \setminus \{\lambda\}$ tenemos que $f(K) = P$ es un proyector ortogonal ya que f sólo toma los valores $0, 1$ en $\sigma(K)$ (Ejercicio 6, Sección 6.5). Aproximando f con polinomios, se deduce que $P = P_\lambda$, el proyector espectral de K definido mediante el cálculo funcional de Riesz (Sección 5.3.1).

Corolario 6.23 (Proyectores espectrales). *Si $K^* = K$ es compacto, $0 \neq \lambda \in \sigma(K)$, y $E_\lambda = RanP_\lambda$, entonces $Kx = \lambda x$ para todo $x \in E_\lambda$.*

Demostración. Llamando $E_\lambda = \operatorname{Ran} P_\lambda$, tomamos $K_\lambda = K|_{E_\lambda} = KP_\lambda$. Entonces K_λ es compacto y autoadjunto, así que se diagonaliza con una b.o.n. $\{e_n\}_n$ de E_λ (que tiene dimensión finita). Como K_λ es inversible y $\sigma(K_\lambda) = \{\lambda\}$ (Proposición 5.3.1) debe ser $Ke_n = \lambda e_n$ para todo n. Sea $x = \sum x_n e_n \in E_\lambda$. Entonces

$$Kx = K \sum_n x_n e_n = \sum_n x_n K e_n = \sum_n x_n \lambda e_n = \lambda x.$$

□

Corolario 6.24. *Si $A, B \in \mathcal{L}(H)$ son autoadjuntos, compactos, y conmutan, entonces se diagonalizan simultáneamente, es decir tienen una base ortonormal común de autovectores.*

Demostración. Dado $\lambda \in \sigma(A)$, tenemos para cada $x \in E_\lambda$ (incluyendo $E_0 = \ker A$)

$$ABx = BAx = B\lambda x = \lambda Bx,$$

lo que nos dice que $Bx \in E_\lambda$, o sea que E_λ es invariante también para B. Como B restringido a E_λ sigue siendo compacto y autoadjunto, tomamos una b.o.n. de E_λ pero conformada por autovectores de B (Teorema 6.6). Como son elementos de E_λ, resultan simultáneamente autovectores de A, de autovalor λ (notar que sin embargo, como autovectores de B, sus autovalores serán distintos en general). Podemos hacer esto para cada autoespacio de A, y $H = \oplus_{\lambda \in \sigma(A)} E_\lambda$, obtenemos una base de autovectores de B que es también base de autovectores de A. □

6.2.2. Valores singulares

Una caracterización muy útil de los autovalores de un operador compacto autoadjunto está dada por el siguiente resultado, conocido como *caracterización variacional de los autovalores*:

Teorema 6.25 (El min-max para los valores singulares de un operador compacto autoadjunto). *Sea $K = K^* \in \mathcal{L}(H)$, y sean $(\lambda_n(K))_{n \in \mathbb{N}_0}$ los autovalores positivos de K ordenados en forma decreciente y contados con multiplicidad. Entonces si $E_n \subset H$ denota un subespacio genérico de dimension n,*

$$\lambda_n = \max_{E_{n+1}} \min_{x \in E_{n+1}, \|x\|=1} \langle Kx, x \rangle,$$

$$\lambda_n = \min_{E_n} \max_{x \in E_n^\perp, \|x\|=1} \langle Kx, x \rangle$$

Cambiando K por $-K$ se obtienen fórmulas similares para los autovalores negativos.

Demostración. Probamos la primer fórmula, la otra queda como ejercicio para el lector. Escribimos

$$K = \sum_{n \geqslant 0} \lambda_n \langle \cdot , e_n \rangle e_n,$$

usando la fórmula canónica, y ordenamos los autovalores de manera decreciente. Sea $S = \{e_0, \dots, e_{n-1}\}^{\perp}$, que tiene codimensión n.

Si E_{n+1} es cualquier subespacio de dimensión $n+1$, entonces contando dimensiones existe $z \in S \cap E_{n+1}$, $\|z\| = 1$. Como $z \in S$, tenemos $z = \sum_{k \geqslant n} \alpha_k e_k$ con $\sum_j |\alpha_k|^2 = \|z\|^2 = 1$. Luego

$$Kz = \sum_{k \geqslant n} \alpha_k \lambda_k e_k,$$

y entonces

$$\langle Kz, z \rangle = \sum_{k \geqslant n} \lambda_k |\alpha_k|^2 \leqslant \lambda_n \|z\|^2 = \lambda_n,$$

así que

$$\inf\{\langle Kx, x \rangle : x \in E_{n+1}, \|x\| = 1\} \leqslant \lambda_n.$$

Como K es compacto, la función $x \mapsto \langle Kx, x \rangle$ es ω-continua (Ejercicio 15, Sección 6.5), y el conjunto sobre el que tomamos ínfimo es acotado, por ende ω-compacto. Así que podemos reemplazar el ínfimo por un mínimo,

$$\min\{\langle Kx, x \rangle : x \in E_{n+1}, \|x\| = 1\} \leqslant \lambda_n.$$

Como E_{n+1} era genérico, podemos tomar supremo sobre todos los subespacios de dimensión $n+1$, y tenemos

$$\sup_{E_{n+1}} \min\{\langle Kx, x \rangle : x \in E_{n+1}, \|x\| = 1\} \leqslant \lambda_n.$$

Pero considerando en particular $E_{n+1} = \{e_0, \dots, e_n\}$, allí se alcanza la igualdad tomando $x = e_n$. Esto prueba la primera fórmula variacional. □

Corolario 6.26 (Fórmulas min-max para los valores singulares). *Sea $K \in \mathcal{L}(H)$ compacto, $(\mu_n)_{n \geqslant 0}$ sus valores singulares, ordenados de manera decreciente ($\mu_0 = \|K\|$). Entonces*

$$\mu_n(K) = \max_{E_{n+1}} \min_{x \in E_{n+1}, \|x\|=1} \|Kx\|.$$

Demostración. Tenemos, por el teorema anterior aplicado a $|K|^2$, que

$$\lambda_n(|K|^2) = \max_{E_{n+1}} \min_{x \in E_{n+1}, \|x\|=1} \langle |K|^2 x, x \rangle = \max_{E_{n+1}} \min_{x \in E_{n+1}, \|x\|=1} \| \, |K| \, x\|^2.$$

Pero $\| \, |K| \, x\| = \|Kx\|$ para todo $x \in H$, y además $\lambda_n(|K|^2) = \lambda_n(|K|)^2 = \mu_n(K)^2$ (mirando la fórmula canónica); se tiene entonces la conclusión del corolario sacando raices cuadradas. □

6.3. Cálculo funcional Boreliano

Así como el cálculo funcional holomorfo se basa en extender la teoría de funciones analíticas al contexto no conmutativo, el cálculo funcional continuo extiende las nociones topológicas a ese contexto. En esta última sección abordaremos la extensión de la teoría de la medida al contexto no conmutativo, mediante el cálculo funcional de funciones medibles.

Dado $A \in \mathcal{L}(H)$, sea $W^*(A)$ el álgebra de von Neumann generada por A y A^*, que es la clausura en la topología débil de operadores (WOT) del álgebra C^* generada por A. Resulta un álgebra abeliana si A es normal.

Antes de seguir adelante caracterizaremos las funcionales continuas en las topologías fuerte y débil de operadores en espacios de Hilbert.

Lema 6.27. *Si $\varphi : \mathcal{L}(H) \to \mathbb{C}$ es lineal, entonces es* SOT*-continua si y solo si es* WOT *continua, y tiene necesariamente la forma*

$$\varphi(T) = \sum_{i=1}^{n} \langle Tx_i, y_i \rangle$$

para finitos $x_i, y_i \in H$.

Demostración. Estas funcionales son claramente continuas WOT, y si una red tiende SOT a cero, entonces también tiende WOT a cero, luego estas funcionales son también SOT continuas. Veamos que toda funcional SOT continua es de esta forma. Sea φ SOT continua, entonces existe $C > 0$ y finitos $\{x_i\}_{i=1\dots n} \subset H$ tales que

$$|\varphi(T)| \leqslant C \sum_{i=1}^{n} \|Tx_i\|$$

para todo $T \in \mathcal{L}(E)$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz aplicada a la suma finita, tenemos

$$|\varphi(T)| \leqslant C\sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \|Tx_i\|^2 \right)^{1/2}.$$

Cambiando los x_i por $C\sqrt{n}x_i$ tenemos entonces

$$|\varphi(T)| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \|Tx_i\|^2 \right)^{1/2}.$$

Consideremos H^n con el producto interno dado por la suma de los productos internos, y la función lineal continua $\phi : \mathcal{L}(H) \to H^n$ dada por $\phi(T) = (Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n)$. Definimos la funcional lineal $F : \operatorname{Ran}\phi \subset H^n \to \mathbb{K}$ como $F(\phi(T)) = \varphi(T)$. Es inmediato que $\|F\| \leqslant 1$ en este subespacio, luego por el Teorema de Hahn-Banach se extiende a una funcional lineal $\widehat{F} : H^n \to \mathbb{K}$ con la misma norma. Como H^n es un espacio de Hilbert, esta funcional lineal tiene que estar representada por un vector en H^n o equivalentemente, existen $y_1, \dots y_n \in H$ tales que

$$\widehat{F}((v_1, \dots, v_n)) = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, y_i \rangle.$$

En particular,

$$\varphi(T) = F(\phi(T)) = \widehat{F}((Tx_1, \dots, Tx_n)) = \sum_{i=1}^{n} \langle Tx_i, y_i \rangle,$$

que es lo que queriamos demostrar. □

Es útil tener presente entonces que para definir $W^*(A)$, es equivalente tomar la clausura en la topología fuerte de operadores (SOT) del álgebra generada por A y A^*, ya que como consecuencia de este lema, la clausura (WOT) de un conjunto convexo $C \subseteq \mathcal{L}(H)$ coincide con su clausura (SOT) (Ejercicio 17, Sección 6.5).

6.3.1. Funciones borelianas de un operador autoadjunto

En esta sección, denotaremos con $\mathcal{B}or(X)$ a las funciones Borelianas y acotadas en el espacio X. Recordemos que f medible acotada es inversible si $f \neq 0$ en casi todo punto, y $g = 1/f$ es acotada de manera tal que $gf = 1$ en casi todo punto de $\sigma(A)$.

Si $A \in \mathcal{L}(H)$ es autoadjunto, y $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ es medible, denotamos con $\|f\|_{\infty,\sigma(A)}$ al supremo esencial de f en $\sigma(A)$; notemos que si f es continua coincide con el máximo de f en el espectro.

Proposición 6.28 (Límites puntuales de funciones continuas). *Sea $A^* = A \in \mathcal{L}(H)$. Si $(f_n)_n \subseteq C(\sigma(A))$ están uniformemente acotadas y convergen puntualmente a $f \in \mathcal{B}or(\sigma(A))$, entonces existe un único operador acotado $f(A) \in \mathcal{L}(H)$ tal que*

$$\langle f(A)\xi, \eta \rangle = \lim_n \langle f_n(A)\xi, \eta \rangle \qquad \forall \xi, \eta \in H.$$

Demostración. Dado $\xi \in \mathcal{H}$, y una función $g \in C(\sigma(A))$, podemos tomar la funcional lineal

$$\varphi_\xi : g \mapsto \langle g(A)\xi, \xi \rangle$$

que resulta ser un elemento del dual de $C(\sigma(A))$ puesto que es lineal y

$$|\varphi_\xi(g)| \leqslant \|g(A)\| \, \|\xi\|^2 = \|\xi\|^2 \, \|g\|_{\infty,\sigma(A)}$$

nos dice que es acotada (como g es continua, $g(A)$ es normal y su norma se calcula con su radio espectral). Además, si $g \geqslant 0$, entonces $g(A) \geqslant 0$, luego también $\varphi_\xi \geqslant 0$. Por el teorema de Riesz-Markov (Teorema 2.21), existe una única medida de Borel regular finita y positiva μ_ξ en $\sigma(A)$ tal que

$$\langle g(A)\xi, \xi \rangle = \int_{\sigma(A)} g(t) d\mu_\xi(t). \tag{6.1}$$

Esta medida se llama *medida espectral de A asociada al vector ξ*.

Dada una función $f \in \mathcal{B}or(\sigma(A))$, consideramos

$$Q_f(\xi) = \int_{\sigma(A)} f(t) d\mu_\xi(t).$$

Como $f_n(x) \to f(x)$ puntualmente y $\|f_n\|_{\infty,\sigma(A)}$ es un conjunto acotado, entonces

$$Q_{f_n}(\xi) - Q_f(\xi) = \langle [f_n(A) - f(A)]\xi, \xi \rangle = \int_{\sigma(A)} [f_n(t) - f(t)] d\mu_\xi(t) \to 0$$

por el teorema de convergencia dominada. Luego

$$Q_f(\xi) = \lim_n \langle f_n(A)\xi, \xi \rangle.$$

Como $Q_f : H \to \mathbb{C}$ es una forma cuadrática, polarizando obtenemos una forma sesquilineal $\beta_f : H \times H \to \mathbb{C}$, de hecho se tiene

$$\beta_f(\eta, \xi) = \lim_n \langle f_n(A)\xi, \eta \rangle$$

para todo $\xi, \eta \in H$. Como β_f verifica

$$|\beta_f(\eta, \xi)| \leqslant \sup_n \|f_n\|_{\infty,\sigma(A)} \|\xi\| \|\eta\|,$$

por el Teorema de Riesz para formas bilineales continuas (Teorema 3.17), β_f proviene de un único operador acotado en H que llamaremos $f(A) \in \mathcal{L}(H)$, que verifica

$$\langle f(A)\xi, \eta \rangle = \lim_n \langle f_n(A)\xi, \eta \rangle$$

para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. □

§ Notar que lo relevante de la construcción es la existencia del límite WOT $f(A)$ de la sucesión de operadores $f_n(A)$, a partir de una sucesión de funciones uniformemente acotadas en $\sigma(A)$ que convergen puntualmente a f allí. Modificando las f_n podemos aproximar $f(A)$ con un límite fuerte (SOT) o incluso límite en norma (Ejercicio 18, Sección 6.5).

De hecho, aunque no usaremos este resultado, toda función continua en un intervalo acotado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ se puede aproximar puntualmente con una sucesión *decreciente* de polinomios (para una prueba de esto ver por ejemplo el libro de Milman et. al [4, Chapter 7]).

Si $f \in C(\sigma(A))$ inicialmente, entonces ciertamente $f(A)$ coincide con la definición anterior, la del cálculo funcional continuo, en general $f(A) \in W^*(A)$ por construcción (pues las f_n continuas a su vez se pueden reemplazar por polinomios en A).

§ Si f es boreliana en el espectro de A, y $\xi \in H$, por el teorema de convergencia dominada la identidad

$$\langle f(A)\xi, \xi\rangle = \int_{\sigma(A)} f(t) d\mu_\xi(t).$$

sigue siendo cierta, y además

$$\|f(A)\xi\|^2 = \| \, |f(A)| \, \xi\|^2 = \langle |f(A)|^2 \xi, \xi\rangle = \int_{\sigma(A)} |f(t)|^2 \, d\mu_\xi(t). \tag{6.2}$$

Teorema 6.29 (Cálculo funcional Boreliano - Operadores autoadjuntos). *Sea $A \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto. La asignación*

$$\Phi : \mathcal{B}or(\sigma(A)) \to W^*(A) \subset \mathcal{L}(H)$$

dada por $f \mapsto f(A)$, verifica $\Phi(1) = 1$, y si $id(z) = z$, entonces $\Phi(id) = A$. Además

1. *Si $AB = BA$ entonces $f(A)B = Bf(A)$,*
2. *$(fg)(A) = f(A)g(A)$, $(\overline{f})(A) = f(A)^*$.*
3. *$f(A)$ es un operador normal.*
4. *$\sigma(f(A)) \subseteq \overline{f(\sigma(A))}$, donde la barra denota clausura.*
5. *$\|f(A)\| \leqslant \|f\|_{\infty,\sigma(A)}$.*
6. *Si $f(\sigma(A)) \subset \mathbb{R}$, entonces $f(A)$ es autoadjunto,*
7. *Si $f \geqslant 0$, entonces $f(A) \geqslant 0$,*
8. *Si f es real y $g \in \mathcal{B}or(\sigma(f(A))$ entonces $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.*

Demostración. Tomamos $f_n \in C(\sigma(A))$ uniformemente acotadas que converjan puntualmente a f en $\sigma(A)$. Como cada $f_n(A)$ conmuta con B por el teorema del cálculo funcional continuo, para cada $\xi, \eta \in H$,

$$\begin{aligned} \langle f(A)B\xi, \eta\rangle &= \lim_n \langle f_n(A)B\xi, \eta\rangle = \lim_n \langle Bf_n(A)\xi, \eta\rangle = \lim_n \langle f_n(A)\xi, B^*\eta\rangle \\ &= \lim_n \langle f(A)\xi, B^*\eta\rangle = \lim_n \langle Bf(A)\xi, \eta\rangle, \end{aligned}$$

luego B conmuta con $f(A)$.

El segundo ítem tiene una demostración similar que omitimos. Para probar la tercer afirmación notamos que la adjunción $T \mapsto T^*$ es WOT-continua (Ejercicio 18, Sección 6.5); entonces por el teorema del cálculo funcional continuo $f_n(A)$ es normal y también además $\overline{f_n}(A)^* = f_n(A)^* \to f(A)^*$ WOT. Luego por el segundo item

$$f(A)^* f(A) = \text{WOT} - \lim_n f_n(A)^* f_n(A) = \text{WOT} - \lim_n |f_n|^2(A) = \text{WOT} - \lim_n f_n(A) f_n(A)^* = f(A) f(A)^*$$

lo que prueba que $f(A)$ es normal.

Supongamos que $\lambda \notin \overline{f(\sigma(A))}$. Entonces $g(x) = (f(x) - \lambda)^{-1}$ es medible y acotada en $\sigma(A)$, y verifica $gf = 1$ allí. Luego por el tercer item

$$g(A)(f(A) - \lambda) = (f(A) - \lambda)g(A) = 1,$$

lo que nos dice que $f(A) - \lambda$ es inversible, en otras palabras, $\lambda \notin \sigma(f(A))$. Esto prueba la cuarta afirmación.

La quinta afirmación se sigue del item recién probado y del hecho de que $f(A)$ es un operador normal, luego su norma coincide con su radio espectral.

Si la imagen de f es real, podemos aproximar f puntualmente con funciones reales continuas, y entonces $f_n(A)$ serán autoadjuntos, luego

$$\begin{aligned} \langle f(A)\xi, \eta \rangle &= \lim_n \langle f_n(A)\xi, \eta \rangle = \lim_n \langle \xi, f_n(A)\eta \rangle = \lim_n \overline{\langle f_n(A)\eta, \xi \rangle} \\ &= \lim_n \overline{\langle f(A)\eta, \xi \rangle} = \lim_n \langle \xi, f(A)\eta \rangle, \end{aligned}$$

probando que $f(A)$ es autoadjunto. Si además $f \geqslant 0$, sabemos que en particular $f(A)$ es autoadjunto, pero una cuenta similar a la anterior prueba que $\langle f(A)\xi, \xi \rangle \geqslant 0$ luego $f(A) \geqslant 0$.

Para probar la última afirmación, notemos que si f es real, entonces $f(A)$ es autoadjunto. Notemos que si $f_n \to f$ con las f_n continuas, y $g_n \to g$ con las g_n continuas, entonces $g_n \circ f_n \to g \circ f$ y además las $g_n \circ f_n$ son continuas. Entonces la prueba de la fórmula de la composición se obtiene usando la fórmula para funciones continuas, y tomando límites. □

§ Para entender por qué no coincide el espectro de $f(A)$ con la imagen por f del espectro de A, hay que notar primero que los límites puntuales no se llevan bien con la imágenes. Veamos dos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 6.30. Sea $H = L^2[0,1]$, $\varphi \in L^\infty[0,1]$ dada por $\varphi(x) = x$ y el operador de multipicación $A = M_\varphi = M_x \in \mathcal{L}(H)$. De la observación

$$\langle M_x f, g \rangle = \int_0^1 x f(x)\, \overline{g(x)} dx = \int_0^1 f\, \overline{x g(x)} dx = \langle f, M_x g \rangle$$

obtenemos que A es autoadjunto. Por otro lado (Ejercicio 10, Sección 5.5), sabemos que $\sigma(A) = \text{im es}(\varphi) = [0,1]$. Consideremos ahora f boreliana acotada en $[0,1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1/2 \\ 0 & x \neq 1/2 \end{cases}$$

Entonces se tiene $f(A) = f(M_\varphi) = M_{f\circ\varphi} = M_f$ (Ejercicio 20, Sección 6.5). Luego $\sigma(f(A)) = \text{im es}(f) = \{0\}$. Pero por otro lado, $f(\sigma(A)) = \{0,1\}$. Luego la inclusión $\sigma(f(A)) \subset f(\sigma(A))$ es estricta (de hecho, en este caso $f(A) = 0$).

Uno podría estar tentado en pensar que el problema del ejemplo anterior se concentra en que 1 no está en la imagen esencial de f, y entonces considerar la posibilidad de que $\sigma(f(A))$ sea la imagen esencial de f. Esto no es así, como muestra este otro ejemplo:

Ejemplo 6.31. Sea $H = \mathbb{C}^2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Entonces es claro que $\sigma(A) = \{2, -3\}$. Consideremos al función $f(x) = x$ restringida al espectro de A, es claramente Boreliana acotada, de hecho es todo lo buena que puede ser una función en un conjunto discreto. Pero la imagen esencial de f es *vacía* puesto que la medida del espectro es nula.

El problema en ambos ejemplos es que estamos intentando usar la medida de Borel del conjunto $\sigma(A)$, sin tener en cuenta al operador A. Veremos a continuación que la noción correcta de medida a emplear en dicho conjunto es la *medida espectral* del operador A.

6.3.2. Medida espectral, proyectores espectrales

Dado $A^* = A \in \mathcal{L}(H)$, consideramos el conjunto χ de conjuntos borelianos en $\sigma(A)$. Tenemos una asignación

$$E^A : \chi \to W^*(A)$$

dada por $E^A(\Omega) = \chi_\Omega(A)$. Como χ_Ω tiene su imagen en el $\{0, 1\}$, $p_\Omega = E^A(\Omega) \geqslant 0$. Como $\chi_\Omega^2 = \chi_\Omega$, entonces $p_\Omega^2 = p_\Omega$. Luego la función E^A toma valores en los proyectores del álgebra $W^*(A) \subseteq \mathcal{L}(H)$.

Con la convención de que $E^A(\emptyset) = 0$, y extendiendo como 0 a E^A fuera de $\sigma(A)$, tenemos que

- Si $\Omega_i \cap \Omega_j$ tiene medida nula, entonces $p_i = E^A(\Omega_i)$ y $p_j = E^A(\Omega_J)$ son disjuntos en el sentido que $p_i p_j = p_j p_i = 0$; en general $p_{\Omega_i \cap \Omega_j} = p_i p_j$.
- Si $\sigma(A) \subset \Omega$ entonces $p_\Omega = 1$.
- Si $\Omega = \cup_n \Omega_n$ y $\Omega_k \cap \Omega_j = \emptyset$, entonces $p_\Omega = \sum_n p_{\Omega_n}$ donde la convergencia es en la topología débil de operadores (WOT), o equivalentemente en la topología fuerte de operadores (WOT), ya que se trata de proyectores (Ejercicio 17).
- Si $\Omega_i \subset \Omega_j$, entonces $p_i \leqslant p_j$. En efecto, como la medida μ_ξ es positiva,

$$\langle p_i \xi, \xi \rangle = \langle \chi_{\Omega_i}(A)\xi, \xi \rangle = \int_{\Omega_i} d\mu_\xi(t) \leqslant \int_{\Omega_j} d\mu_\xi(t) = \langle p_j \xi, \xi \rangle.$$

Una asignación de este tipo se conoce como *medida espectral*, o *medida a valores proyectores*. En este caso se trata de la *medida espectral de A*. Los proyectores $p_\Omega = E^A(\Omega)$ se denominan *proyectores espectrales de A*.

Si $\xi \in H$ y μ_ξ denota la medida obtenida en (6.1), entonces de las definiciones se sigue que para $\Omega \subset \mathbb{R}$ boreliano

$$\mu_\xi(\Omega) = \int_{\sigma(A)} \chi_\Omega d\mu_\xi = \langle \chi_\Omega(A)\xi, \xi\rangle = \langle E^A(\Omega)\,\xi, \xi\rangle.$$

Si f es una función simple, podemos escribir, con $\Omega_i = [s_i, t_i) \subset \mathbb{R}$,

$$f(A) = \sum_i f_i \chi_{\Omega_i}(A) = \sum_i f_i\, E^A(\Omega_i) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) dE^A(\lambda),$$

donde la integral de la derecha es a valores operadores y la estamos *definiendo* de esta manera para funciones simples, de la misma manera que definimos la integral de Lebesgue de una función simple en $\mathbb{R}$.

Entonces, para cualquier f Boreliana en $\sigma(A)$ se tiene

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) dE^A(\lambda)$$

donde la integral de la derecha se entiende como un límite aproximando por funciones elementales (y este límite es WOT-convergente). En particular

Teorema 6.32 (Teorema espectral, versión integral). *Sea $A \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto y E^A su medida espectral a valores operadores, entonces*

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda\, dE^A(\lambda).$$

Comparar esta fórmula con la versión para operadores compactos autoadjuntos obtenida en el Corolario 6.8.

Lema 6.33. *Sea $A = A^* \in \mathcal{L}(H)$. Entonces $\lambda \in \sigma(A)$ si y solo si $E^A(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \neq 0$ para todo $\varepsilon > 0$.*

Demostración. Por la ecuación (6.1), obtenemos que para cada $\xi \in H$,

$$\|(A - \lambda)\xi\|^2 = \|\,|A - \lambda|^2\,\xi\|^2 = \langle (A - \lambda)^2 \xi, \xi\rangle = \int_{\sigma(A)} (t - \lambda)^2\, d\mu_\xi(t).$$

Recordamos que un operador autodajunto es inversible si y solo si es acotado inferiormente, y además que si λ es autovalor aproximado de A entonces está en el espectro de A. Con esta información, dejamos como ejercicio para el lector completar esta demostración (Ejercicio 21, Sección 6.5). □

Este resultado se puede reformular de la siguiente manera: diremos que un conjunto boreliano $\Omega \subset \sigma(A)$ tiene *medida espectral nula* si $E^A(\Omega) = 0$. Notemos que

$$E^A(\Omega) = 0 \iff E^A(\Omega)\xi = 0\ \forall \xi \in H \iff \int_\Omega d\mu_\xi = 0\ \forall \xi \in H \iff \mu_\xi(\Omega) = 0\ \forall \xi \in H.$$

Entonces $\lambda \in \sigma(A)$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$,

$$E^A\{\lambda \in \mathbb{R} : |x - \lambda| < \varepsilon\} \neq 0.$$

Corolario 6.34. *Sean $A^* = A \in \mathcal{L}(H)$, f real y boreliana en $\sigma(A)$. Entonces el espectro de $f(A)$ es el rango esencial de f, respecto de la medida espectral de A. Es decir*

$$\sigma(f(A)) = \{\lambda \in R : \forall \varepsilon > 0,\ E^A\{x \in \sigma(A) : |\lambda - f(x)| < \varepsilon\} \neq 0\}.$$

Demostración. Para todo $\Omega \subset \mathbb{C}$, y toda función boreliana f en $\sigma(A)$, se tiene $\chi_\Omega \circ f = \chi_{f^{-1}(\Omega)}$. Luego,

$$(\chi_\Omega \circ f)(A) = \chi_{f^{-1}(\Omega)}(A).$$

En otros términos

$$E^{f(A)}(\Omega) = E^A(f^{-1}(\Omega)),$$

y tomando $\Omega = (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ se tiene la prueba del corolario, aplicando el Lema 6.33 al operador $f(A)$. □

Con este corolario, podemos revisar los Ejemplos 6.30 y 6.31 sobre el espectro de $f(A)$. En el primer caso, notemos que la medida espectral (relativa al operador $A = M_x$) del conjunto $\Omega = \{1/2\} \subset \sigma(A) = [0, 1]$ es nula, por eso $f(A) = 0$.

En el segundo caso, la medida espectral (relativa a la matriz diagonal A dada) del conjunto $\Omega = \{2\} \subset \sigma(A) = \{2, -3\}$ es no nula, y de hecho el proyector espectral que se obtiene es

$$E^A(\{2\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mientras que

$$E^A(\{-3\}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.3.3. Teorema espectral, operadores de multiplicación

El propósito de este último apartado es probar que todo operador autoadjunto en un espacio de Hilbert se representa como un operador de multiplicación en un espacio de funciones adecuado. Más precisamente:

Teorema 6.35 (Teorema espectral, operador de multiplicación). *Sea $A = A^* \in \mathcal{L}(H)$. Entonces existen: un espacio de medida (X, μ), un operador unitario $U : L^2(X, \mu) \to H$ y una función real $\varphi \in L^\infty(X, \mu)$ tales que $U^{-1}AU = M_\varphi$, es decir*

$$U^{-1}AU\,h(x) = \varphi(x)h(x) \qquad \forall h \in L^2(X, \mu).$$

En particular $\sigma(A) = im\,es(\varphi)$ y $||A|| = ||\varphi||_\infty$. Además si f es boreliana en $\sigma(A)$ entonces

$$U^{-1}f(A)U = M_{f\circ\varphi}$$

y $\sigma(f(A)) = im\,es(f \circ \varphi)$.

Demostración. Para cada $\xi \in H$ y cada $f \in C(\sigma(A))$ consideramos la única medida de Borel finita μ_ξ en $\sigma(A)$ tal que

$$\langle f(A)\xi, \xi\rangle = \int_{\sigma(A)} f(t) d\mu_\xi(t) \qquad \forall f \in C(\sigma(A)).$$

Sea $V : C(\sigma(A)) \to H$ dado por $V(f) = f(A)\xi$. Entonces

$$\langle V(f), V(g)\rangle = \langle f(A)\xi, g(A)\xi\rangle = \langle \overline{g}(A) f(A)\xi, \xi\rangle = \int_{\sigma(A)} f\,\overline{g}\, d\mu_\xi$$

nos dice que V se extiende a una isometría $V : L^2(\sigma(A), \mu_\xi) \to H$, cuyo rango H_ξ es exactamente la clausura en H del subespacio generado por

$$\{\xi, A\xi, A^2\xi, \dots, A^n\xi, \dots\},$$

denominado subespacio cíclico generado por A y ξ. Notemos que H_ξ es un subespacio invariante para A, y como A es autoadjunto, entonces H_ξ reduce al operador A, esto es su ortogonal también es invariante para A. También notemos que si restrigimos $V : L^2(\sigma(A), \mu_\xi) \to H_\xi$ obtenemos un operador unitario.

Ahora bien, si $f \in L^2(X, \mu_\xi)$ entonces de la definición de V y por densidad se sigue que

$$V(xf) = Af(A)\xi = AV(f),$$

equivalentemente $VM_x = AV$ como operadores de $L^2(\sigma(A), \mu_\xi)$ luego como V es unitario, esto dice que $V^{-1}AV = M_x$, el operador de multiplicación por x en $L^2(\sigma(A), \mu_{xi})$.

Procedemos recursivamente, e invocando el Lema de Zorn obtenemos una descomposición

$$H = \bigoplus_{i \in I} H_{\xi_i}$$

donde la suma es directa y ortogonal, y cada subespacio es cíclico e invariante para A. Notemos que si H es separable esta suma es numerable. Para cada $i \in I$ tenemos también la isometría $V_i : L^2(X, \mu_{\xi_i}) \to H$ que con la restricción $V_i : L^2(X, \mu_{\xi_i}) \to H_{\xi_i}$ resulta un operador unitario.

Si consideramos el espacio de medida dado por la unión disjunta $(X, \mu) = \bigcup_i (\sigma(A), \mu_{\xi_i})$, entonces

$$L^2(X, \mu) = \bigoplus_i L^2(\sigma(A), \xi_i).$$

Definimos $\varphi : X \to \mathbb{C}$ como $\varphi(x) = x$ en cada $(\sigma(A), \mu_{\xi_i})$, tenemos entonces un operador unitario $U = \oplus V_i : L^2(X, \mu) \to H$ que verifica

$$U^{-1}AU = M_\varphi.$$

De aquí se desprenden las afirmaciones sobre el espectro y la norma de A, ya que estas valen para el operador de multiplicación y tanto el espectro como la norma son invariantes por conjugación unitario.

Por último, si f es boreliana en $\sigma(A)$, entonces $f(U^{-1}AU) = U^{-1}f(A)U$ es inmediato (pues es evidente si f es un polinomio) y por otro lado -también usando polinomios, Ejercicio 20, Sección 6.5- es fácil ver que $f(M_\varphi) = M_{f\circ\varphi}$. $\square$

6.4. Resultados adicionales, conclusiones

Como puede el lector verificar, una pieza clave en la construcción del cálculo funcional y las distintas versiones del teorema espectral, es la Proposición 5.23, donde probamos que si p es un polinomio y $A \in \mathcal{L}(E)$, entonces

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

De este resultado y tomando límites, luego obtenemos los resultados para funciones holomorfas, para funciones continuas (de un operador autoadjunto) y de funciones borelianas (de un operador autoadjunto). En la demostración de la proposición, es clave poder factorizar al polinomio en factores lineales, usando todas su raíces.

Notemos que al ser $A \in \mathcal{L}(E)$ autoadjunto, explotamos el hecho de que un polinomio en $z, \bar{z}$ puede ser reemplazado por un polinomio únicamente en z. Sin embargo, si A es únicamente normal, por más que esté bien definido el polinomio evaluado en A, A^*, no podemos reducirlo a un polinomio en una variable *y no hay un teorema de factorización en factores lineales para polinomios en más de una variable* (por ejemplo $p(x, y) = xy - 1$ tiene grado 2 pero no admite factorización en factores lineales).

La teoría de Gelfand de álgebras C^* conmutativas, que no estudiamos en estas notas, da una solución a estas dificultades. La clave está en estudiar el álgebra conmutativa $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}(H)$, generada por A, A^* (A un operador normal) y estudiar el conjunto X_A de las funcionales multiplicativas de esta álgebra $\mathcal{M}_A$, denominado *espacio ideal maximal*. Munido de la topología ω^*, se verifica que $\mathcal{M}_A$ resulta un espacio compacto Hausdorff. Se construye así la *transformada de Gelfand*, que identifica al álgebra $\mathcal{A}$ con el espacio $C(\mathcal{M}_A)$ de las funciones continuas en el espacio ideal maximal, mediante $A \mapsto \widehat{A}$, donde $\widehat{A}(\varphi) = \varphi(A)$. Se obtiene así una caracterización del espectro dada por el teorema de Gelfand que dice que

$$\sigma(A) = \{\varphi(A) : \varphi \in \mathcal{M}_A\}$$

y además la transformada de Gelfand es un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{A}$ (el álgebra generada por A, A^*) y $C(\mathcal{M}_A) \simeq C(\sigma(A))$. Luego la inversa de la transformada de Gelfand permite definir el cálculo funcional $f(A)$ para cualquier función $f \in C(\sigma(A))$. Los Teoremas 6.12 y 6.29 del cálculo funcional continuo y boreliano, que vimos para operadores autoadjuntos, se extienden entonces *verbatim* a operadores normales $A \in \mathcal{L}(H)$.

Un desarrollo adecuado de estas ideas, así como las demostraciones de estos resultados, recomendamos al lector estudiarlas del primer capítulo del libro de Davidson [3].

6.5. Ejercicios

En esta sección de ejercicios, H denota un espacio de Hilbert complejo, T un operador lineal con dominio y rango en H, T^* el operador adjunto de T. Si $S \subset H$ es un subespacio $S^\perp$ denota el complemento ortogonal de S en H.

1. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$, probar que

$$\begin{array}{llcl} i) & \mathrm{Ran}(T)^{\perp} & = & \ker(T^*) \\ iii) & \overline{\mathrm{Ran}(T)} & = & \ker(T^*)^{\perp} \end{array} \qquad \begin{array}{llcl} ii) & \mathrm{Ran}(T^*)^{\perp} & = & \ker(T) \\ iv) & \mathrm{Ran}(T^*) & \subset & \ker(T)^{\perp}. \end{array}$$

   Y además, si $\mathrm{Ran}(T)$ es cerrado, entonces $\mathrm{Ran}(T^*)$ es cerrado y $\mathrm{Ran}(T^*) = \ker(T)^{\perp}$.

2. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ normal, probar que

   a) $\ker(T) = \ker(T^*)$,

   b) T tiene rango denso si y solo si es inyectivo,

   c) El espectro residual es vacío, $\sigma_r(T) = \emptyset$,

   d) T es inversible si y solo si es acotado inferiormente,

   e) Autovectores de T correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

3. Sean $A, B \in \mathcal{L}(H)$ y supongamos que $\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle$ para todo $x \in H$. Probar que $A = B$. ¿Qué pasa si H no es complejo?

4. Si $A^* = A \in \mathcal{L}(H)$, probar que $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$.
   (Sugerencia: $4Re\langle Ax, y\rangle = \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle$*).*

5. Sea $P^2 = P \in \mathcal{L}(H)$, decimos que P es ortogonal si $\mathrm{Ran}P \perp \ker P$. Probar que son equivalentes:

   a) P es ortogonal

   b) $P^* = P$

   c) P es normal

   d) $\|P\| \leqslant 1$

6. Sean $U, S, Q \in \mathcal{L}(H)$, U unitario, S simetría ($S^* = S = S^{-1}$). Probar que

   a) $\sigma(U) \subset \mathbb{T}$, $\sigma(S) \subset \{-1, 1\}$

   b) $P = (1 + S)/2$ es un proyector ortogonal, y S es la identidad en el rango de P, y -1 en el núcleo de P.

   c) Si $Q^* = Q$ y $\sigma(Q) \subset \{0, 1\}$ entonces $Q^2 = Q$ (Q es un proyector ortogonal).

7. Si $(P_n)_n \subseteq \mathcal{L}(H)$ es una familia disjunta de proyectores ortonormales ($P_n P_m = 0$ si $n \neq m$), y $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$ está acotada, probar que

   a) La serie $\sum_n \lambda_n P_n$ es SOT-convergente a un operador acotado y normal en $T \in \mathcal{L}(H)$, cada λ_n es autovalor de T, y estos (exceptuando el 0) son los únicos posibles autovalores de T.

   b) Si $\lambda_n \to 0$ las suma converge en norma de operadores. Y si los P_n tienen rango finito, el operador T es compacto.

c) Si A es compacto autoadjunto, $\lambda_n \in \mathbb{R}$ son sus autovalores no nulos, y P_n los proyectores a sus autoespacios, entonces $A = \sum_n \lambda_n P_n$ donde la convergencia es en norma de operadores.

8. Sean $A, B, C \in \mathcal{L}(H)$. Probar que si $0 \leqslant A \leqslant B$, entonces

   a) $0 \leqslant CAC^* \leqslant CBC^*$

   b) Si A es inversible, B es inversible y $\|B^{-1}\| \leqslant \|A^{-1}\|$.

   c) Si B es compacto, entonces A es compacto.

9. Consideramos $H = \mathbb{C}^2$. Probar que $|A + B|$ no es $\leqslant$ que $|A| + |B|$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

10. Sea $A^* = A \in \mathcal{L}(H)$, $f \in C(\sigma(A))$. Probar que

   a) $f(A)$ conmuta con A, $f(A)$ conmuta con todo operador que conmuta con A.

   b) $\|f(A)\| = \|f\|_{\infty,\sigma(A)} = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}$.

   c) Si f toma valores reales, entonces $f(A)$ es autoadjunto.

   d) Si $A \geqslant 0$ entonces $\|A^{1/2}\| = \sqrt{\|A\|}$.

   e) Si $\|A\| \leqslant 1$, entonces $U = f(A)$ es unitario, donde $f(t) = t + i\sqrt{1 - t^2}$, y verifica $2A = U + U^*$.

   f) Todo operador $T \in \mathcal{L}(H)$ es combinación lineal de (a lo sumo) 4 operadores unitarios.

   g) La transformada de Cayley $U = (A - i)(A + i)^{-1}$ es un operador unitario *(sug: $\|Ax + ix\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2$).*

11. Sea $A \in \mathcal{L}(H)$. Si $A = U|A|$ es la descomposición polar de A, entonces

   a) $\|Ax\| = \| \, |A| \, x\|$ para todo $x \in H$, $\|A\| = \| \, |A| \, \|$,

   b) $U^*U = P_{\mathrm{Ran}|A|}$, $UU^* = P_{\mathrm{Ran}A}$, $|A| = U^*A$,

   c) $\mathrm{Ran}|A| = \mathrm{Ran}A^*$, $\mathrm{Ran}|A^*| = \mathrm{Ran}A$,

   d) Si A es inversible entonces $|A|$ es inversible y U es unitario.

12. Sea $T = X + iY = U|T|$ la descomposición en parte real e imaginaria (resp. descomposición polar) de $T \in \mathcal{L}(H)$. Probar que son equivalentes:

   i) T es normal, *ii)* X e Y conmutan, *iii)* U y $|T|$ conmutan.

   a) Probar que si T es autoadjunto, U es una simetría ($U^* = U = U^{-1}$).
   b) Probar que si T es normal, $\mathrm{Ran}|T| = \mathrm{Ran}T$ luego U restringido es unitario allí
   c) Probar que si T es normal se puede reemplazar U por un operador unitario V, de manera que $T = V|T|$ *(sug: considerar $V = U + 1 - P_{RanA}$).*

13. Sea $K \in \mathcal{L}(H)$ compacto. Probar que

   a) Si $K^* = K$, $f \in C(\sigma(A))$, entonces $f(K)$ es compacto si y solo si $f(0) = 0$, y además si $K = \sum_{n\geqslant 0} \lambda_n P_n$ entonces
   $$f(K) = \sum_{n\geqslant 0} f(\lambda_n) P_n,$$

   b) $|K|$ es compacto (y si $|K|$ es compacto entonces K lo es),

   c) Si K es normal, entonces $\mu_n(K) = |\lambda_n(K)|$ para todo $n \geqslant 0$ (hay que elegir un orden para los autovalores de K),

14. Sean $H = L^2(X, \mu)$, $k \in L^2(X \times X)$ y $K \in \mathcal{L}(H)$ el operador integral compacto con núcleo k.

   a) Calcular K^* y caracterizar cuando K es normal, cuando es autoadjunto.

   b) Calcular $|K|$ y probar que $\sigma(|K|) \subset \ell^2$.

15. Sea $K \in \mathcal{L}(H)$ compacto. Probar que

   a) La función $x \mapsto \langle Kx, x\rangle$ es ω-continua.

   b) $\mu_n(K) = \lambda_n(|K|) = \min_{E_n} \max_{\{x \in E_n^\perp, \|x\|=1\}} \langle Ax, x\rangle$ donde $E_n \subset H$ recorre los subespacios de dimensión $n \geqslant 0$,

   c) $\mu_k(AKB) \leqslant \|A\| \, \|B\| \, \mu_n(K)$ para todo $n \geqslant 0$ y todo $A, B \in \mathcal{L}(H)$,

   d) Si $0 \leqslant K_1 \leqslant K$, entonces $\mu_n(K_1) \leqslant \mu_n(K)$ para todo $n \geqslant 0$,

16. Sea $A \in \mathcal{L}(H)$, $s, t \in \mathbb{R}$. Probar que

   a) $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$, $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$.

   b) Dada $f \in H$, la curva $\alpha(t) = e^{tA}f \subseteq H$ es solución de la ecuación diferencial $\dot{\alpha} = A\alpha$, $\alpha(0) = f$.

   c) Si $A^* = A$, $\beta(t) = e^{itA}$ es un grupo a un parámetro de operadores unitarios.

   d) Si $A \geqslant r > 0$, entonces $e^{-tA} \xrightarrow{t \to +\infty} 0$ en norma de operadores.

17. Sea $\{e_n\}_n$ b.o.n. de H. Probar que

   a) Si P_i, P son proyectores entonces $P_i \to P$ SOT si y solo si $P_i \to P$ WOT.

   b) Sean $T_i \in \mathcal{L}(H)$, $\|T_i\| \leqslant M$. Entonces $T_i \to 0$ WOT si y solo si $\langle T_i e_n, e_m\rangle \xrightarrow{i} 0$ para todo n, m. Y $T_i \to 0$ SOT si y solo si $\|T_i e_n\| \xrightarrow{i} 0$ para todo n.

   c) Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(H)$ tiende WOT a cero entonces $\|T_n\| \leqslant M$.

   d) Si $C \subseteq \mathcal{L}(H)$ es convexo, la clausura SOT de C coincide con la clausura WOT *(sug: todo cerrado convexo es la intersección de los semiespacios que lo soportan).*

e) Sea $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ el shift a derecha, probar que 0 está en la clausura WOT de $C = \{T^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pero no está en las clausuras SOT ni en norma.

f) Probar que la adjunción $J : A \mapsto A^*$ es continua WOT y en norma, pero no es continua SOT *(sug: considerar la sucesión $T_n = e_1 \otimes e_n \in \mathcal{L}(E)$).*

18. Sea $A^* = A \in \mathcal{L}(H)$ y $f \in \mathcal{B}or(\sigma(A))$ acotada. Probar que

  a) Aproximando f puntualmente con una sucesión *creciente* de funciones continuas f_n se tiene que $f_n(A) \to f(A)$ en la topología SOT *(sug: $f - f_n \geqslant 0$ luego $f(A) - f_n(A) = |f(A) - f_n(A)|$, y ejercicio anterior).*

  b) Aproximando f uniformemente con una sucesión de funciones simples S_n se tiene que $f(A)$ es límite en norma de una sucesión de combinaciones lineales de proyectores.

19. Sea $A = A^* \in \mathcal{L}(H)$. Probar que

  a) $A = T_+ - T_- + i(S_+ - S_-)$, donde $T_i, S_i \geqslant 0$.

  b) Si $f(x) = |x|$ entonces $|A| = f(A)$.

  c) Si $sgn(x)$ es la función real signo, ¿qué relación tiene $V = sgn(A)$ con la isometría parcial de la descomposición polar $A = U|A|$?

20. Sea $H = L^2(X,\mu)$ y $\varphi, \psi \in L^\infty(X,\mu)$. Sean $A = M_\varphi, B = M_\psi \in \mathcal{L}(H)$.

  a) Probar que A, B conmutan.

  b) Probar que A es normal y que es autodajunto si y solo si im es$(\varphi) \subset \mathbb{R}$.

  c) Probar que si $f \in \mathcal{B}or(\sigma(A))$, entonces $f(A) = M_{f\circ\varphi}$ (*sug: probarlo primero para polinomios*).

21. Sea $A = A^* \in \mathcal{L}(H)$. Probar que

  a) Si $\lambda \notin \sigma(A)$, entonces $\|(A-\lambda)^{-1}\| = \text{dist}(\lambda, \sigma(A))^{-1}$.

  b) $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ si y solo si λ no es autovalor o bien $\ker(A-\lambda)$ tiene dimensión infinita.

  c) $\lambda \in \sigma(A)$ si y solo si $P(\lambda,\varepsilon) = E^A(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) \neq 0$ para todo $\varepsilon > 0$.

  d) $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ si y solo si el rango de $P(\lambda,\varepsilon)$ es infinito dimensional para todo $\varepsilon > 0$.

  e) $\lambda \in \sigma_d(A)$ si y solo si es un autovalor aislado y su autoespacio tiene dimensión finita.

Bibliografía

[1] W. Arveson, *Notes on measure and integration in locally compact spaces*, University of California, Berkeley, 1996.

[2] F. F. Bonsall, J. Duncan, *Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 2 Cambridge University Press, London-New York, 1971.

[3] K. R. Davidson, *C^*-algebras by example*. Fields Institute Monographs, 6. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[4] Y. Eidelman, V. Milman, A. Tsolomitis, *Functional analysis. An introduction*. Graduate Studies in Mathematics, 66. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[5] M. Fréchet, *Sur quelques point du calcul fonctionnel*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 22 (1906), Issue 1, 1–72.

[6] E. Helly, *Über lineare Funktionaloperationen*, Wien. Ber. 121 (in German, 1912) 265–297.

[7] R. C. James, *Weak compactness and reflexivity*. Israel J. Math. 2 (1964) 101–119.

[8] J. L. Kelley, *General Topology*. Reprint of the 1955 edition [Van Nostrand, Toronto, Ont.]. Graduate Texts in Mathematics, No. 27. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1975.

[9] P. D. Lax, *Functional analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2002.

[10] N. K. Nikolski, *Operators, functions, and systems: an easy reading. Vol. 2. Model operators and systems*. Translated from the French by Andreas Hartmann and revised by the author. Mathematical Surveys and Monographs, 93. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[11] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*. Academic Press, New York-London, 1972.

[12] J. W. Roberts, *A compact convex set with no extreme points*. Studia Math. 60 (1977), no. 3, 255–266.

[13] W. Rudin, *Functional Analysis*. Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[14] B. Simon, *Trace ideals and their applications*. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 120. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[15] E. Elias, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*. Princeton Mathematical Series, No. 32. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.

[16] R. Whitley, *An elementary proof of the Eberlein-Šmulian theorem*. Math. Ann. 172 (1967) 116–118.

Índice de símbolos

B_E bola unitaria cerrada de un espacio normado E. 15, 154

$\mathcal{B}or(X)$ funciones Borelianas acotadas en el espacio X. 139, 154

$C_0(X)$ funciones continuas que tienden a cero en infinito. 35, 154

$C^*(A)$ álgebra C^* generada por A. 131, 154

$C_c(X)$ funciones continuas de soporte compacto. 34, 154

ω topología débil de un espacio vectorial topológico. 7, 154

ω^* topología débil * de un espacio vectorial topológico dual. 7, 154

E^A medida espectral del operador autoadjunto A. 143, 154

E' dual topológico de un espacio vectorial topoloógico. 7, 154

$\mathcal{H}ol(\sigma(A))$ funciones holomorfas en un entorno del espectro de A. 113, 154

J_E inclusión canónica en el doble dual. 44, 154

$\mathcal{L}(E, F)$ operadores lineales continuos entre espacios vectoriales topológicos. 15, 154

P_S proyección ortogonal con rango el subespacio S. 48, 154

$\rho(A)$ radio espectral de A. 106, 154

$\sigma(A)$ espectro de A. 103, 154

$W^*(A)$ álgebra de von Neumann generada por A. 138, 154

.