

ISSN xxxx-xxxx

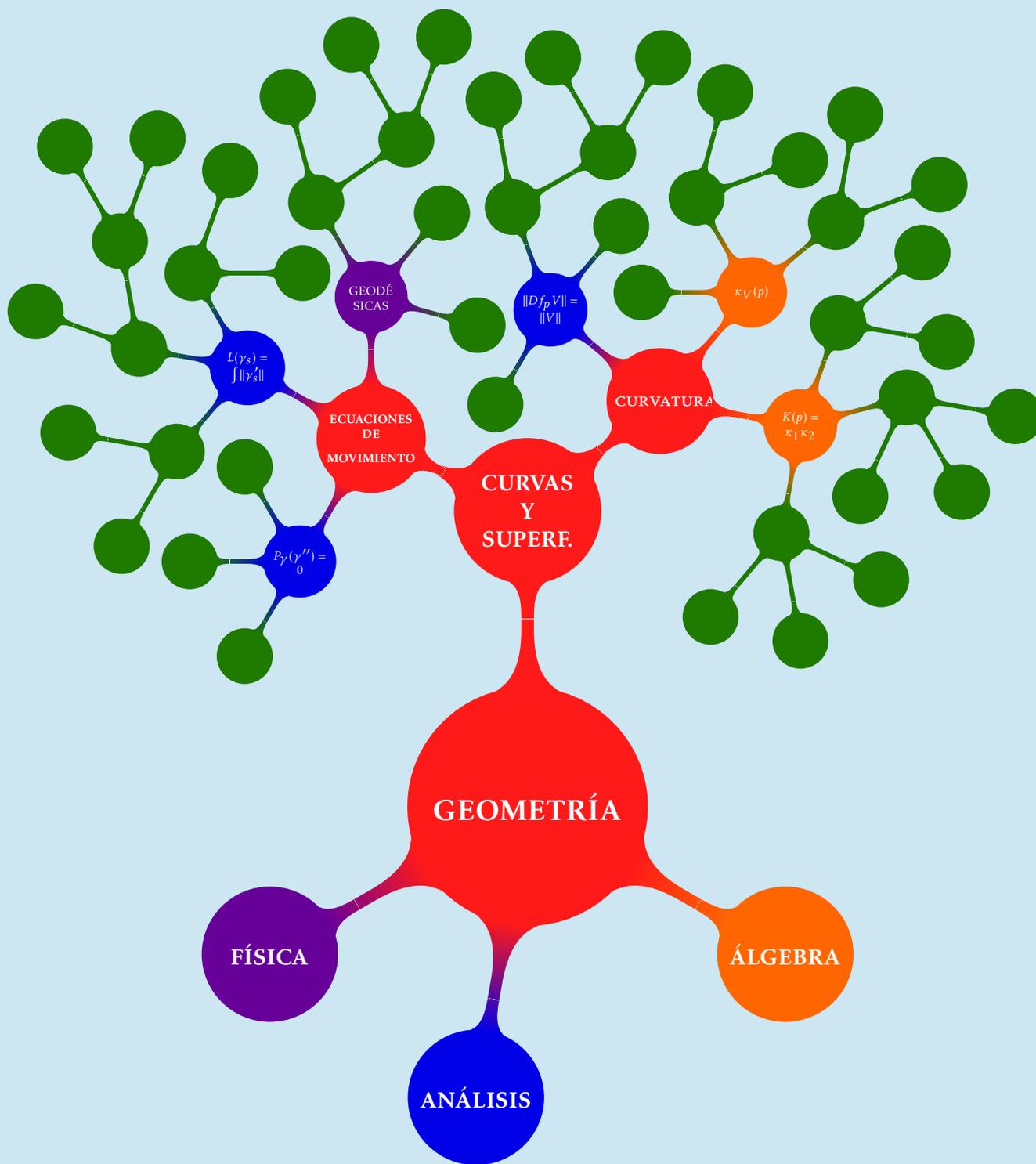
Xxxx

Xxxx X

Gabriel Larotonda
&
Alejandro Varela

CURVAS y SUPERFICIES

con una introducción a la geometría riemanniana



XXXXXXXXXXXX

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

XXXXXXXXXXXX

Prefacio	1
1. Curvas	5
1.1. Parametrizaciones	5
1.1.1. Ejercicios	10
1.2. Reparametrizaciones	13
1.2.1. Parametrización por longitud de arco	17
1.2.2. Rectificación (de un arco)	19
1.3. Unicidad de curvas cortas (minimizantes) en el espacio Euclídeo	23
1.3.1. Ejercicios	24
2. Curvatura: curvas planas	27
2.1. Círculo osculador	27
2.1.1. Orientación, área orientada	30
2.1.2. Curvatura orientada	34
2.1.3. Ejercicios	36
2.2. Movimientos, invariantes completos	38
2.2.1. La curvatura como invariante completo	41
3. Curvatura y torsión: curvas espaciales	47
3.1. Curvatura y plano osculador	47
3.1.1. Área y Volumen orientado en \mathbb{R}^3	50
3.1.2. Curvatura y Torsión	52
3.1.3. La torsión de una curva regular	54
3.2. Triedro de Frenet, invariantes completos	59
3.2.1. Ejercicios	61
4. Superficies	67

4.1. Espacio tangente	67
4.1.1. Ejercicios	71
4.2. Funciones en superficies	73
4.2.1. Campos vectoriales en superficies y flujo de un campo	74
4.2.2. Normal, área, integrales de superficie	76
4.2.3. Ejercicios	81
4.3. Primera forma fundamental	83
4.3.1. Ejercicios	84
5. Geodésicas y función exponencial	89
5.1. Curvas sin aceleración	90
5.1.1. Ejercicios	99
5.2. Cálculo de geodésicas en una parametrización	101
5.2.1. Ejercicios	105
5.3. Distancia intrínseca y curvas minimales	107
5.3.1. Fórmula de la primer variación	109
5.3.2. Ejercicios	114
5.4. Minimalidad local de las geodésicas	117
5.5. Teoremas de Hopf-Rinow	123
5.5.1. Ejercicios	132
6. Curvatura	135
6.1. Curvaturas normales	135
6.1.1. Mapa de Gauss	138
6.2. Curvatura de Gauss	142
6.2.1. Ejercicios	148
6.3. Cálculo de la curvatura en una parametrización	150
6.3.1. Segunda forma fundamental	150
6.3.2. Ejercicios	154
6.4. Isometrías	157
6.5. El Teorema Egregio de Gauss	163
6.5.1. Ejercicios	166
6.6. Formas espaciales	170
6.6.1. Ejercicios	177

7. Geometría Riemanniana	181
7.1. Métricas de Riemann	181
7.1.1. Campos y derivada covariante	185
7.2. Geodésicas	194
7.2.1. Fórmula de la primer variación	197
7.3. Transporte paralelo e isometrías	198
7.3.1. Isometrías	199
7.4. El tensor de curvatura y campos de Jacobi	201
7.4.1. Campos de Jacobi	206
7.5. Automorfismos de la geometría y campos de Killing	209
7.5.1. Campos de Killing métricos	215
7.6. Minimalidad local y global de las geodésicas	217
7.6.1. El lema de Gauss	217
7.6.2. Coordenadas polares	218
7.6.3. Minimalidad local de las geodésicas y el Teorema de Hopf-Rinow	218
7.7. Variedades planas	221
7.8. El espacio hiperbólico	221
7.8.1. Geodésicas e isometrías	222
7.8.2. El disco como modelo de curvatura negativa constante	228
7.9. El espacio de matrices positivas	230
7.9.1. Geodésicas y distancia	233
7.9.2. Isometrías y campos de Killing	234
7.9.3. Curvatura	235
7.10. Una relación entre curvatura y geodésicas	236
7.10.1. Espacios de curvatura no positiva	237
7.10.2. Ejercicios	241
Bibliografía	243
Índice alfabético	245

Con este texto nos hemos propuesto dar una exposición de los temas clásicos de curvas y superficies en el espacio, con la doble pretensión de hacer la presentación accesible al lector -con el único prerequisite de tener un dominio razonable del cálculo en varias variables reales- y a la vez que dicha presentación esté en un lenguaje que permita abordar luego la geometría riemanniana moderna sin usar coordenadas. Si alguna de estas dos premisas (o ambas) fracasa, la responsabilidad podría atribuirse únicamente a los autores.

En el Capítulo 1 estudiamos las curvas que admiten una parametrización suave y presentamos las nociones de velocidad, rapidez y longitud; vemos que si bien una curva puede admitir muchas parametrizaciones distintas, su longitud está bien definida y no depende de cómo la recorremos. Una noción auxiliar que utilizamos aquí y volverá a surgir en varias partes del texto es la de arco continuo rectificable, y su correspondiente longitud -que se calcula sin apelar a la noción de velocidad-. El Capítulo 2 está centrado en la noción de curvatura de una curva plana, definida esencialmente -en cada punto- como el inverso multiplicativo del radio de la circunferencia que mejor aproxima la curva. En la discusión de la noción de curvatura surge naturalmente la noción de área orientada, vinculada con la diferencia (o más precisamente el ángulo) entre los vectores velocidad y aceleración de la curva. Vemos en este capítulo que la curvatura es un invariante completo de las curvas planas, esto es, que la curvatura determina unívocamente la curva (a menos de un movimiento rígido, que corresponde a una elección de la posición y velocidad iniciales). En el Capítulo 3 se aborda el estudio de las curvas en el espacio euclideo tridimensional, y se introduce la noción de base móvil ("*repère mobile*" en el idioma de Frénet y Serret), una base ortonormal adosada a la curva que funciona como sistema de referencia móvil y simplifica el estudio de los invariantes de la curva, que en este caso son dos: la curvatura y la torsión.

En el Capítulo 4 pasamos a estudiar superficies que admiten parametrizaciones suaves (siempre en el espacio euclideo de tres dimensiones); presentamos aquí las nociones de espacio tangente -que puede ser pensado como el espacio de velocidades posibles en un punto dado de la superficie- y discutimos la noción de función entre superficies, la noción de campo vectorial y una operación

fundamental entre ellos conocida como corchete de Lie. Por medio de una parametrización dada surgen naturalmente elementos como la base (en cada punto) del espacio tangente a la superficie, que permite a su vez elegir de manera suave un vector normal unitario; una parametrización también nos permite introducir el llamado elemento de área de la superficie, que permite calcular integrales sobre ella. Pasamos luego al estudio de la superficie como espacio métrico, y para ello surge la primera forma fundamental, que codifica la deformación entre el plano (el dominio de la parametrización) y la forma que tiene la superficie en el espacio. En el siguiente capítulo, el Capítulo 5, profundizamos este estudio métrico abordando la noción de curva geodésica en la superficie, presentada como una curva que sigue la forma natural de la misma sin desviaciones; veremos que una tal curva se puede caracterizar con las llamadas *ecuaciones de Euler* que involucran proyectar ortogonalmente -sobre el plano tangente a la superficie- el vector aceleración de la curva. Esta misma operación puede hacerse sobre campos vectoriales (derivar y proyectar) lo que introduce de manera natural la noción de derivada covariante (también llamada derivada de Levi-Civita). Estudiamos aquí las ecuaciones de las geodésicas en profundidad y presentamos la función exponencial de la superficie (conocida como exponencial riemanniana), que nos permite parametrizar a la superficie localmente de manera tal que los rayos que emanan de un punto dado son geodésicas. Discutimos la noción de distancia intrínseca en una superficie (definida como el ínfimo de las longitudes de las curvas que unen dos puntos dados en la superficie), y por medio de la fórmula de la primer variación vemos que toda curva minimal (es decir, que realiza la distancia intrínseca en la superficie, entre dos puntos dados) es necesariamente una curva geodésica. A continuación se prueba que (al menos localmente) toda geodésica es una curva minimal, y esto nos permite discutir los teoremas de Hopf-Rinow que vinculan la existencia de geodésicas minimales con la completitud de la superficie vista como espacio métrico con la distancia intrínseca.

El Capítulo 6 aborda las distintas nociones de curvatura de una superficie regular en el espacio euclídeo tridimensional, comenzando con las curvaturas normales y su relación con el mapa de Gauss, las curvaturas principales y las direcciones principales de curvatura. El mapa de Gauss es la función que le asigna a cada punto de la superficie su vector normal unitario (equivalentemente, un punto en la esfera), vemos en este capítulo como su diferencial codifica las curvaturas de la superficie en cada punto. Luego, para calcular estas cantidades más concretamente, se introduce la segunda forma fundamental a partir de una parametrización local de la superficie. Presentamos la noción de isometría entre superficies y vemos que dos superficies son isométricas si y sólo si admiten parametrizaciones con la misma primer forma fundamental; en ese

caso vemos que la curvatura de Gauss permanece invariante (el *teorema egregio* de Gauss). Estudiamos también otras propiedades de las isometrías, vinculadas con área, longitud y geodésicas. El capítulo concluye con una presentación de las llamadas *formas espaciales*, superficies con curvatura de Gauss constante: probamos aquí que, salvo una isometría, una tal forma debe tratarse de una parte del plano euclídeo, de una esfera o de una pseudoesfera -este estudio es local y omitimos la condición habitual de simplemente conexión de las superficies-. Cabe notar que los modelos del plano y la esfera son simplemente conexos pero la pseudoesfera no lo es; esta dificultad se discute en detalle al final del capítulo (y en el Capítulo 7 se resuelve presentando el disco de Poincaré como modelo de forma espacial con curvatura de Gauss negativa). Esto concluye nuestra presentación de los temas clásicos de curvas y superficies en el plano y el espacio vinculados a la geometría diferencial, sin la pretensión de haber sido exhaustivos: en particular una omisión relevante de este texto es el Teorema de Gauss-Bonnet y sus consecuencias topológicas.

En el Capítulo 7, aprovechando la notación y las nociones geométricas introducidas en los capítulos anteriores, presentamos los temas básicos de la geometría riemanniana local. Comenzamos por la métrica, que puede asimilarse (o analogarse) a la primera forma fundamental de una superficie embebida en el espacio euclideo. Discutimos la existencia y unicidad de la derivada de Levi-Civita en presencia de una métrica riemanniana, en un lenguaje que no usa coordenadas tal como hicimos, siempre que fue posible. Damos una breve discusión sobre la notación de Einstein e introducimos los coeficientes de Christoffel como las coordenadas del operador bilineal de la métrica (en una base ortonormal dada del espacio tangente). Las discusiones que siguen son sobre geodésicas y curvas minimales, y el lector hallará que los argumentos e ideas son muy similares a aquellos introducidos para superficies. Luego estudiamos en detalle el transporte paralelo a lo largo de curvas (tema que para simplificar la exposición salteamos cuando discutimos las superficies) y vemos que este transporte es invariante por isometrías riemannianas. A continuación presentamos el tensor de curvatura de la métrica riemanniana, así como la curvatura seccional (a partir de algunos ejercicios del capítulo dedicado a la curvatura de superficies, vemos que la curvatura seccional de una superficie es simplemente su curvatura de Gauss). Presentamos aquí también la curvatura escalar y la curvatura de Ricci -objetos que en dimensión 2 colapsan a la curvatura de Gauss- y vemos que todos estos objetos son invariantes por isometrías. Discutimos los campos de Jacobi a lo largo de geodésicas y vemos la relación de estos con la función exponencial riemanniana, y luego dedicamos una sección a los automorfismos de la conexión de Levi-Civita y sus generadores infinitesimales, los campos de Killing. Tratamos luego el teorema de minimalidad local de

las geodésicas y los teoremas de Hopf-Rinow (nuevamente, el lector reconocerá las similitudes con el caso ya presentado en superficies). Discutimos entonces ejemplos que consideramos centrales para ilustrar la maquinaria desarrollada, a saber: las variedades planas, el espacio hiperbólico (en su modelo del disco de Poincaré) y el espacio homogéneo de las matrices positivas e inversibles. El libro termina con una discusión sobre la relación entre curvatura y geodésicas, específicamente en el caso de variedades de curvatura no positiva, donde hacemos jugar la noción de *triángulos de comparación* y vemos que en un tal espacio la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo geodésico es *menor* o igual a π ; vemos también que allí las geodésicas que surgen de un punto divergen a velocidad igual o mayor que en el caso de curvatura nula.

Sobre el final de varios capítulos hemos dejado notas bibliográficas para reconocer las fuentes de donde hemos tomado ideas y presentaciones, así como para expandir el acotado horizonte de nuestra exposición.

Todo el mundo sabe lo que es una curva, hasta que estudia suficiente matemática como para confundirse con la innumerable cantidad de posibles excepciones.

Felix Klein

1.1. Parametrizaciones

En esta primer parte del texto, estudiaremos la geometría de las curvas planas y espaciales. Nos concentraremos en una clase especial de curvas, las llamadas curvas regulares, que definiremos formalmente a continuación. Estas definiciones nos van a permitir incluir en nuestras consideraciones, curvas que no son necesariamente suaves en su trazo, pero si continuas y con puntos “no demasiado malos” donde no sean suaves.

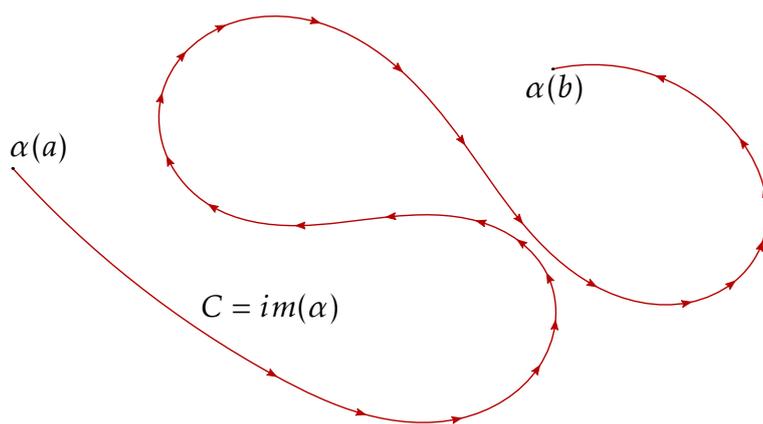


Figura 1.1: Curva regular $C \subset \mathbb{R}^n$

Definición 1.1.1. Dado un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$, decimos que

1. $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una *parametrización* de C si α es una función continua y la imagen de α coincide con C , es decir $\text{Im}(\alpha) = C$. En general consideraremos asignaciones α inyectivas en (a, b) . En este caso decimos que C es una *curva continua*.
2. La parametrización es *suave* si α es de clase C^1 , esto es si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ entonces x, y son funciones de clase C^1 en (a, b) y existen los límites laterales de las derivadas en a, b . En este caso decimos que C es una *curva suave*.
3. La parametrización es *regular* si además de ser suave, se verifica que $\alpha'(t)$ no es el vector nulo para ningún $t \in (a, b)$ (equivalente a que $\|\alpha'(t)\| \neq 0$). En este caso decimos que C es una *curva regular*.
4. Si decimos que α es *regular a trozos*, nos referimos a que la regularidad se verifica en todo $[a, b]$ exceptuando, tal vez, un conjunto finito de puntos $t_i \in [a, b]$.

Definición 1.1.2. Dada una parametrización regular $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, llamaremos a $\alpha'(t_0)$ el *vector tangente a α en el punto $\alpha(t_0)$* , para $t_0 \in [a, b]$. La interpretación geométrica en la Figura 1.2 utiliza que

$$\alpha'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\alpha(t_0 + h) - \alpha(t_0)).$$

Observación 1.1.3. Al vector tangente $\alpha'(t_0)$ también se lo suele denominar vector velocidad. El sentido de este vector depende de la orientación de la parametrización α y su longitud $\|\alpha'(t_0)\|$ de la rapidez a la que se recorre la curva. De hecho, a la longitud $\|\alpha'(t_0)\|$ se la suele llamar *rapidez* de la parametrización α en $\alpha(t_0)$.

Observación 1.1.4. Como ya dijimos, cuando pedimos que α sea suave a trozos, si t_i es un punto donde α no es de clase C^1 , lo que si pedimos es que existan los límites laterales de la derivada en t_i (ver la Figura 1.3). Es decir, que existan

$$\alpha'(t_i^-) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} \alpha'(t) \quad \text{y} \quad \alpha'(t_i^+) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} \alpha'(t).$$

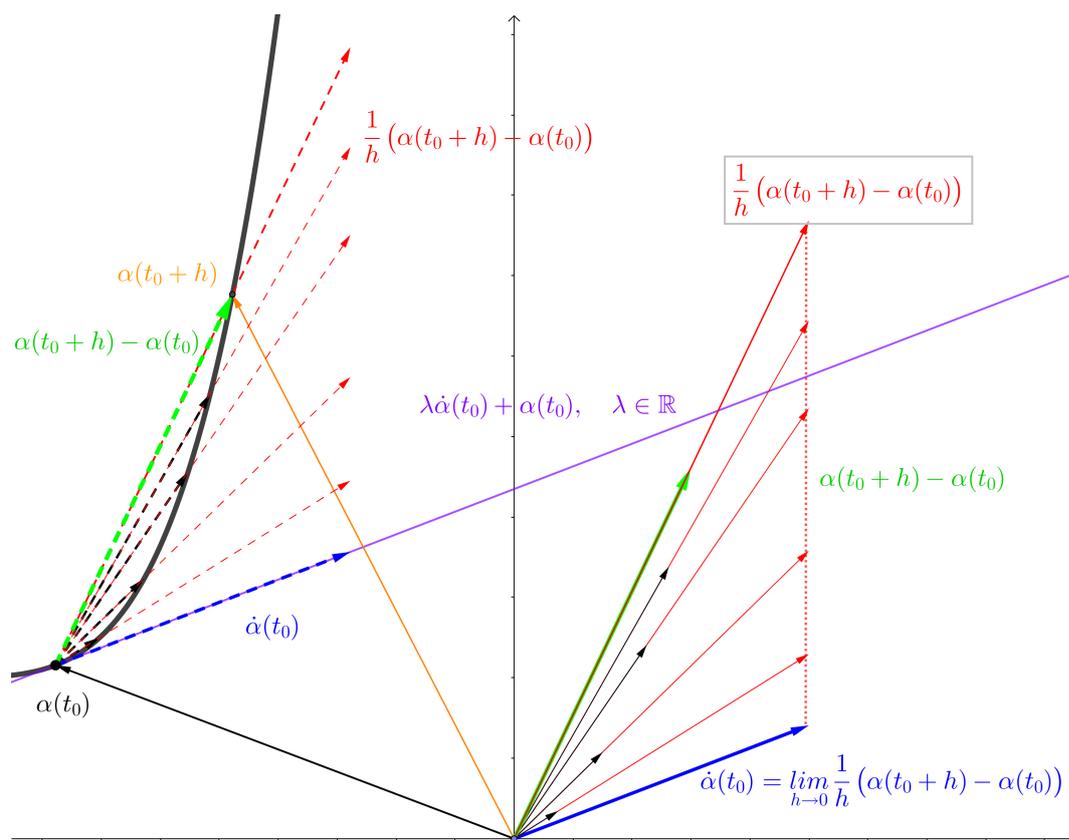


Figura 1.2: Vector tangente a la parametrización α en el punto $P = \alpha(t_0)$. Se muestran los vectores y sus trasladados al punto $\alpha(t_0)$.

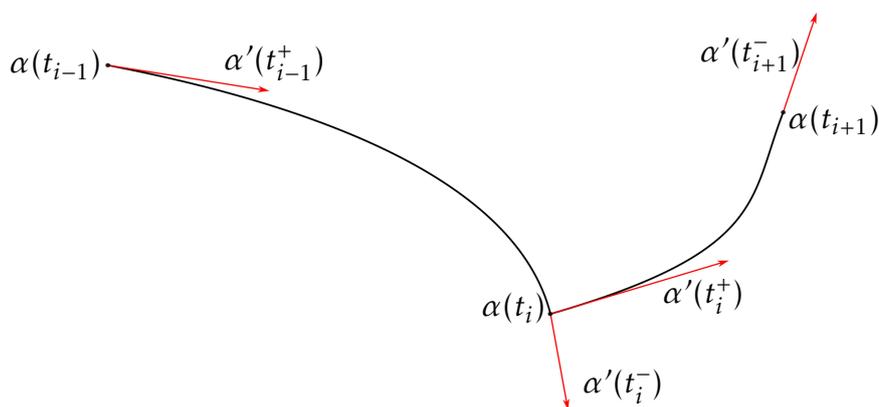


Figura 1.3: Curva regular a trozos

Por ejemplo: si C es la gráfica de $y = |x|$, entonces C es una curva regular a trozos en \mathbb{R}^2 . Una parametrización tal de C es, por ejemplo

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, -t) & t \leq 0 \\ (t, t) & t \geq 0 \end{cases} .$$

En efecto, se tiene que para esta parametrización

$$\alpha'(t) = \begin{cases} (1, -1) & t < 0 \\ (1, 1) & t \geq 0 \end{cases}$$

y a pesar de que no existe $\alpha'(0)$, si existen $\alpha'(0^-) = (1, -1)$ y $\alpha'(0^+) = (1, 1)$. Luego C es una curva regular a trozos como habíamos afirmado.

Observación 1.1.5. Si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es regular a trozos, entonces $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ salvo en finitos puntos de $[a, b]$. Además la función $t \mapsto \|\alpha'(t)\|$ es continua en cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$.

Definición 1.1.6. Dada $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definimos la *longitud de arco* de α como el número

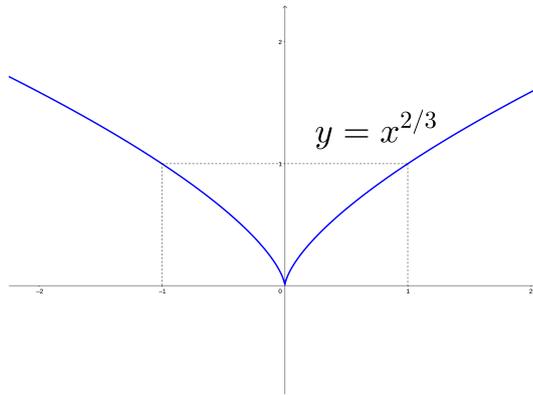
$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Para que este número esté bien definido, alcanza con que α sea suave a trozos (si hay puntos donde α no es derivable, en la integral no van a ser relevantes por la condición que pedimos de que existan los límites laterales de la derivada).

En ese caso, si $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ son los puntos donde no hay derivada, entonces

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt + \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| dt + \dots + \int_{t_{n-1}}^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Ejemplo 1.1.7. La curva $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ parametriza la gráfica de la función $y = x^{2/3}$, y a pesar de que en $(0,0)$ la curva no es suave (lo que se ve reflejado en que $\alpha'(0) = (0,0)$), podemos calcular la longitud de la curva para, por ejemplo, $x \in [-1,1]$: se tiene $\alpha'(t) = (3t^2, 2t)$, luego



$$\begin{aligned} L_{-1}^1(\alpha) &= \int_{-1}^1 \|\alpha'(t)\| dt = \int_{-1}^1 \sqrt{9t^4 + 4t^2} dt = \int_{-1}^1 |t| \sqrt{9t^2 + 4} dt \\ &= \int_{-1}^0 -t \sqrt{9t^2 + 4} dt + \int_0^1 t \sqrt{9t^2 + 4} dt = 2 \int_0^1 t \sqrt{9t^2 + 4} dt \\ &= \frac{2}{27} (9t^2 + 4)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{27} [13^{3/2} - 4^{3/2}]. \end{aligned}$$

Observación 1.1.8. Si en el ejemplo previo, uno intenta parametrizar C usando $\beta(t) = (t, (t^2)^{1/3})$, se obtiene

$$\beta'(t) = \left(1, \frac{2}{3} t^{-1/3}\right) = \left(1, \frac{2}{3t^{1/3}}\right)$$

y en este caso no existen $\beta'(0^+)$ ni $\beta'(0^-)$ (la segunda coordenada diverge en $t = 0$). Pero eso no quiere decir que la curva C no sea regular a trozos, sino que esta parametrización en particular no sirve para decir que lo sea.

Como vimos, usando $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ se deduce que C si es una curva regular a trozos.

Definición 1.1.9. Dada una curva suave parametrizada como $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, y dado $P = \alpha(t_0)$, definimos la *recta tangente* a α en P como

$$L_P : \lambda V + P = \lambda \alpha'(t_0) + \alpha(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(ver la Figura 1.4).

Observar que si bien el vector tangente $\alpha'(t_0)$ depende de la parametrización α , la recta tangente L_P no depende de como se parametriza la curva.

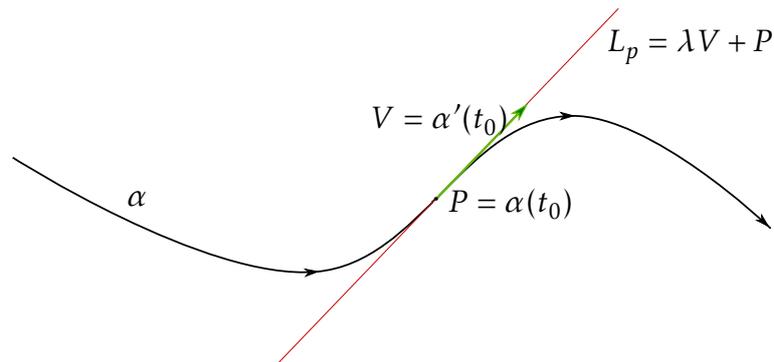


Figura 1.4: Recta tangente a una curva regular

Observación 1.1.10 (Derivada del producto interno y de la norma). Si $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ son dos curvas derivables, entonces es fácil ver que

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \dot{\alpha}, \beta \rangle + \langle \alpha, \dot{\beta} \rangle.$$

Afirmamos que si $\alpha(t) \neq 0$, entonces $(\|\alpha\|)' = \|\alpha\|^{-1} \langle \alpha, \dot{\alpha} \rangle$, esto es

$$\frac{d}{dt} \|\alpha(t)\| = \frac{1}{\|\alpha(t)\|} \langle \alpha(t), \dot{\alpha}(t) \rangle. \quad (1.1)$$

En efecto si $g(t) = \|\alpha(t)\|$ entonces $g^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle$ y por la regla de la cadena y la observación anterior, $2g\dot{g} = 2\langle \alpha, \dot{\alpha} \rangle$.

1.1.1. Ejercicios

1.1.1. Dibujar las siguientes curvas de manera aproximada. Decidir cuáles son cerradas y cuáles no. Calcular el vector y la recta tangente a cada una de ellas en un punto genérico $t = t_0$.

- | | |
|---|---|
| a) $\alpha(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$ | b) $\begin{cases} x(t) = 3 \cos(\pi t) \\ y(t) = 3 \text{sen}(\pi t) \end{cases}$ |
| c) $c(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), t)$ | d) $\epsilon(t) = (2 \cos(t), 3 \text{sen}(t))$ |
| e) $l(t) = (3t + 1, t - 2, -t + 4)$ | f) $\begin{cases} x(t) = 4 \cos(\pi t) \\ y(t) = 4 \text{sen}(\pi t) \\ z(t) = -3t \end{cases}$ |

1.1.2. Dibujar las siguientes curvas planas, que están dadas en coordenadas polares, de manera aproximada.

a) $r = 1 + \cos(\theta)$ (cardioide) b) $r^2 = 4\cos(2\theta)$ (lemniscata)

c) $r = \theta$ (espiral de Arquímedes) d) $r = e^\theta$ (espiral logarítmica)

e) $r = \sin(3\theta)$ (flor de 3 pétalos).

1.1.3. Probar que las siguientes curvas parametrizan las dadas en el ejercicio previo:

a) $\alpha(t) = ((1 + \cos(t))\cos(t), (1 + \cos(t))\sin(t))$ b) $\alpha(t) = \left(\frac{2\cos(t)}{1+\sin^2(t)}, \frac{2\sin(t)\cos(t)}{1+\sin^2(t)} \right)$

c) $\alpha(t) = (t\cos(t), t\sin(t))$ d) $\alpha(t) = (e^t\cos(t), e^t\sin(t))$

e) $\alpha(t) = (\sin(3t)\cos(t), \sin(3t)\sin(t))$.

1.1.4. Si $n \in \mathbb{N}$, dar una expresión en coordenadas polares y una parametrización de una curva cuyo trazo sea una flor de n hojas.

1.1.5. Probar que, en la espiral logarítmica, el ángulo entre el radio vector \vec{r} (que une el origen con un punto P de la curva) y el vector tangente en P es constante.

1.1.6. Dado $\gamma \in (0, \pi)$, hallar una variante de la espiral logarítmica donde el ángulo entre el radio vector y el vector tangente sea exactamente γ (hallar una expresión en coordenadas polares y una parametrización).

1.1.7. Probar que, en la espiral de Arquímedes, la distancia entre vueltas es constante si se mide a lo largo del radio vector \vec{r} .

1.1.8. Dado $a > 0$, hallar una variante de la espiral de Arquímedes donde la distancia entre vueltas sea exactamente a (hallar una expresión en coordenadas polares y una parametrización).

1.1.9. Dadas las siguientes curvas C , hallar dos parametrizaciones que las orienten que manera distinta:

a) C el arco de parábola de ecuación $y = x^2$ entre los puntos $(-1, 1)$ y $(2, 4)$.

b) C la circunferencia de radio 2 con centro en $(2, 1)$.

- c) C la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a, b > 0$.
- d) C el segmento de \mathbb{R}^3 que une $(2, 3, -1)$ con $(3, 2, 1)$.
- e) $C \subset \mathbb{R}^3$ la intersección de $y = x^2$ con $x + z = 2$ en el primer octante.
- f) C la intersección de $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ con $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1.1.10. La curva plana **tractriz**.

- a) Sea C una curva plana en el primer cuadrante, con la propiedad de que la longitud del segmento de la recta tangente entre el punto de tangencia y la intersección con el eje de las y es constantemente 1, esta curva es la **tractriz**. Probar que si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización de C , entonces se verifica la ecuación diferencial

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \pm \frac{\sqrt{1 - x(t)^2}}{x(t)}$$

(haciendo un gráfico aproximado se verifica que debe tomarse el signo $-$).

- b) Probar que si C es el gráfico de $y = y(x)$, entonces y verifica la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.
- c) Probar que $y = y(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) - \sqrt{1-x^2}$ es una tractriz.

1.1.11. Calcular la longitud $L(C) = \int_a^b \|\alpha'\|$ de todas las curvas del ejercicio 1.1.9. En el caso de la elipse, dejar planteada la integral (no tiene primitiva elemental).

1.2. Reparametrizaciones

El Ejemplo 1.1.7 nos muestra que hay muchas maneras de parametrizar la misma curva. Cuando α, β son dos parametrizaciones de la misma curva C , decimos que β es una reparametrización de α (y viceversa).

Definición 1.2.1. Si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva regular, y tomamos una función $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ biyectiva y derivable, con $\varphi'(x) \neq 0$ para $x \in (a, b)$, entonces

$$\beta = \alpha \circ \varphi^{-1} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.2)$$

es una reparametrización de α .

Observar que como φ es biyectiva y con derivada no nula, entonces su inversa $\varphi^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$ también es derivable, y su derivada se puede calcular mediante

$$\frac{d}{ds}(\varphi^{-1}(s)) = (\varphi^{-1})'(s) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} \quad (1.3)$$

o también de la forma: $(\varphi^{-1})'(\varphi(t)) = \frac{1}{\varphi'(t)}$

para $s \in (c, d)$ y $t \in (a, b)$ (por el teorema de la función inversa). Este hecho implica que β también resulta ser una parametrización regular. Además tanto φ' como $(\varphi^{-1})'$ tienen el mismo signo que se conserva en sus intervalos de definición, de donde resulta que φ y φ^{-1} son ambas estrictamente crecientes o ambas estrictamente decrecientes.

Definición 1.2.2. Diremos que una reparametrización β de α como en (1.2) *conserva la orientación* de α si la curva C se recorre en el mismo sentido con ambas parametrizaciones (equivalentemente, si φ y por lo tanto φ^{-1} son crecientes). Por otro lado, diremos que β *invierte la orientación* de α , si la curva C se recorre en el sentido opuesto con cada parametrización (equivalentemente, si φ y por lo tanto φ^{-1} son decrecientes).

Para cada curva regular a trozos C , y cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ de regularidad de alguna parametrización $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, una reparametrización es simplemente un cambio de variable real en el parámetro, pero elegido de tal manera que el mismo sea suave y preserve el sentido (orientación) del recorrido de α en todos los intervalos $[t_i, t_{i+1}]$, o bien que invierta el sentido del recorrido de α .

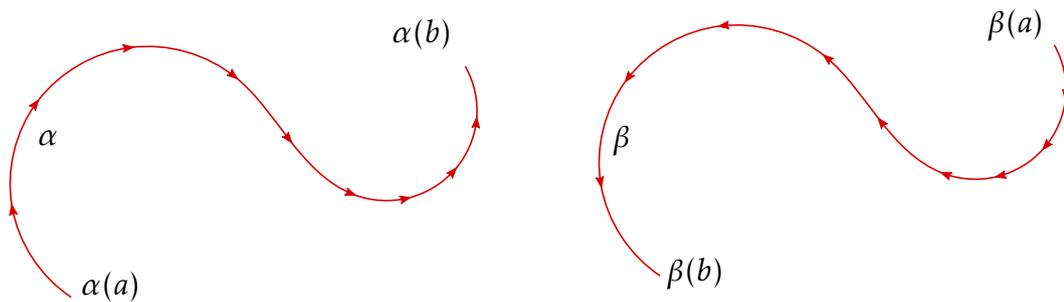


Figura 1.5: Reparametrización $\beta(s) = \alpha(a + b - s)$ de $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, con la orientación opuesta

Ejemplo 1.2.3. Volviendo al caso de un único intervalo de regularidad, y a modo de ejemplo: tomamos la recta $\alpha(t) = tV + P$, y nos quedamos con el segmento que va desde P hasta $V + P$ (esto es, tomamos $t \in [0, 1]$) entonces tomando

$$\beta(s) = (s^2 - 1)V + P,$$

con $s \in [1, \sqrt{2}]$, se verifica que β es reparametrización de α . En efecto, la función $f : [0, 1] \rightarrow [1, \sqrt{2}]$ dada por $f(t) = \sqrt{t+1}$ es biyectiva: si llamamos $s = f(t)$, hallar la función inversa de f es simplemente despejar t de la ecuación dicha, es decir despejar t de la ecuación $s = \sqrt{t+1}$. El despeje nos da $t = f^{-1}(s) = s^2 - 1$, luego $\beta(s) = \alpha \circ f^{-1}(s) = \alpha(s^2 - 1) = (s^2 - 1)V + P$. Notemos que $\alpha(0) = P = \beta(1)$, $\alpha(1) = V + P = \beta(\sqrt{2})$ lo que nos dice que α y β recorren la misma curva en el mismo sentido, sólo que con diferentes velocidades.

Veamos esto último, relacionado con la longitud, con más detalle: $\alpha'(t) = V$, luego $\|\alpha'(t)\| = \|V\| = cte$, mientras que $\beta'(s) = 2sV$, luego $\|\beta'(s)\| = 2s\|V\|$. Sin embargo,

$$L_0^1(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'\| = \int_0^1 \|V\| = \|V\|,$$

y también

$$L_1^{\sqrt{2}}(\beta) = \int_1^{\sqrt{2}} 2s\|V\| = \|V\| \int_1^{\sqrt{2}} 2s ds = \|V\| s^2 \Big|_1^{\sqrt{2}} = \|V\|(2 - 1) = \|V\|.$$

Es decir, a pesar de que las velocidades son distintas, la longitud medida con una u otra parametrización es la misma. Esto no es casual, sino que es un hecho general, bastante lógico, que enunciaremos a continuación:

Teorema 1.2.4. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ curva regular a trozos. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización regular a trozos de C y $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una reparametrización regular a trozos de α . Entonces

$$L_a^b(\alpha) = L_c^d(\beta) = L(C),$$

es decir, la longitud de una curva regular a trozos no depende de la reparametrización usada.

Demostración. La prueba es consecuencia del teorema sobre integrales de línea que demostramos a continuación, para el caso particular $f \equiv 1$. \square

De aquí en más, y siempre que sea necesario distinguirlas, denotamos $(\cdot)' = \frac{d}{ds}$ la derivada respecto del parámetro real s , y denotamos $(\cdot)\dot{=} \frac{d}{dt}$ la derivada respecto del parámetro real t .

Teorema 1.2.5. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ una curva regular a trozos. Sean $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrizaciones regulares a trozos de C , con β una reparametrización de α como en (1.2). Entonces para toda función continua $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene

$$\int_a^b (f \circ \alpha)(t) \|\dot{\alpha}(t)\| dt = \int_c^d (f \circ \beta)(s) \|\beta'(s)\| ds. \quad (1.4)$$

Demostración. Podemos suponer, dividiendo las integrales en pedazos, que la curva C es regular. Sea $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ biyectiva y de clase C^1 de manera que $\beta(s) = \alpha(\varphi^{-1}(s))$ sea una reparametrización de α (o lo que es igual $\alpha(t) = \beta(\varphi(t))$). Entonces $\beta'(s) = \dot{\alpha}(\varphi^{-1}(s))(\varphi^{-1})'(s)$ o también $\dot{\alpha}(t) = \beta'(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)$. Llamando $s = \varphi(t)$, se tiene $ds = \dot{\varphi}(t)dt$, y la integral de la izquierda se puede escribir como

$$\begin{aligned} \int_a^b (f \circ \alpha)(t) \|\dot{\alpha}(t)\| dt &= \int_a^b f(\alpha(t)) \|\beta'(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t)\| dt \\ &= \int_a^b f(\beta(\varphi(t))) \|\beta'(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t)\| dt. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Consideremos primero el caso en que φ sea creciente (es decir, cuando β conserva la orientación de α). En este caso resulta entonces que $\dot{\varphi}(t) > 0$ (por lo que $\|\beta'(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t)\| = \|\beta'(\varphi(t))\| |\dot{\varphi}(t)| = \|\beta'(\varphi(t))\| \dot{\varphi}(t)$), y además $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$. Entonces la integral anterior (1.5) es igual a:

$$\int_a^b f(\beta(\varphi(t))) \|\beta'(\varphi(t))\| \dot{\varphi}(t) dt = \int_{\varphi(a)=c}^{\varphi(b)=d} f(\beta(s)) \|\beta'(s)\| ds$$

donde la igualdad se obtiene utilizando la sustitución $s = \varphi(t)$ con $ds = \dot{\varphi}(t)dt$. Esto prueba la identidad (1.4) para el caso en que φ sea creciente (β conserva orientación dada por α a C).

En el caso en que φ sea decreciente (es decir, cuando β invierte la orientación de α), resulta que $\dot{\varphi}(t) < 0$. Entonces ahora

$$\|\beta'(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t)\| = \|\beta'(\varphi(t))\| |\dot{\varphi}(t)| = \|\beta'(\varphi(t))\| (-\dot{\varphi}(t)),$$

y además $\varphi(a) = d$, $\varphi(b) = c$. Entonces en este caso la integral (1.5) es igual a:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\beta(\varphi(t))) \|\beta'(\varphi(t))\| (-\dot{\varphi}(t)) dt &= - \int_{\varphi(a)=d}^{\varphi(b)=c} f(\beta(s)) \|\beta'(s)\| ds \\ &= - \left(- \int_c^d f(\beta(s)) \|\beta'(s)\| ds \right) \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se obtiene utilizando la sustitución $s = \varphi(t)$ con $ds = \dot{\varphi}(t)dt$ y la segunda igualdad a partir de que $\int_d^c g = - \int_c^d g$. Esto prueba la identidad (1.4) para el caso en que φ sea decreciente (β invierte la orientación dada por α a C). \square

Corolario 1.2.6. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ curva regular a trozos. Sean $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización regular a trozos de C y $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una reparametrización de α . Entonces para todo campo continuo $F : C \rightarrow \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\int_a^b \langle F \circ \alpha(t), \dot{\alpha}(t) \rangle dt = \int_c^d \langle F \circ \beta(s), \beta'(s) \rangle ds, \text{ si } \beta \text{ conserva la orientación de } \alpha$$

y

$$\int_a^b \langle F \circ \alpha(t), \dot{\alpha}(t) \rangle dt = - \int_c^d \langle F \circ \beta(s), \beta'(s) \rangle ds, \text{ si } \beta \text{ invierte la orientación de } \alpha.$$

Demostración. Definimos $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ a lo largo de C como

$$f(\alpha(t)) = \langle (F \circ \alpha)(t), \frac{\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|} \rangle.$$

Usando la notación del teorema anterior $s = \varphi(t)$, para $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$, notemos que si α y β tienen la misma orientación resulta

$$\frac{\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|} = \frac{\beta'(\varphi(t))}{\|\beta'(\varphi(t))\|}$$

y si tienen orientación opuesta

$$\frac{\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|} = -\frac{\beta'(\varphi(t))}{\|\beta'(\varphi(t))\|}.$$

Esto implica que $f(\alpha(t)) = f(\beta(s))$ en el primer caso y que $f(\alpha(t)) = -f(\beta(s))$ en el segundo.

Luego, resulta

$$\begin{aligned} \int_a^b \langle (F \circ \alpha)(t), \dot{\alpha}(t) \rangle dt &= \int_a^b \langle (F \circ \alpha)(t), \frac{\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|} \|\dot{\alpha}(t)\| \rangle dt \\ &= \int_a^b \langle (F \circ \alpha)(t), \frac{\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|} \rangle \|\dot{\alpha}(t)\| dt \\ &= \int_a^b (f \circ \alpha)(t) \|\dot{\alpha}(t)\| dt \\ &\stackrel{\text{Teo. 1.2.5}}{=} \pm \int_c^d (f \circ \beta)(s) \|\beta'(s)\| ds = \pm \int_c^d \langle (F \circ \beta)(s), \beta'(s) \rangle ds \end{aligned}$$

donde la anteúltima igualdad es consecuencia del teorema previo y los signos \pm dependen de si $f(\alpha(t)) = f(\beta(s))$ o si $f(\alpha(t)) = -f(\beta(s))$ como se analizó al comienzo de la demostración (que corresponden a los casos en que β conserve (signo +) o invierta (signo -) la orientación dada por α a la curva C). \square

1.2.1. Parametrización por longitud de arco

Definición 1.2.7. Para una curva regular a trozos C , diremos que C está *parametrizada por longitud de arco* si α parametriza a C y $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in [a, b]$. Diremos que la *rapidez de α es constante* si $\|\alpha'(t)\| = cte$.

Observando un dibujo, debería ser claro que una curva regular siempre se puede recorrer con velocidad unitaria. Más precisamente:

Teorema 1.2.8. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ curva regular a trozos parametrizada por α . Entonces, si $0 < \ell = L(C) < \infty$, existe una única parametrización regular a trozos $\beta : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que parametriza a C con el mismo sentido, de manera que $\|\beta'(s)\| = 1$ para todo $s \in [0, \ell]$. Es decir, β es una reparametrización por longitud de arco de α . Además si α es de clase C^k entonces β lo es ($k \in \mathbb{N}$).

Existe también una reparametrización $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con rapidez constante (es decir $\|\gamma'(s)\| = \ell = L_0^\ell(\beta)$).

Demostración. Basta probar la afirmación para una curva regular, haciendo la prueba en cada intervalo de regularidad. Entonces tenemos que $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización regular de C . En particular, $\|\dot{\alpha}(t)\| > 0$ para todo $t \in (a, b)$. Sea $\ell = L_a^b(C)$. Vamos a reparametrizar C entre $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$. Definimos $d : [a, b] \rightarrow [0, \ell]$ como

$$d(t) = \int_a^t \|\dot{\alpha}(x)\| dx, \text{ para } t \in [a, b].$$

Observemos que esta integral existe para todo $t \in [a, b]$ ya que α es regular (en particular $\alpha \in C^1$, ver (1.1.1)). Como $\dot{d}(t) = \|\dot{\alpha}(t)\| > 0$, d es estrictamente creciente, y como $d(a) = 0$, $d = \ell$, d es biyectiva. Además, por el teorema de la función inversa, $d^{-1} : [0, \ell] \rightarrow [a, b]$ es derivable y

$$(d^{-1})'(d(t)) = \frac{1}{\dot{d}(t)} = \frac{1}{\|\dot{\alpha}(t)\|} \quad \forall t \in (a, b) \quad (1.6)$$

(ver (1.3)).

Consideramos $\beta : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\beta(s) = (\alpha \circ d^{-1})(s)$ donde usamos s para la variable que vive en $[0, \ell]$, y reservamos t para la variable que vive en $[a, b]$. Notemos que $s = d(t)$, mientras que $d^{-1}(t) = s$ con esta notación.

Claramente, como d^{-1} recorre $[a, b]$ cuando s recorre $[0, \ell]$, $\beta = \alpha \circ d^{-1}$ recorre la imagen de α , es decir C , entre $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$. Como además $d^{-1} \in C^1$ ya que $\dot{d} = \|\dot{\alpha}\|$ es continua (ver (1.1.5)) y $\dot{d} \neq 0$, también es claro que β es suave en el interior del intervalo, por ser composición de funciones suaves. Veamos que β es una parametrización con velocidad unitaria. Para ello, derivamos

$$\beta'(s) = \frac{d}{ds} (\alpha(d^{-1}(s))) = \dot{\alpha}(d^{-1}(s)) (d^{-1})'(s)$$

mediante la regla de la cadena. Es decir, recordando que $s = d(t)$ y la fórmula de la derivada de la inversa (1.6), resulta que

$$\beta'(s) = \dot{\alpha}(t) \frac{1}{\|\dot{\alpha}(t)\|}.$$

Tomando normas y recordando que $V/\|V\|$ es siempre un vector unitario, se tiene que $\|\beta'(s)\| = 1$ para todo $s \in (0, \ell)$, que nos dice que β está p.x.l.a. Además si α es C^k , entonces d es C^k y el teorema de la función inversa nos dice que d^{-1} también, luego $\beta = \alpha \circ d^{-1}$ es C^k .

Para ver la unicidad, notemos que si $\gamma : [0, K] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es otra reparametrización con rapidez 1, debe ser $\gamma(u) = \alpha \circ \varphi(u)$ para alguna $\varphi : J \rightarrow [0, K]$ estrictamente creciente (tiene el mismo sentido). Equivalentemente $\varphi'(u) > 0$. Entonces $1 = \|\dot{\gamma}(u)\| = \varphi'(u)\|\dot{\alpha}(\varphi(u))\|$ así que $\varphi'(u) = \|\dot{\alpha}(\varphi(u))\|^{-1}$ lo que nos dice que φ es solución de la misma ecuación diferencial que d^{-1} . Como $\varphi(0) = a = d^{-1}(0)$, por la unicidad de las soluciones debe ser $\varphi = d$, y además $d^{-1}(K) = \varphi(K) = b = d^{-1}(\ell)$ luego $K = \ell$.

Para reparametrizar con rapidez constante en el intervalo $[0, 1]$, tomamos $\gamma(s) = \beta(s\ell)$. definida claramente en $[0, 1]$ y además $\gamma'(s) = \beta'(s\ell)\ell$ luego $\|\gamma'(s)\| = \ell\|\beta'(s\ell)\| = \ell \cdot 1 = \ell$. \square

Observación 1.2.9. En general es falso que si α es una curva regular, y β (su reparametrización por longitud de arco) es de clase C^k ($k \geq 2$), entonces α era C^k . Por ejemplo consideremos $\alpha(t) = (t^{5/3} + t, 0)$ con $t \in \mathbb{R}$, entonces $\dot{\alpha}(t) = (5/3t^{2/3} + 1, 0)$ que es regular, pero no es C^2 . Sin embargo, es claro (y puede el lector verificarlo) que al reparametrizar α por longitud de arco obtenemos $\beta(s) = (s, 0)$, que es de clase C^∞ .

1.2.2. Rectificación (de un arco)

En esta sección vamos a dar una idea geométrica más precisa de por qué la longitud de arco se mide integrando la rapidez de una curva -más explícita aún que esa idea que relaciona la distancia con la integral de la velocidad-. Para ello recordamos primero dos resultados del cálculo:

Teorema 1.2.10. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva regular, con $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ y consideremos $a \leq s < t \leq b$. Entonces existen $c_x, c_y \in (s, t)$ tales que

$$\alpha(t) - \alpha(s) = (x(t) - x(s), y(t) - y(s)) = (x'(c_x), y'(c_y))(t - s).$$

Demostración. Basta aplicar el teorema del valor medio de Lagrange a las funciones $x, y : [s, t] \rightarrow \mathbb{R}$. Este teorema, recordemos, dice que si $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y derivable en el interior, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

\square

Teorema 1.2.11. Si $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, y $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$ es una partición de $[a, b]$, entonces para cualquier elección de $c_i \in (t_i, t_{i+1})$, se tiene

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(c_i)(t_{i+1} - t_i) \longrightarrow \int_a^b g$$

cuando refinamos la partición y hacemos tender la distancia entre los t_i a cero (haciendo tender $n \rightarrow \infty$).

Tomemos ahora una curva regular C parametrizada por $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Una primera y muy burda aproximación a su longitud, es considerar $\ell = \|\alpha(b) - \alpha(a)\|$. Observemos que mientras menos curvada esté C , más precisa es esta aproximación. Si queremos mejorar la aproximación, podemos tomar algún punto intermedio $t_1 \in (a, b)$ y considerar

$$\ell \simeq \|\alpha(t_1) - \alpha(a)\| + \|\alpha(b) - \alpha(t_1)\|.$$

Esta sigue siendo inexacta, pero mejora la anterior. Se puede observar gráficamente (ver la Figura 1.6) que tomando una partición $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$ y considerando la suma de longitudes de segmentos

$$\ell \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\|$$

se obtiene una aproximación que mejora a medida que n crece.

Veamos que esta cantidad tiende a $L_a^b(\alpha)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Esto justificaría plenamente la definición que dimos para $L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'\|$. Observemos que cuando refinamos la partición, como $c_{x_i}, c_{y_i} \in (t_i, t_{i+1})$, podemos suponer al pasar al límite que $c_{x_i} = c_{y_i} = c_i$ para todo i (esta afirmación la justificamos al final de la discusión). Luego

$$\ell \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| = \sum_{i=0}^{n-1} \|\alpha'(c_i)\| (t_{i+1} - t_i) \quad (1.7)$$

apelando al Teorema del valor medio de Lagrange (Teorema 1.2.10). Refinando la partición y tomando límite, obtenemos

$$\sum_{i=0}^{n-1} \|\alpha'(c_i)\| (t_{i+1} - t_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds$$

recordando las sumas de Riemann (Teorema 1.2.11), aplicadas a la función real dada por $g(s) = \|\alpha'(s)\|$.

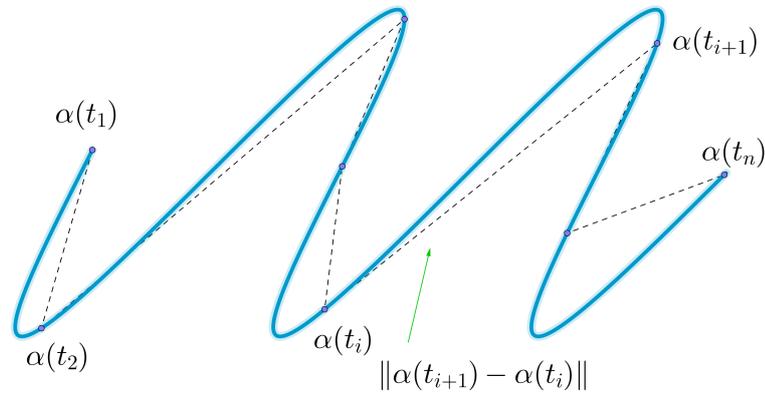


Figura 1.6: Longitud de una poligonal para aproximar la longitud de una curva

Para justificar rigurosamente el paso (1.7) de la discusión de arriba, notamos que como estamos suponiendo que α es de clase C^1 , y denotando $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$, podemos encontrar una partición suficientemente pequeña tal que

$$\left| \left\| \frac{\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)}{\Delta_i} \right\| - \|\dot{\alpha}(c_i)\| \right| < \varepsilon \quad (1.8)$$

para todo $c_i \in \Delta_i$. Esto permite comparar cualquier suma de longitudes sobre particiones, con cualquier suma de Riemann de la integral.

Hemos probado que el número $L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'\|$ representa en efecto la longitud de la curva C parametrizada por α , pensada como límite de sumas de longitudes de segmentos que la aproximan. Este proceso se conoce como *rectificación del arco*.

Observación 1.2.12. Si $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva continua, podemos definir su integral coordenada a coordenada, obteniendo así una nueva curva $t \mapsto \int_{t_0}^t \beta(t) dt$ (ver el Ejercicio 1.3.21). En particular

$$\|\alpha(b) - \alpha(a)\| = \left\| \int_a^b \dot{\alpha}(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt$$

en cualquier intervalo, y entonces para cualquier partición $\{t_i\}_i$ del intervalo $[a, b]$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{\alpha}(t)\| dt = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt = L_a^b(\alpha).$$

Entonces el proceso de rectificación siempre aproxima *por debajo* el número que definimos como longitud de la curva, $L_a^b(\alpha)$. Se deduce también que si definimos $\ell(\alpha)$ como el supremo sobre todas las particiones,

$$\ell(\alpha) = \sup_{\pi} \sum_i \text{dist}(\alpha(t_i), \alpha(t_{i+1}))$$

debe ser $\ell(\alpha) \leq L(\alpha)$. Notemos que el número $\ell(\alpha)$ puede definirse aunque α no sea de clase C^1 (basta en realidad que α sea *absolutamente continua*).

Problema 1.2.13. Dejamos como ejercicio ver que, usando (1.8), se tienen $\ell(\alpha) = L(\alpha)$ cuando la curva es de clase C^1 a trozos.

1.3. Unicidad de curvas cortas (minimizantes) en el espacio Euclídeo

Para terminar el capítulo inicial de curvas, probaremos que la distancia entre dos puntos de \mathbb{R}^n se realiza únicamente con el segmento que une los extremos.

Definición 1.3.1. Definimos la *distancia entre dos puntos* como el ínfimo de las longitudes de las curvas que unen dos puntos dados. Una curva es *corta* (también *minimizante*, *minimal*) si su longitud es igual a la distancia entre los extremos. Es decir, si el ínfimo es un mínimo y se realiza en dicha curva.

Sean $P, Q \in \mathbb{R}^2$ y sea $s(t) = t(Q - P) + P$, definido en el intervalo $[a, b] = [0, 1]$; notar que $s(1) = Q, s(0) = P$. Esta curva se denomina *segmento que une P con Q*, es un segmento de la recta generada por P y Q , y tiene longitud $\|P - Q\|$.

Teorema 1.3.2. El segmento $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $s(t) = P + t(Q - P)$ es la única curva corta que une los puntos $P, Q \in \mathbb{R}^n$, con longitud $\|P - Q\| = \text{dist}(P, Q)$.

Demostración. Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco. Consideramos un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y $\alpha(a) = P$ y $\alpha(b) = Q$. Para todo vector V vale

$$\langle Q - P, V \rangle = \int_a^b \langle \dot{\alpha}(t), V \rangle dt \leq \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt \|V\|$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz $\langle W, V \rangle \leq \|W\| \|V\|$. Tomamos $V = \frac{Q-P}{\|Q-P\|}$ en la desigualdad anterior, $\|V\| = 1$ y entonces

$$\|Q - P\| \leq L_a^b(\alpha).$$

Como α era cualquier curva que unía P con Q , se deduce que la curva con menor longitud de arco que une los puntos $P = \alpha(a)$ con $Q = \alpha(b)$ es la línea recta, y por eso $\text{dist}(P, Q) = \|Q - P\|$.

Ahora veamos que es la única curva: si hubiera una distinta, $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha(a) = P, \alpha(b) = Q$, tomamos $t \in (a, b)$ y consideramos el segmento s_1 que une P con $\alpha(t) = R$, seguido del segmento s_2 que une $R = \alpha(t)$ con Q . Entonces

$$\|P - Q\| \leq \|P - R\| + \|R - Q\| = L(s_1) + L(s_2) \leq L_0^s(\alpha) + L_s^1(\alpha) = L_0^1(\alpha) = \|P - Q\|.$$

Entonces $\|P - Q\| = \|P - R\| + \|R - Q\|$ y esto sólo es posible si P, Q, R están alineados (Ejercicio 1.3.22), o equivalentemente $\alpha(t) = R$ está en el segmento que une P, Q . Luego la imagen de α coincide con la del segmento, y entonces α es una reparametrización del segmento. □

Nota bibliográfica 1. La noción de arco rectificable que discutimos en este capítulo combina las ideas clásicas del cálculo infinitesimal (definiendo primero la longitud como la integral de la rapidez de la curva), con la fundamentación geométrica de esta definición que explicamos luego, que es más cercana al tratamiento de las curvas en espacios métricos. Para el primer enfoque un texto clásico (además del inevitable libro de Do Carmo [3]) es el libro de Struik [18] que aborda los temas con un lenguaje tal vez no tan moderno pero muy intuitivo. Sobre el segundo enfoque, uno de los textos fundamentales que recomendamos es el libro de Burago, Burago e Ivanov [2]. Allí puede verse explicada con más detalle la noción de longitud de curva en un espacio métrico, y la geometría que puede desarrollarse con esos elementos.

1.3.1. Ejercicios

1.3.12. Hallar una parametrización por longitud de arco de:

- a) una hélice b) la espiral logarítmica, c) la tractriz.

1.3.13. Probar que si todas las rectas tangentes a una curva C son paralelas a una recta dada L , entonces la curva C en cuestión es una recta (se puede suponer que C está parametrizada por longitud de arco).

1.3.14. Un disco circular de radio 1 rueda en el plano xy sin resbalar sobre el eje x . La figura descrita por un punto fijo sobre la circunferencia del disco se llama *cicloide*,

1. Probar que $\alpha(t) = (t - \text{sen}(t), 1 - \text{cos}(t))$ para $t \in [0, 2\pi]$ es una cicloide.
2. Hacer un gráfico aproximado y calcular $L_0^{2\pi}(\alpha)$ (ayuda: $\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} dt = 4$).
3. Calcular el área encerrada por la curva α y el eje de las x usando el Teorema de Green.

1.3.15. Dados los planos $\pi_1 : x + y + z = 0$, $\pi_2 : x - y - z = 0$, hallar las normales N_1, N_2 de ambos planos y hallar la recta intersección $L = \pi_1 \cap \pi_2$ de ambos planos. Probar que el vector director V de la recta L se puede obtener como $V = N_1 \times N_2$ y explicar gráfica, geoméricamente este hecho en general (no sólo para estos dos planos, sino para cualquier par de planos por el origen).

1.3.16. Si $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 , recordar que el vector normal a la superficie de nivel $S = \{F(x, y, z) = cte\}$ está dado por $N(x, y, z) = \nabla F(x, y, z)$. Calcular el plano tangente a $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en el punto $P = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.

1.3.17. Sea $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera unitaria de \mathbb{R}^3 , sean $M_1 = \{z = 0\}$, $M_2 = \{y = 0\}$, $M_3 = \{z = x^2 + y^2\}$ tres superficies.

- Representar gráficamente $S^2 \cap M_i$ para $i = 1, 2, 3$.
- Calcular un vector tangente a la curva $C_i = S^2 \cap M_i$ para $i = 1, 2, 3$, representar gráficamente.
- Calcular los vectores normales a S^2 y a M_1 en el punto $P = (1, 0, 0)$ y probar que su producto vectorial es tangente a C_1 en P .

1.3.18. Dadas dos funciones $F, G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, probar que un vector tangente a la curva en \mathbb{R}^3 definida por

$$(F(x, y, z) = 0) \cap (G(x, y, z) = 0)$$

es $\mathbf{t} = \nabla F \times \nabla G$.

1.3.19. Probar que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está contenida en una esfera con centro en el origen si y sólo si $\alpha'(t)$ es ortogonal a $\alpha(t)$ para todo $t \in I$.

1.3.20. Si α es una curva con $\|\alpha'(t)\| = cte$, probar que $\alpha''(t)$ es siempre ortogonal a $\alpha'(t)$.

1.3.21. Dada una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, definimos $W = \int_a^b \alpha \in \mathbb{R}^2$ como el vector constante que se obtiene al integrar cada coordenada, es decir

$$\int_a^b \alpha(t) dt = \left(\int_a^b x(t) dt, \int_a^b y(t) dt \right).$$

- Probar que $\int_a^b k\alpha = k \int_a^b \alpha$ para toda constante $k \in \mathbb{R}$.
- Probar que si $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es otra curva, entonces $\int_a^b (\alpha + \beta) = \int_a^b \alpha + \int_a^b \beta$.
- Probar que para todo $V \in \mathbb{R}^2$, vale $\langle \int_a^b \alpha(t) dt, V \rangle = \int_a^b \langle \alpha(t), V \rangle dt$.
- Probar que $\|\int_a^b \alpha(t) dt\| \leq \int_a^b \|\alpha(t)\| dt$.

e) Probar que $\int_a^b \dot{\alpha}(t) dt = \alpha(b) - \alpha(a)$.

1.3.22. Probar que si $P, Q, R \in \mathbb{R}^n$ verifican $\|P - Q\| = \|P - R\| + \|R - Q\|$, entonces P, Q, R están alineados y además Q está en el segmento que une P con Q .

2 CURVATURA: CURVAS PLANAS

Todo cambio en la dirección de movimiento involucra una aceleración.

Sir Isaac Newton

En esta sección queremos estudiar cuánto *dobla* una curva concreta en el plano, y dar un número real (que sea un invariante de la curva en cada punto) que represente esta noción geométrica. Inicialmente y por una consideración intuitiva, queremos que las rectas tengan curvatura nula, y las circunferencias curvatura constante.

2.1. Círculo osculador

Comenzamos definiendo la curvatura κ_L de una recta $L \subset \mathbb{R}^2$ cualquiera como $\kappa_L = 0$. Ahora vamos a definir la curvatura κ_C de una circunferencia $C \subset \mathbb{R}^2$ de radio R como $\kappa_C = 1/R$. Observemos que a mayor radio, menor la curvatura y viceversa. Una circunferencia muy pequeña está muy curvada, y una recta puede entenderse como el caso límite de una circunferencia "de radio infinito". Veremos que estos son los dos únicos casos de curvas con curvatura constante, es decir, cuya curvatura no depende del punto.

Para el caso de una curva cualquiera $C \subset \mathbb{R}^2$, y un punto $P \in C$, vamos a definir la curvatura $\kappa(P)$ como $1/R_P$ donde R_P es el radio de la circunferencia que mejor aproxima C en el punto P . Esta circunferencia se conoce como *círculo osculador* de la curva.

Para definir "que sea la que mejor aproxima" observamos que toda circunferencia se puede recorrer con una parametrización

$$c(s) = (R \cos(s/R), R \sin(s/R)) + Q$$

donde R es el radio y Q es el centro (notar que esta es una parametrización

por longitud de arco de la circunferencia, lo cual hace esencialmente únicas sus derivadas primera y segunda). Supongamos que la circunferencia toca la curva parametrizada por $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ en el punto $P = \alpha(t)$. Es decir, que existe $s \in [0, 2\pi)$ tal que $c(s) = \alpha(t)$. Supongamos también que la circunferencia es tangente a la curva, es decir $c'(s)$ es un múltiplo de $\dot{\alpha}(t)$. Si suponemos que α está parametrizada por longitud de arco, se deduce que debe ser $c'(s) = \dot{\alpha}(t)$. Esto por ahora no aporta información sobre el radio $R = R_P$ que estamos buscando, pues hay infinitas circunferencias con esta propiedad (ver Figura 2.1).

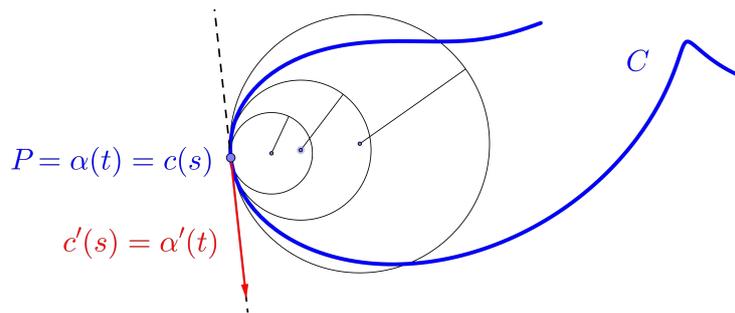


Figura 2.1: Cada $P = \alpha(t)$ de la curva C tiene infinitas circunferencias tangentes.

Vamos a pedir que la circunferencia aproxime a la curva a *segundo orden* es decir, que $c''(s) = \ddot{\alpha}(t)$. Se tiene entonces

$$c''(s) = 1/R(-\cos(s/R), -\sin(s/R)) = \ddot{\alpha}(t),$$

lo que nos dice que $1/R = \|\ddot{\alpha}(t)\|$. La enseñanza de esta cuenta sencilla es que:

Si α está parametrizada por longitud de arco, entonces $\kappa_\alpha(P) = \|\ddot{\alpha}(t)\| = 1/R_P$, donde $P = \alpha(t)$, y R_P es el radio de la única circunferencia que aproxima a segundo orden a la curva α en P .

Dejamos como ejercicio para el lector hallar una fórmula explícita para el círculo osculador a la curva α en el punto $P = \alpha(t)$, suponiendo que α está p.x.l.a.

Adoptamos la notación $\kappa_\alpha(t) = \|\ddot{\alpha}(t)\|$, y como la parametrización por longitud de arco es esencialmente única salvo el signo u orientación, podemos decir que $\kappa_C(t) = \|\ddot{\alpha}(t)\|$ indica la curvatura de la curva C en el punto $P = \alpha(t)$, donde α es la parametrización por longitud de arco de C . Observemos que esta definición es consistente con lo ya discutido: si tenemos una recta, la derivada segunda (parametrizando por longitud de arco) es nula, luego la curvatura es

nula; si tenemos una circunferencia de radio R , la derivada segunda se obtiene según la fórmula anterior y claramente la curvatura es constante $= 1/R$.

Lo que queremos hacer ahora es obtener una fórmula general, que nos diga cuánto vale κ_C en el punto $P = \alpha(t)$ cuando α es *cualquier parametrización regular* de C . Obviamente, queremos que no dependa de la parametrización, ya que la curvatura la definimos como algo intrínseco. Y por supuesto, queremos que cuando la curva está parametrizada por longitud de arco, recuperemos la fórmula sencilla previa.

Estas necesidades nos muestran la línea de pensamiento para obtener la fórmula general: comenzamos con una parametrización regular cualquiera $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la curva C . Existe entonces una parametrización $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la misma curva, pero ahora β es una p.x.l.a., ciertamente $P = \alpha(t) = \beta(s)$ para algún par de números $t \in I, s \in J$. La discusión previa nos muestra que $\kappa_C(P) = \|\beta''(s)\|$, lo que queremos ahora es dar una fórmula usando la parametrización que si tenemos, que es α .

Recuperando el argumento de la Sección 1.2.1, tenemos que $\beta(s) = \alpha \circ d^{-1}(s)$, luego $\beta'(s) = \dot{\alpha}(d^{-1}(s))(d^{-1})'(s) = \dot{\alpha}(d^{-1}) \frac{1}{\|\dot{\alpha}(d^{-1})\|}$ donde omitimos la variable s por comodidad. Ahora derivamos nuevamente para obtener

$$\beta''(s) = \ddot{\alpha}(d^{-1}) \frac{1}{\|\dot{\alpha}(d^{-1})\|^2} + \dot{\alpha}(d^{-1}) \frac{(-1)}{\|\dot{\alpha}(d^{-1})\|^2} \frac{1}{\|\dot{\alpha}(d^{-1})\|} \left\langle \dot{\alpha}(d^{-1}), \ddot{\alpha}(d^{-1}) \frac{1}{\|\dot{\alpha}(d^{-1})\|} \right\rangle$$

donde utilizamos la fórmula de la derivada de la norma (1.1.10) y la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt} \dot{\alpha}(d^{-1}) = \ddot{\alpha}(d^{-1}) \frac{1}{\|\dot{\alpha}(d^{-1})\|}.$$

Como $d^{-1}(s) = t$ podemos omitir d^{-1} (recordando luego que β y sus derivadas se evalúan en s , mientras que α y sus derivadas se evalúan en t). Tenemos entonces

$$\beta'' = \frac{\ddot{\alpha}}{\|\dot{\alpha}\|^2} - \frac{\dot{\alpha}}{\|\dot{\alpha}\|^4} \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle. \quad (2.1)$$

Sabemos que la curvatura de C en $P = \beta(s)$ es igual a $\kappa_\beta(s) = \|\beta''(s)\|$ por ser β una parametrización por longitud de arco de C . Como $P = \alpha(t)$, podemos calcular la curvatura de C en este punto usando la fórmula de arriba, que utiliza únicamente α y sus derivadas. Es decir

$$\kappa_C(P) = \kappa_\alpha(t) = \left\| \frac{\ddot{\alpha}}{\|\dot{\alpha}\|^2} - \frac{\dot{\alpha}}{\|\dot{\alpha}\|^4} \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle \right\|.$$

Vamos a reordenar esta expresión para obtener una fórmula más compacta. Ele-

vando al cuadrado:

$$\begin{aligned}
 \kappa_\alpha^2(t) &= \frac{1}{\|\dot{\alpha}\|^8} \left\| \ddot{\alpha} \|\dot{\alpha}\|^2 - \dot{\alpha} \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle \right\|^2 \\
 &= \frac{1}{\|\dot{\alpha}\|^8} \left(\|\ddot{\alpha}\|^2 \|\dot{\alpha}\|^4 + \|\dot{\alpha}\|^2 \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle^2 - 2 \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle^2 \|\dot{\alpha}\|^2 \right) \\
 &= \frac{1}{\|\dot{\alpha}\|^6} \left(\|\ddot{\alpha}\|^2 \|\dot{\alpha}\|^2 - \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle^2 \right).
 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{1}{\|\dot{\alpha}\|^3} \sqrt{\|\ddot{\alpha}\|^2 \|\dot{\alpha}\|^2 - \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle^2}. \quad (2.2)$$

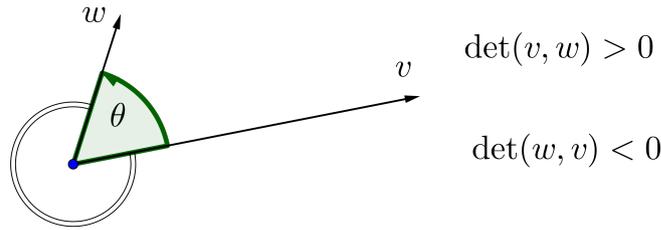
Esta es la primera versión de la fórmula para la curvatura de una curva regular a trozos. El lector puede verificar que cuando α está parametrizada por longitud de arco, se reduce a la expresión original $\kappa_\alpha = \|\ddot{\alpha}\|$.

2.1.1. Orientación, área orientada

En esta sección vamos a introducir la noción de orientación y área orientada, una idea geométrica relevante que nos permitirá entre otras cosas darle un signo a la curvatura (que dependerá de para qué lado está curvándose la curva en cada instante) y obtener otras fórmulas equivalentes a (2.2) para κ .

Definición 2.1.1. Dada una base de vectores $\{v, w\}$ en \mathbb{R}^2 , diremos que la base está orientada *positivamente* si $\det(v, w) > 0$, y que está orientada *negativamente* si $\det(v, w) < 0$. Notar que la orientación de la base $\{v, w\}$ es opuesta a la orientación de $\{w, v\}$, es decir, estamos tomando bases *orientadas*.

Definimos el *ángulo entre los vectores* v y w como el único $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \theta$. De los dos ángulos posibles formados en el plano que determinan v y w , θ siempre es el menor de ellos o bien $\theta = \pi$. Observar que en el caso en el que v, w son l.i., debe ser $0 < \theta < \pi$. El lector puede verificar con ejemplos que la orientación de $\{v, w\}$ es positiva si el ángulo medido desde v hasta w es positivo (en contra del reloj), mientras que es negativa si el ángulo medido desde v hasta w es negativo (a favor del reloj).



Una base orientada nos permite introducir la noción de área orientada. Esto es, el área orientada es el área del paralelogramo generado por v, w con un signo acorde a la orientación de la base $\{v, w\}$. Así por ejemplo el área orientada generada por $v = (1, 0), w = (0, 1)$ es $= 1$ mientras que el área orientada generada por $v = (1, 1), w = (1, -1)$ es $= -2$.

Veamos una manera práctica de calcular esta área, con su signo. Vamos a denotar con $\mu(\Omega)$ a la medida de un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (es decir, al área).

Proposición 2.1.2. Sean $v, w \in \mathbb{R}^2$. Sea R el paralelogramo generado por v, w . Entonces

$$\pm \det(v, w) = \mu(R) = \|v\| \|w\| \sin \theta = \sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2}$$

donde el signo es positivo si $\{v, w\}$ es una base orientada positivamente y negativo en caso contrario.

Demostración. Probaremos primero las fórmulas

$$\mu(R) = \|v\| \|w\| \sin \theta = \sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2} \quad (2.3)$$

para el área de un paralelogramo. La primera es consecuencia de que esta área se calcula como el producto de la base del paralelogramo (que podemos suponer que es $\|v\|$) por la altura h del mismo. Como $\sin \theta = h/\|w\|$ (cateto opuesto sobre hipotenusa) se deduce que $h = \|w\| \sin \theta$ lo que prueba la primera identidad $\mu(R) = \|v\| \|w\| \sin \theta$. Por otra parte, como $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \theta$, se tiene

$$\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|v\|^2 \|w\|^2 \sin^2 \theta.$$

Como $\sin \theta$ es positivo para $\theta \in [0, \pi]$, se tiene la segunda igualdad en (2.3).

Probaremos ahora la primer fórmula $\det(v, w) = \pm \mu(R)$, para el caso en el que v, w están en el primer cuadrante y orientados positivamente. Permutando v, w se obtiene el otro signo, y el caso general tiene una prueba similar, cuidando los signos de las coordenadas, que omitimos. Denotamos $v = (a, b), w = (c, d)$ con

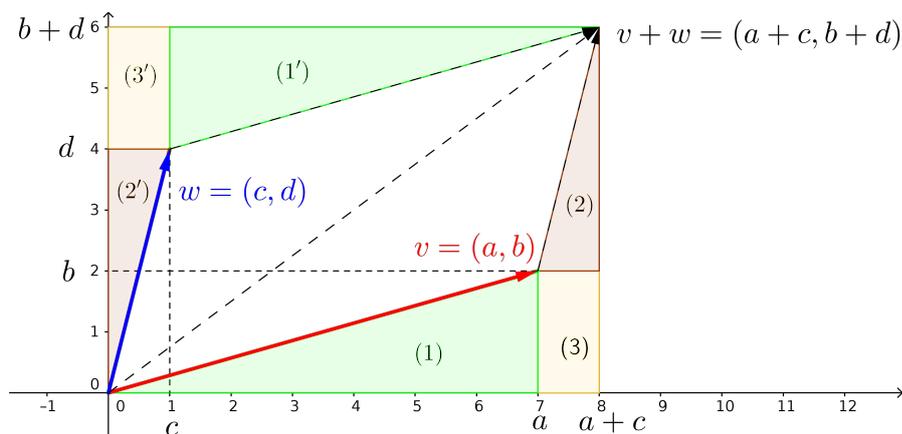


Figura 2.2: Relación entre área y determinante

$a, b, c, d \geq 0$, claramente $v + w = (a + c, b + d)$. Luego el dibujo del paralelogramo nos indica cómo calcular el área (Figura 2.2). Se tiene

$$\mu(R) = \mu([a + c] \times [b + d]) - \mu(1) - \mu(2) - \mu(3) - \mu(1') - \mu(2') - \mu(3').$$

donde $[a + c] \times [b + d]$ es el rectángulo de lados paralelos a los ejes que contiene al paralelogramo R , y en la figura se observa que por simetría, el área del triángulo (1) coincide con la del triángulo (1'), la del (2) con la del (2'), y la del rectángulo (3) con la del (3'). Luego

$$\mu(R) = (a + c)(b + d) - 2\mu(1) - 2\mu(2) - 2\mu(3).$$

Como $\mu(1) = ab/2$, $\mu(2) = cd/2$, $\mu(3) = bc$, obtenemos

$$\mu(R) = ad - bc = \det(v, w). \quad \square$$

Este resultado nos permite afirmar que el número $\det(v, w)$ es el *área orientada* del paralelogramo generado por v, w . Notar que aún en el caso en el que v, w sean l.d., la fórmula tiene sentido ya que en ese caso el área es nula.

Observación 2.1.3. Alternativamente, podemos vincular las fórmulas recién enunciadas mediante las propiedades del determinante:

$$\begin{aligned} \det(v, w)^2 &= \det \begin{pmatrix} v & - \\ w & - \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} v & w \\ | & | \end{pmatrix} = \det \left[\begin{pmatrix} v & - \\ w & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & w \\ | & | \end{pmatrix} \right] \\ &= \det \begin{pmatrix} v^t v & v^t w \\ w^t v & w^t w \end{pmatrix} = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2. \end{aligned}$$

Definición 2.1.4. Definimos ahora los *vectores tangente y normal unitario* a una curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Para ello, definimos el vector *tangente unitario* en el punto $P = \alpha(s)$ como

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}.$$

Definimos el vector *normal unitario* $\mathbf{n}(s)$ en ese punto $\alpha(s)$ como el único vector unitario tal que $\mathbf{T}(s) = \{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^2 , orientada positivamente.

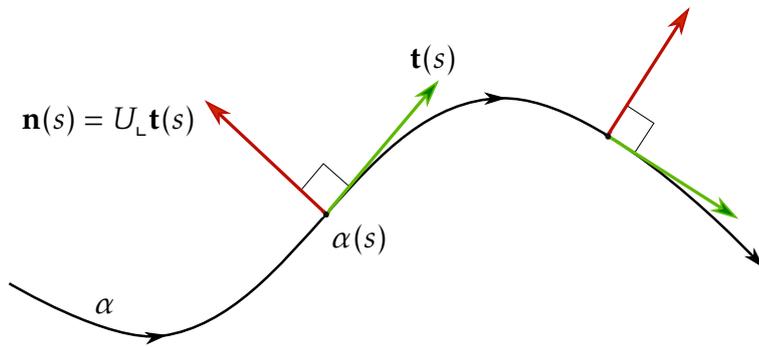


Figura 2.3: Vectores tangente y normal unitarios

Observación 2.1.5. Sea $U_{\perp} \in M_2(\mathbb{R})$ la matriz ortogonal dada por

$$U_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notamos que $U_{\perp}^2 = -1$ (equivalentemente $U_{\perp}^t = U_{\perp}^{-1} = -U_{\perp}$), y $U_{\perp}(x, y) = (-y, x)$. Es inmediato entonces que U_{\perp} que preserva la orientación, de hecho U_{\perp} es la rotación en sentido positivo (antihorario) de ángulo $\pi/2$. Entonces para todo $s \in I$,

$$\mathbf{n}(s) = U_{\perp} \mathbf{t}(s) \quad \text{y} \quad \mathbf{t}(s) = -U_{\perp} \mathbf{n}(s).$$

Luego si α es regular, \mathbf{t} es continua y también \mathbf{n} es continua. De hecho, es claro que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\alpha \in C^{k+1}(I) \iff \mathbf{t} \in C^k(I) \iff \mathbf{n} \in C^k(I).$$

2.1.2. Curvatura orientada

Definición 2.1.6. Definimos, para $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regular y dos veces derivable, su *curvatura signada* como

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{1}{\|\dot{\alpha}\|^3} \det(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = \frac{1}{\|\dot{\alpha}\|^3} \begin{vmatrix} - & \dot{\alpha} & - \\ - & \ddot{\alpha} & - \end{vmatrix} = \frac{1}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3} (\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)).$$

Observación 2.1.7. Notamos que esta fórmula es equivalente a la fórmula obtenida en (2.2) gracias a la Proposición 2.1.2, con un agregado: la curvatura en \mathbb{R}^2 tiene ahora un signo. Este signo nos indica si la parametrización α recorre la curva en sentido horario o antihorario en el punto en cuestión. Esto viene determinado por la relación entre $\dot{\alpha}(t)$ y su derivada $\ddot{\alpha}(t)$ como se ve en la Figura 2.4.

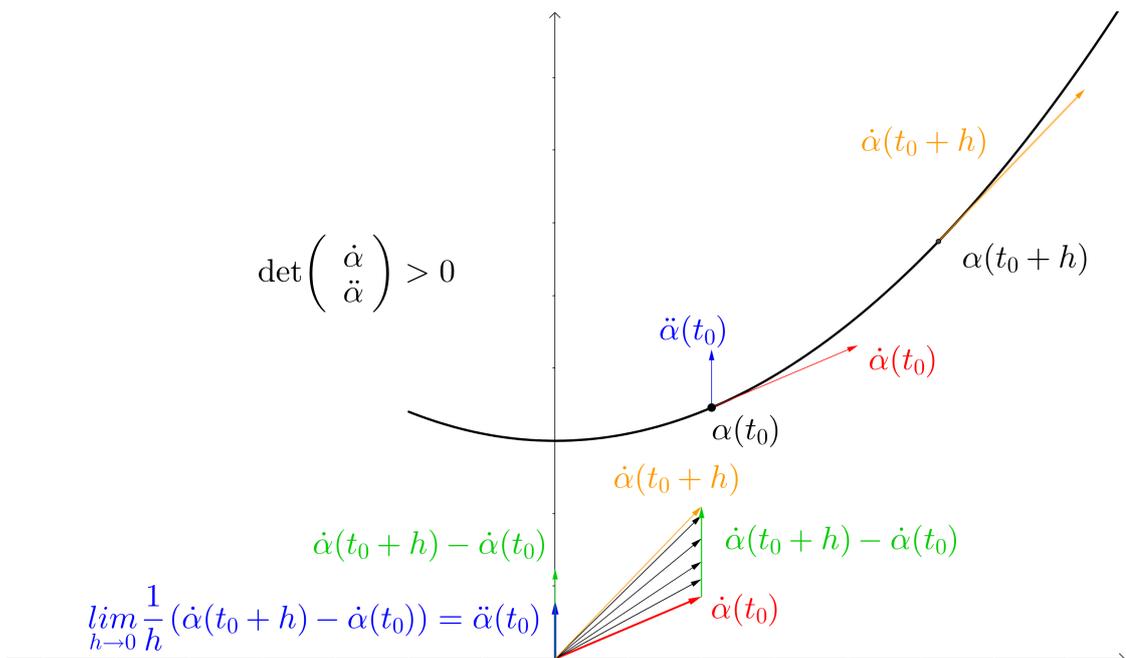


Figura 2.4: Relación entre derivada primera, segunda y curvatura de α

Ejemplo 2.1.8. La circunferencia unitaria parametrizada con

$$\alpha(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$$

tiene curvatura constante $\kappa = 1$ con esta parametrización, mientras que si reparametrizamos en el sentido opuesto (horario) usando

$$\beta(t) = (\cos(-t), \text{sen}(-t)) = (\cos(t), -\text{sen}(t)),$$

el lector puede verificar que $\kappa = -1$.

Veamos algunas relaciones útiles entre la curva, su curvatura y sus vectores tangente y normal:

Lema 2.1.9. Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es regular y C^2 (resp. C^k , $k \geq 3$), entonces κ es continua (resp. C^{k-2}). Si α está p.x.l.a. y es dos veces derivable, entonces

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa_\alpha(s)\mathbf{n}(s),$$

y además si κ es continua (resp. C^k , $k \geq 1$) entonces α es C^2 (resp. C^{k+2}).

Demostración. Si $U_\perp \in M_2(\mathbb{R})$ es la rotación positiva de ángulo recto dada por la matriz de la Observación 2.1.5, entonces de la definición de curvatura signada 2.1.6 se deduce que

$$\kappa_\alpha(s) = \frac{1}{\|\alpha'(s)\|^3} \langle \alpha''(s), U_\perp \alpha'(s) \rangle.$$

Luego si α es de clase C^2 , obtenemos que $\kappa_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, y también que si α es C^k , que κ_α es C^{k-2} .

Ahora supongamos que α está p.x.l.a. Entonces $\alpha'' \perp \alpha' = \mathbf{t}$, luego para todo $s \in I$ existe $A(s)$ tal que $\mathbf{t}'(s) = \alpha''(s) = A(s)\mathbf{n}(s)$, y debe ser

$$A(s) = \langle \alpha''(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \alpha''(s), U_\perp \mathbf{t}(s) \rangle = \langle \alpha''(s), U_\perp \alpha'(s) \rangle = \kappa_\alpha(s).$$

Esto nos dice que $\mathbf{t}'(s) = \kappa_\alpha(s)\mathbf{n}(s)$ como queríamos probar.

Por último, supongamos que κ_α es continua y que α está p.x.l.a., entonces por lo recién probado

$$\alpha'' = \mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n} = \kappa U_\perp \mathbf{t} = \kappa U_\perp \alpha',$$

y como α es dos veces derivable en particular α' es continua y entonces α'' es continua, o sea α es C^2 . Si κ es C^1 entonces en particular es continua luego α es

C^2 , pero entonces α' es C^1 y como el producto de funciones C^1 es de clase C^1 , entonces la última ecuación nos dice que α'' es C^1 , o sea α es C^3 . Razonando inductivamente de esta misma manera, se obtiene que la regularidad de α es dos veces más que la de κ . \square

§ En general, puede no ser cierto que una curva con curvatura continua sea de clase C^2 . Esto es porque su reparametrización por longitud de arco sí será C^2 (de acuerdo a lo recién probado) pero α puede ser sólo regular y dos veces derivable -considerar una variación del ejemplo en la Observación 1.2.9-. Sin embargo el lema nos dice que si α es regular y dos veces derivable, y su curvatura es continua, entonces su reparametrización por longitud de arco será C^2 .

Veremos más adelante que esta sutileza de otorgarle un signo a la curvatura sólo tiene sentido para curvas en \mathbb{R}^2 , ya que en \mathbb{R}^3 dependiendo de que lado miremos la curva, esta se recorre en sentido horario o antihorario, es decir la orientación de una curva no está bien definida en \mathbb{R}^3 ya que depende del observador.

Observación 2.1.10. Tomemos una función real f , y consideremos su gráfica $Gr(f)$ recorrida de izquierda a derecha con la parametrización $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, f(t))$, donde $I = Dom(f) \subset \mathbb{R}$. Si f es suave, α será suave, y como $\alpha'(t) = (1, f'(t))$, α es regular. Observemos que $\alpha''(t) = (0, f''(t))$, luego

$$\kappa(t) = \frac{1}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}} f''(t).$$

Luego la curvatura κ coincide en signo con el signo de f'' , lo cual nos devuelve la noción de curvatura que teníamos cuando estudiamos la curvatura de gráficas de funciones de una variable en un curso de cálculo.

Por otra parte, el factor positivo $\frac{1}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}$ aporta una normalización ya que la velocidad de α no es constante en general (de hecho, nunca es constante en estos casos, salvo que f sea constante).

2.1.3. Ejercicios

2.1.1. Para una curva plana $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, recordemos que se define su curvatura κ como

$$\kappa(t) = \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{\|\alpha'\|^3} = \frac{x'y'' - y'x''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

Probar que si α está parametrizada por longitud de arco, entonces $\kappa(t) = -\frac{x''(t)}{y'(t)}$ cada vez que $y'(t) \neq 0$. Hallar una fórmula equivalente para cuando $x'(t) \neq 0$.

Sugerencia: como $(x')^2 + (y')^2 = 1$, derivando se obtiene $x'x'' + y'y'' = 0$ -ver Ejercicio 1.3.20-. Despejar x'' de esta última ecuación y reemplazarlo en la fórmula de κ .

2.1.2. Si α está parametrizada por longitud de arco probar que $\kappa = \pm\|\alpha''\|$.

2.1.3. Calcular la curvatura de las curvas planas de los Ejercicios 1.1.1 y 1.1.2.

2.1.4. Calcular la curvatura de la tractriz (Ejercicio 1.1.10).

2.1.5. Dada una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, parametrizarla, calcular su curvatura κ y hallar los máximos y mínimos de $\kappa(t)$. Interpretar geoméricamente.

2.1.6. Dados dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^2$ y un número real positivo a sea

$$\mathcal{X} = \{X \in \mathbb{R}^2 : d(X, p) + d(X, q) = 2a\}.$$

Demostrar que \mathcal{X} es una elipse de radios a, b cuyo centro es el punto medio $\frac{p+q}{2}$. Los puntos p y q son llamados **focos** (*sugerencia: hacer la prueba para el caso $p = (r, 0), q = (-r, 0)$, de manera que $\frac{p+q}{2} = (0, 0)$, en ese caso $b = \sqrt{a^2 - r^2}$).*

2.1.7. Dados dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^2$ y un número real positivo l sea

$$\mathcal{X} = \{X \in \mathbb{R}^2 : |d(X, p) - d(X, q)| = 2l\}.$$

Probar que \mathcal{X} es una hipérbola y que toda hipérbola se puede obtener de esta forma.

2.1.8. Para $p \in \mathbb{R}^2$ y $L \subset \mathbb{R}^2$ una recta que no contiene a p , sea

$$\mathcal{X} = \{X \in \mathbb{R}^2 : d(X, p) = d(X, L)\}.$$

Probar que \mathcal{X} es una parábola (*sugerencia: hacer la prueba para el caso $p = (0, r), L =$ eje x , de manera que si $X = (x, y)$ entonces $d(X, L) = |y|$). El punto p es el **foco** de la parábola y la recta L es su **eje**. Una parábola que refleja la luz concentra los rayos de dirección perpendicular a su eje y provenientes del semiespacio que contiene al foco en este punto.*

2.2. Movimientos, invariantes completos

Estudiaremos en esta sección la formulación matemática de los movimientos rígidos en el plano o el espacio.

Movimientos rígidos

Un movimiento rígido en el plano o el espacio está dado por una rotación seguida de una traslación. Vamos a describir matemáticamente esta acción. Definimos primero las matrices ortogonales,

$$O(n) = \{U \in \mathbb{R}^{n \times n} : U^t U = Id_{n \times n}\}.$$

El lector puede verificar que las siguientes condiciones son equivalentes, para una transformación lineal $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (ver el Ejercicio 3.2.10),

1. U es ortogonal, es decir U es inversible y $U^{-1} = U^t$,
2. $\|Uv\| = \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.
3. $\langle Uv, Uw \rangle = \langle v, w \rangle$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$,
4. las columnas (y/o las filas) de U forman una base ortonormal de \mathbb{R}^n ,
5. $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^n si y solo si

$$U(B) = \{U(v_1), U(v_2), \dots, U(v_n)\}$$

es una base ortonormal de \mathbb{R}^n .

La segunda afirmación indica que U preserva longitudes y distancias, pues si $P, Q \in \mathbb{R}^n$ y U es ortogonal, $\text{dist}(P, Q) = \|P - Q\|$ mientras que

$$\text{dist}(UP, UQ) = \|UP - UQ\| = \|U(P - Q)\| = \|P - Q\| = \text{dist}(P, Q).$$

Se dice entonces que U es una isometría, la equivalencia prueba que toda isometría *lineal* es necesariamente una transformación ortogonal.

La tercer equivalencia, reescrita como

$$\|Uv\| \|Uw\| \cos \theta_1 = \|v\| \|w\| \cos \theta_2$$

donde θ_1 es el ángulo entre Uv, Uw y θ_2 el ángulo entre v, w , nos dice (apelando a que U es una isometría) que $\theta_1 = \theta_2$. Luego U preserva los ángulos entre vectores.

En resumen, una transformación ortogonal preserva longitudes, distancias, ángulos.

Observación 2.2.1. Observemos que por ser $U^t U = Id$, tomando determinante se tiene $\det(U^t)\det(U) = 1$, y como $\det(U^t) = \det(U)$, se tiene $\det(U)^2 = 1$. Concluimos que si U es ortogonal, debe ser $\det(U) = \pm 1$.

Las transformaciones ortogonales se pueden clasificar entonces en dos clases, las de determinante +1 (que preservan la orientación) y las de determinante -1 (que invierten la orientación). Puede verse con ejemplos sencillos que las que tienen determinante positivo son rotaciones, mientras que las que tienen determinante negativo son reflexiones.

Definición 2.2.2. Vamos a denotar el conjunto de matrices ortogonales que tienen determinante +1 como $O^+(n)$: son las que preservan la orientación, y forman parte de los que llamamos *movimientos rígidos*.

Observación 2.2.3. Atención que no toda matriz de determinante ± 1 es ortogonal. Esta condición es necesaria para ser ortogonal, pero no suficiente. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

tiene $\det(A) = 1$, pero $A(1, 0) = (2, 0) = 2(1, 0)$ luego A no preserva longitudes así que no puede ser ortogonal.

Dado un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos a su conjunto trasladado por una función $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ como $F(\Omega)$. Así por ejemplo

$$U(\Omega) = \{Uv : v \in \Omega\}$$

denota la rotación del cuerpo Ω por la transformación ortogonal $U \in O^+(n)$.

Los otros movimientos rígidos posibles son las traslaciones, que se describen con la suma por un vector fijo $Z \in \mathbb{R}^n$. Es decir

$$\Omega + Z = \{v + Z : v \in \Omega\}$$

denota el trasladado de Ω en la dirección del vector Z .

Finalmente: todo movimiento rígido (rotación, seguida de traslación) se describe matemáticamente como un par (U, Z) donde $U \in O(n)$ es una matriz ortogonal y $Z \in \mathbb{R}^n$. De esta manera (U, Z) opera (*actúa*) en un cuerpo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ como

$$(U, Z) \cdot \Omega = U(\Omega) + Z.$$

Definición 2.2.4. El conjunto

$$\mathcal{E} = \{(U, Z) : U \in O^+(n), Z \in \mathbb{R}^n\}$$

se denomina *grupo de movimientos rígidos* o simplemente *grupo de Euclides*.

Recordamos aquí la definición abstracta de un grupo G :

Definición 2.2.5. Un *grupo* es un conjunto G con una operación producto $m : G \times G \rightarrow G$, $m(g, h) = g \cdot h$ y un elemento neutro distinguido $1_G \in G$ tal que el producto es asociativo y todo elemento tiene inverso (dado $g \in G$ existe $h \in G$ tal que $g \cdot h = h \cdot G = 1_G$, este inverso es único y se denota g^{-1}).

El grupo de Euclides \mathcal{E} es en efecto un grupo con el producto

$$(U_1, Z_1) \cdot (U_2, Z_2) = (U_1 U_2, U_1 Z_2 + Z_1),$$

(el lector debe verificar que el producto de matrices ortogonales es una matriz ortogonal y que esta cuenta es asociativa). El elemento neutro es $1_{\mathcal{E}} = (Id, 0)$ donde Id es la matriz identidad de $n \times n$ y 0 denota el vector nulo de \mathbb{R}^n . Es fácil ver que el inverso del elemento (U, Z) en el grupo de Euclides es el elemento $(U^t, -U^t Z)$ (pensar por qué geoméricamente debe ser éste).

Notar que el orden es relevante, ya que trasladar y rotar no necesariamente nos lleva al mismo cuerpo que si primero rotamos y luego trasladamos; sin embargo si hiciéramos $\Omega \mapsto U(\Omega + Z)$ (es decir primer trasladamos y luego rotamos) tendríamos $U(\Omega + Z) = U(\Omega) + UZ = U(\Omega) + Z'$, donde $Z' = UZ \in \mathbb{R}^n$, lo que nos dice que también lo podemos pensar como rotar primero y trasladar después (pero con otra traslación).

Nosotros hemos hecho una elección particular para la acción. En cualquier caso, observemos que

$$\begin{aligned} (U_1, Z_1) \cdot [(U_2, Z_2) \cdot \Omega] &= (U_1, Z_1) \cdot [U_2(\Omega) + Z_2] = U_1(U_2(\Omega) + Z_2) + Z_1 \\ &= U_1 U_2(\Omega) + U_1 Z_2 + Z_1 = (U_1 U_2, U_1 Z_2 + Z_1) \cdot \Omega \\ &= [(U_1, Z_1) \cdot (U_2, Z_2)] \cdot \Omega, \end{aligned}$$

es decir la acción es asociativa. Esta última cuenta explica en parte el por qué de la elección o definición particular del producto en el grupo de Euclides; una justificación mejor es geométrica y queda a cargo del lector.

2.2.1. La curvatura como invariante completo

Notemos que si $\alpha = (U, Z) \cdot \beta = U\beta + Z$, es decir si α se obtiene a partir de β mediante un movimiento rígido (U es t.l. ortogonal), no debiera cambiar su curvatura. Podemos suponer que β está parametrizada por longitud de arco. Entonces como $\alpha' = U\beta'$, $\alpha'' = U\beta''$ observamos primero que $\|\alpha'\| = \|U\beta'\| = \|\beta'\| = 1$ luego (lógicamente) α también está p.x.l.a. Calculemos ahora

$$\kappa_\alpha = \det(\alpha', \alpha'') = \det(U\beta', U\beta'') = \det(U(\beta', \beta'')) = \det(U)\det(\beta', \beta'') = \pm\kappa_\beta$$

dependiendo de si U invierte o preserva la orientación. Luego, recorriendo α en el sentido adecuado, podemos afirmar que si dos curvas difieren en un movimiento rígido, tienen la misma curvatura κ . Decimos que κ es un *invariante* de la curva, ya que hemos probado que la curvatura no cambia si hacemos un movimiento rígido de la curva. Es decir, κ es inherente a la curva y no a su disposición en el plano.

Por otra parte, recordemos que para cualquier α regular a trozos, se tiene la base orientada $\mathbf{T} = \{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ dada por los vectores tangente y normal unitario en cualquier punto regular (Definición 2.1.4). Entonces \mathbf{t}' , \mathbf{n}' (los vectores derivados de los vectores tangente y normal) deben ser combinaciones lineales de \mathbf{t}, \mathbf{n} .

Supongamos que α está p.x.l.a. y es C^2 , entonces debe ser $\mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}$ (Lema 2.1.9). Además como $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$, derivando esa igualdad y despejando se obtiene que $\langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle = -\langle \mathbf{n}, \mathbf{t}' \rangle$. Ahora escribiendo $\mathbf{n}' = \langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle \mathbf{t} + \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}$ (por ser $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ una base ortonormal C^1 , Observación 2.1.5). Entonces

$$\mathbf{n}' = \langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle \mathbf{t} + \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} = -\langle \mathbf{n}, \mathbf{t}' \rangle \mathbf{t} + \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} = -\langle \mathbf{n}, \kappa\mathbf{n} \rangle \mathbf{t} + \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} = -\kappa \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{t} = -\kappa \mathbf{t}$$

(ya que como $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$ resulta al derivar que $\langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle = 0$). Esto nos permite escribir la ecuación diferencial de primer orden

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \kappa\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\kappa\mathbf{t} \end{aligned} \tag{2.4}$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

ecuaciones válidas para cualquier curva parametrizada por longitud de arco, que tenga derivada segunda. Por el Lema 2.1.9, α es de clase C^2 si y sólo si κ es continua.

Observación 2.2.6. Si $\kappa = 0$ es constantemente nula, en la ecuación anterior observamos que $\mathbf{t}' = 0$, luego debe ser \mathbf{t} constante. Si α es una curva p.x.l.a. con $\kappa = 0$, entonces debe ser $\alpha'(t) = \mathbf{t} = V$ un vector constante. Luego $\alpha(t) = tV + P$ es la única solución posible: la única curva p.x.l.a. con curvatura nula, es una recta (y debe ser $\|V\| = 1$).

¿Qué ocurre si pedimos que κ sea constante, pero no nula? Es esperable obtener una circunferencia, y eso es lo que muestra el ejemplo detallado que sigue.

Ejemplo 2.2.7. Si $\kappa(s) = k \neq 0$ es constante, nos proponemos encontrar una curva cuya curvatura es k . Para ello, resolvemos la ecuación diferencial (2.4): derivando la primer ecuación y reemplazando en la segunda, obtenemos $\mathbf{t}'' = \kappa \mathbf{n}' = -k^2 \mathbf{t}$. Así que si $\mathbf{t} = (x(t), y(t))$, ambas funciones deben verificar $z'' + k^2 z = 0$. Esto sólo es posible si $x(t) = A \cos(kt + B)$, $y(t) = C \sin(kt + D)$. Como además debe ser $(x')^2 + (y')^2 = 1$ si α está p.x.l.a, debe ser $A^2 = C^2 = 1$ y además $D = B$ (esta cuenta la dejamos para el lector). Entonces

$$\alpha(t) = \int_0^t \mathbf{t}(s) ds = \frac{1}{k} (\sin(kt + B) + x_0, \pm \cos(kt + B) + y_0).$$

que describe una circunferencia de radio $R = 1/|k|$ centrada en (x_0, y_0) (el signo define hacia que lado recorremos la circunferencia, y la constante B desde qué punto comenzamos a recorrerla).

Problema 2.2.8. Probar que la curva α parametrizada por longitud de arco tiene curvatura $\kappa = \kappa(s)$ si y sólo si $\mathbf{t} = \alpha'$ verifica la ecuación diferencial de segundo orden

$$\kappa \mathbf{t}'' - \kappa' \mathbf{t}' + \kappa^3 \mathbf{t} = 0.$$

Probar que si $I = [a, b]$ y $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, y definimos $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ como $\theta(t) = \int_a^t \kappa(s) ds$, entonces la curva dada por

$$\alpha(t) = \left(\int_a^t \cos(\theta(s)) ds, \int_a^t \sin(\theta(s)) ds \right)$$

cumple esta ecuación diferencial, luego debe tener curvatura κ .

Esto nos dice que el problema de, dada una función curvatura $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua, hallar una curva que tenga esa curvatura, siempre tiene solución. En el teorema que sigue veremos que la curvatura κ determina totalmente a una curva plana, salvo por un movimiento rígido. Es decir, la curvatura es un invariante completo de las curvas planas.

Teorema 2.2.9. *Dada una función continua $\kappa : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ existe, salvo movimientos rígidos (rotaciones seguidas de traslaciones), una única curva p.x.l.a. $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya curvatura en $\alpha(s)$ es $\kappa(s)$, para todo $s \in [a, b]$.*

Demostración. Llamando

$$\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix},$$

tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden $\mathbf{T}' = Z\mathbf{T}$. Vamos a pensar $T = T(s)$ como una matriz 2×2 . Como $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, el teorema de existencia y unicidad nos dice que existe solución $T : I \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ de clase C^1 , y que la misma es única si fijamos la condición inicial $T(s_0)$ dada por los vectores fila $\mathbf{t}(s_0) = \mathbf{t}_0$, $\mathbf{n}(s_0) = \mathbf{n}_0 = U_{\perp} \mathbf{t}_0$ como en la Observación 2.1.5. En lo que sigue, y sin pérdida de generalidad, podemos suponer (reparametrizando) $s_0 = 0$, e $I = [0, b]$. Notemos que los vectores \mathbf{t}, \mathbf{n} son ortonormales (perpendiculares y de norma unitaria) si y sólo si la matriz T es ortogonal $T^* = T^{-1}$, o equivalentemente $\|Tv\| = \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$. Afirmamos que si $T(s)$ es solución de la ecuación, y la condición inicial es una matriz ortogonal, entonces $T(s)$ es una matriz ortogonal para todo $s \in I$: en efecto, si $v \in \mathbb{R}^2$ y T es solución, entonces

$$\frac{d}{ds} \|T(s)v\|^2 = 2\langle T(s)v, T'(s)v \rangle = 2\langle T(s)v, Z(s)T(s)v \rangle$$

donde $Z = Z(s)$ es la matriz anti-diagonal que tiene a la curvatura dada $\kappa = \kappa(s)$. Pero como Z es anti-hermitiana ($Z^t = -Z$), se tiene $\langle w, Zw \rangle = 0$ para todo $w \in \mathbb{R}^2$, y entonces

$$\frac{d}{ds} \|T(s)v\|^2 = 2\langle T(s)v, Z(s)T(s)v \rangle = 0 \quad \forall s \in I.$$

Esto sólo es posible si $\|T(s)v\|$ es constante. Como $\|T(0)v\| = \|v\|$ (porque asumimos que $T(0)$ es ortogonal), debe ser $\|T(s)v\| = \|v\|$ para todo $s \in I$, lo que prueba que $T(s)$ es ortogonal para todo $s \in I$. Además, si las condiciones iniciales daban una base orientada positivamente, debe ser $\det(T(0)) = 1$, y de la continuidad

de $s \mapsto \det(T(s))$ deducimos que debe ser $\det(T(s)) = 1$ para todo $s \in I$ (Observación 2.2.1). Es decir la base ortonormal $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ está orientada positivamente para todo $s \in I$.

Si nos dan el dato de curvatura $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ y las condiciones iniciales $\alpha_0 = \alpha(0)$, $\mathbf{t}_0 = \alpha'(0)$, tomamos $\mathbf{n}_0 = U_{\perp} \mathbf{t}_0$ el único vector unitario perpendicular a \mathbf{t}_0 que da una base del plano orientada positivamente, y obtenemos la condición inicial ortogonal $T(0)$. Sea $T = T(s) \in M_2(\mathbb{R})$ la única solución de la ecuación diferencial que cumple esta condición inicial. Definimos, integrando en cada coordenada el vector $\mathbf{t}(s)$,

$$\alpha(s) = \int_0^s \mathbf{t}(x) dx + \alpha_0, \quad \forall s \in I.$$

Se obtiene así una curva regular que verifica $\alpha(0) = \alpha_0$, $\alpha'(0) = \mathbf{t}_0$, y como $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$ para todo $s \in I$, resulta que α está p.x.l.a.

Más aún, $\mathbf{t}'(s) = \kappa \mathbf{n}(s)$, $\forall s \in I$, lo que implica que $\alpha'' = \mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}$, de donde la curvatura de α es exactamente κ , porque

$$\kappa_{\alpha}(s) = \det \begin{pmatrix} \alpha'(s) \\ \alpha''(s) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \kappa(s) \mathbf{n}(s) \end{pmatrix} = \kappa(s) \det \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \end{pmatrix} = \kappa(s) 1 = \kappa(s).$$

Ahora supongamos que hay otra curva $\bar{\alpha}$ tal que su curvatura coincide $\kappa_{\bar{\alpha}}(s) = \kappa_{\alpha}(s) = \kappa(s)$ para todo $s \in I$. Entonces si $\tilde{T}(s) \in M_2(\mathbb{R})$ denota la matriz cuyas filas son $\tilde{\mathbf{t}}(s), \tilde{\mathbf{n}}(s)$, debe cumplir la misma ecuación diferencial por lo argumentado antes del teorema. Por otro lado, como ambas bases están orientadas positivamente, existe una matriz ortogonal W_0 de determinante positivo tal que $W_0 \mathbf{t}_0 = \tilde{\mathbf{t}}_0$, $W_0 \mathbf{n}_0 = \tilde{\mathbf{n}}_0$, o equivalentemente $W_0 T(0)^t = \tilde{T}(0)^t$ ya que

$$W_0 \begin{pmatrix} \mathbf{t}_0 & \mathbf{n}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_0 \mathbf{t}_0 & W_0 \mathbf{n}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{t}}_0 & \tilde{\mathbf{n}}_0 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien

$$(T(s)W_0^t)' = T(s)'W_0^t = Z(s)T(s)W_0^t = Z(s)(T(s)W_0^t)$$

nos muestra que $s \mapsto T(s)W_0^t$ también es solución de la ecuación diferencial. Como $\tilde{T}(s)$ tiene la misma condición inicial, por la unicidad de las soluciones de la ecuación debe ser $\tilde{T}(s) = T(s)W_0^t$, o equivalentemente $W_0 T(s)^t = \tilde{T}(s)^t$, de donde deducimos que $\tilde{\mathbf{t}}(s) = W_0 \mathbf{t}(s)$. Luego

$$\bar{\alpha}(s) - \bar{\alpha}_0 = \int_0^s \bar{\alpha}'(s) ds = \int_0^s \tilde{\mathbf{t}}(s) ds = \int_0^s W_0 \mathbf{t}(s) ds = W_0 \int_0^s \mathbf{t}(s) ds = W_0(\alpha(s) - \alpha_0).$$

Hemos probado que $\tilde{\alpha} = W_0\alpha + z_0$ así que α es única salvo una transformación ortogonal afín. \square

Entonces la curvatura es un invariante completo de las curvas, ya que como vimos antes, por un movimiento rígido no cambia la curvatura, y por otro lado, conociendo la curvatura (continua), podemos encontrar una curva α de clase C^2 con esa curvatura, y es única salvo por un movimiento rígido (por eso podemos elegir libremente la posición y velocidad iniciales de α).

3 CURVATURA Y TORSIÓN: CURVAS ESPACIALES

Nada ocurre hasta que algo se mueve.

Albert Einstein

Dada una curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, queremos definir una base orientada $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ en cada punto $\alpha(s)$ como hicimos en el caso plano.

Dado el vector \mathbf{t} (que tomaremos como el *tangente unitario* a α , es decir $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$ si α está p.x.l.a. y

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}$$

en general), no hay una manera natural de tomar un vector ortogonal a este como en la Observación 2.1.5, ya que el conjunto de vectores ortogonales a uno dado forma un plano, y dependiendo de qué lado mire uno este plano, la orientación se intercambiaría.

Definimos el *vector normal unitario* \mathbf{n} de una curva α de clase C^2 como

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|}$$

para cada $s \in I$ donde $\mathbf{t}'(s) \neq 0$, y lo definimos como el vector nulo cuando $\mathbf{t}'(s) = 0$. Notemos que el sentido de \mathbf{n} en este caso varía según recorramos la curva hacia un lado o el otro. Si α está p.x.l.a. se tiene simplemente $\mathbf{n} = \alpha''\|\alpha''\|^{-1}$ donde $\alpha'' \neq 0$, y el vector nulo en otro caso.

3.1. Curvatura y plano osculador

Definición 3.1.1. Definimos la *curvatura* de una curva α que está p.x.l.a. como

$$\kappa_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\|.$$

Observemos que con esta definición *la curvatura es siempre positiva en \mathbb{R}^3* . No tiene mucho sentido asignarle un signo a algo que depende de que lado lo miremos: si decimos que la curvatura es positiva al mirarla desde un lado si la curva gira en sentido antihorario respecto de nuestro punto de vista, y cambiamos el punto de vista (miramos desde el lado opuesto), entonces la misma curva con la misma parametrización giraría en sentido horario respecto desde nuestro punto de vista, y por ende su signo sería negativo.

Definición 3.1.2. Sea ahora $C = \text{Im}(\alpha)$ una curva regular cualquiera, y β su reparametrización por longitud de arco. Tomemos $P = \alpha(t) = \beta(s) \in C$, definimos entonces

$$\kappa_C(P) = \kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(s) = \|\beta''(s)\|.$$

Esta definición de κ no depende de la parametrización de la curva $C \subset \mathbb{R}^3$, por construcción. Mediante la regla de la cadena y razonando como en el caso de las curvas en \mathbb{R}^2 -ecuación (2.2)-, se tiene una fórmula general para la curvatura de curvas espaciales:

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{\|\alpha'\|^3} \sqrt{\|\alpha''\|^2 \|\alpha'\|^2 - \langle \alpha', \alpha'' \rangle^2} = \frac{1}{\|\alpha'\|^3} \|\alpha' \times \alpha''\| \quad (3.1)$$

donde $V \times W$ denota el producto vectorial entre $V, W \in \mathbb{R}^3$. La última igualdad es consecuencia de la fórmula de cálculo de área de paralelogramos en el espacio, según detallamos más abajo en el Lema 3.1.6.

Observación 3.1.3. Un cálculo directo arroja

$$\mathbf{t}' = -\frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{\|\alpha'\|^3} \alpha' + \frac{\alpha''}{\|\alpha'\|} \quad \|\mathbf{t}'\|^2 = \frac{1}{\|\alpha'\|^4} \left\{ \|\alpha'\|^2 \|\alpha''\|^2 - \langle \alpha', \alpha'' \rangle^2 \right\} = \|\alpha'\|^2 \kappa_\alpha^2.$$

Luego $\mathbf{t}' = 0$ si y sólo si $\kappa = 0$ (α es regular), si y sólo si $\|\alpha'\| \|\alpha''\| = |\langle \alpha', \alpha'' \rangle|$. Esta última identidad es el caso de igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que sólo es posible si α', α'' están alineados. Además $\mathbf{n} = 0$ exactamente cuando $\mathbf{t}' = 0$ por definición. Luego los vectores \mathbf{t}, \mathbf{n} son ortonormales y en particular linealmente independientes **en cada instante** $s \in I$ donde $\kappa(s) \neq 0$.

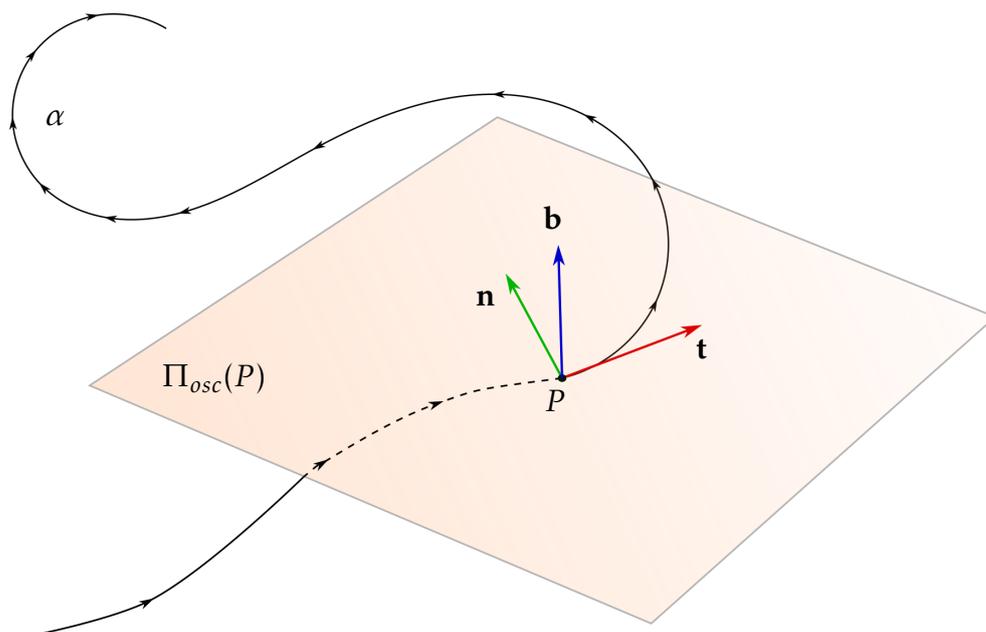


Figura 3.1: Plano osculador a la curva α en el punto P , y los vectores tangente, normal y binormal de la curva. El vector binormal $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ es normal al plano osculador.

Definición 3.1.4. Para los puntos donde $\kappa(s) \neq 0$, definimos el *plano osculador* de α en $\alpha(s)$ como el plano generado por $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)$ que pasa por $P = \alpha(s)$:

$$\Pi_{osc}(\alpha, P) = \lambda \mathbf{t}(s) + \mu \mathbf{n}(s) + \alpha(s), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Este plano aproxima a segundo orden a la curva α en el instante s , ver la Figura 3.1. Dado que contiene las derivadas primera y segunda de α (de hecho, el plano generado por \mathbf{t}, \mathbf{n} coincide con el plano generado por α', α'' , Ejercicio 3.2.2). Este plano degenera a una recta exactamente cuando α'' es múltiplo de α' o equivalentemente, cuando $\kappa = 0$).

Definición 3.1.5. Llamamos al vector normal del plano osculador $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$, el *vector binormal* de la curva. Veremos a más adelante que cuando $\mathbf{n} \neq 0$, entonces \mathbf{b} también es unitario (ver el comienzo de la sección 3.1.2).

3.1.1. Área y Volumen orientado en \mathbb{R}^3

Veamos en esta sección cómo calcular el área del paralelogramo generado por dos vectores $V, W \in \mathbb{R}^3$. Una primer fórmula es

$$\text{área}(V, W) = \|V\| \|W\| \sin(\theta) = \|V\| \|W\| \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} = \sqrt{\|V\|^2 \|W\|^2 - \langle V, W \rangle^2} \quad (3.2)$$

donde θ es el ángulo (entre 0 y π) formado por V, W .

Veamos otra fórmula útil. Después de una rotación conveniente, supongamos primero que $V = (v_1, v_2, 0)$, $W = (w_1, w_2, 0)$ y que $V \times W = \|V \times W\| (0, 0, 1)$. Notemos el área generada por V, W es el área generada por $(v_1, v_2), (w_1, w_2)$ en el suelo $(x, y, 0)$, y por lo discutido en la sección de áreas en \mathbb{R}^2 , es exactamente el determinante de estos dos vectores, es decir en este caso

$$\text{área}(V, W) = v_1 w_2 - v_2 w_1.$$

Veamos cómo calcular esta área en el caso general, para $V', W' \in \mathbb{R}^3$ cualesquiera.

Sea $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una t.l. ortogonal que preserva la orientación, que transforma $V', W', V' \times W'$ en tres vectores $V = UV', W = UW', Z = U(V' \times W')$. Como $U(V' \times W') = (UV') \times (UW')$ (Ejercicio 3.2.14), estamos en el caso anterior, es decir V, W están en el piso $(x, y, 0)$ de \mathbb{R}^3 y

$$V \times W = \|V \times W\| (0, 0, 1) = \|U(V' \times W')\| (0, 0, 1) = \|V' \times W'\| (0, 0, 1)$$

por ser U una isometría.

Utilizaremos la fórmula del *triple producto* (Ejercicio 3.2.1)

$$\det(V, W, Z) = \langle V \times W, Z \rangle.$$

Observemos que, intercambiando filas del determinante, se puede escribir también como $\det(Z, V, W) = \langle V \times W, Z \rangle$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \|V \times W\|^2 &= \langle V \times W, V \times W \rangle = \det(V \times W, V, W) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \|V \times W\| \\ v_1 & v_2 & 0 \\ w_1 & w_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \|V \times W\| \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ w_1 & w_2 & 0 \end{pmatrix} = \|V \times W\| \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notemos que $V \times W = 0$ si y sólo si V, W están alineados, en ese caso el área del paralelogramo es nula. Si no es así, podemos cancelar un factor $\|V \times W\|$ a ambos lados de la igualdad y obtener

$$\|V \times W\| = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1.$$

Esta cuenta nos dice que el área del paralelogramo generado por V, W es exactamente $\|V \times W\|$. Como el paralelogramo original generado por V', W' tiene la misma área que el generado por V, W , podemos calcular

$$\begin{aligned} \text{área}(V', W') &= \text{área}(V, W) = \|V \times W\| = \|U^{-1}(V \times W)\| \\ &= \|(U^{-1}V) \times (U^{-1}W)\| = \|V' \times W'\|, \end{aligned}$$

donde nuevamente usamos el Ejercicio 3.2.14.

Es decir, que en cualquier caso, y para todo par de vectores en el espacio, el área del paralelogramo generado por ellos siempre se obtiene como la norma del producto vectorial entre ambos. Notemos que la orientación en este caso no tiene sentido, porque dependiendo si miramos desde abajo o desde arriba el paralelogramo, la orientación relativa de las aristas que forman los vectores se invierten. Resumiendo:

Lema 3.1.6. Sean $V, W \in \mathbb{R}^3$, $\text{área}(V, W) = \sqrt{\|V\|^2\|W\|^2 - \langle V, W \rangle^2}$. Entonces

$$\text{área}(V, W) = \|V \times W\|.$$

Dada una base ordenada $\{V, W, Z\}$ de \mathbb{R}^3 , ahora si podemos definir su orientación como el signo del determinante $\det(V, W, Z)$.

Definición 3.1.7. Vamos a definir el *volumen orientado* del paralelepípedo generado por $V, W, Z \in \mathbb{R}^3$ como

$$\text{Vol}(V, W, Z) = \det(V, W, Z).$$

Veamos que su magnitud coincide con la del volumen real de la figura: el vector $V \times W$ forma un ángulo recto con el plano generado por V, W . Por otra parte, el vector Z forma un ángulo subtendido α con el plano generado por V, W y un ángulo complementario $\beta = \pi/2 - \alpha$ con $V \times W$ o bien $\beta = \alpha + \pi/2$ con $V \times W$ (dependiendo de si Z y $V \times W$ pertenecen al mismo semiespacio en que

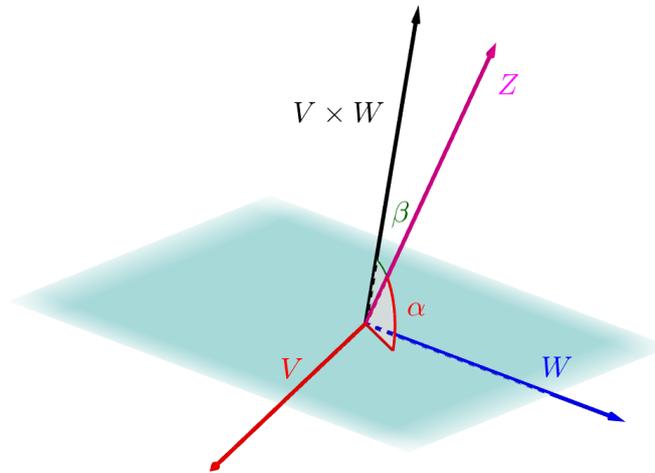


Figura 3.2: Ángulo subtendido α entre Z y el plano determinado por V , W y ángulo β

divide el plano formado por V y W o a distintos semiespacios respectivamente, (ver Figura 3.2).

La fórmula para el volumen del paralelepípedo se obtiene multiplicando la superficie de la base S por la altura h del mismo. Claramente, $S = \|V \times W\|$. Por otro lado (Figura 3.3) se tiene

$$\text{sen}(\alpha) = h/\|Z\|$$

luego $h = \|Z\| \text{sen}(\alpha) = \|Z\| |\cos(\beta)|$ ya que en el caso $\beta = \pi/2 - \alpha$ resulta que $\text{sen}(\alpha) = \cos(\beta)$ y en el caso $\beta = \pi/2 + \alpha$ resulta $\text{sen}(\alpha) = -\cos(\beta)$ (el módulo de $|\cos(\beta)|$ es porque, dependiendo de β , podría ser negativo $\cos(\beta)$). Es decir

$$|\text{Vol}(V, W, Z)| = S.h = \|V \times W\| \|Z\| |\cos(\beta)| = |\langle V \times W, Z \rangle| = |\det(V, W, Z)|.$$

Así que en efecto el volumen orientado $\det(V, W, Z)$ coincide con el volumen habitual del sólido formado por V, W, Z , con un signo que depende de si V, W, Z están ordenados según la regla de la mano derecha o no.

3.1.2. Curvatura y Torsión

Vamos a estudiar primero la regularidad de α , denotaremos C^0 a las funciones continuas en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ para unificar notación.

Por los resultados de la Sección 3.1, si tenemos una curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, definiendo el vector binormal como $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$, resulta entonces por (3.2) que

$$\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{t} \times \mathbf{n}\| = \|\mathbf{t}\| \|\mathbf{n}\| \text{sen}(\theta).$$

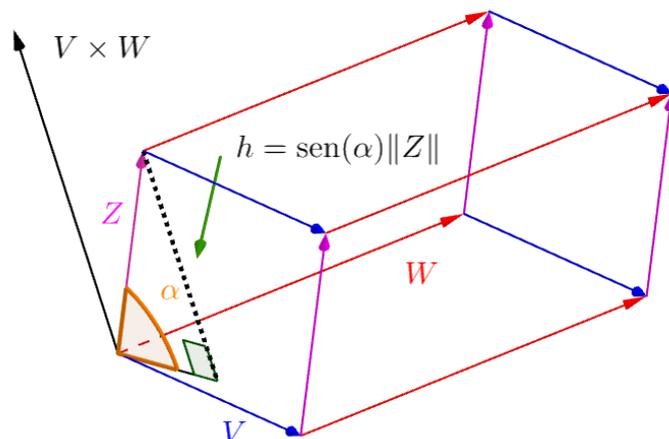


Figura 3.3: Paralelepípedo formado por V , W y Z y su altura h

En aquellos puntos donde hay plano osculador (equivalentemente, donde $\kappa \neq 0$), sabemos que \mathbf{t}, \mathbf{n} son unitarios y perpendiculares: entonces $\theta = \pi/2$ y resulta que $\|\mathbf{b}\| = 1$ luego $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 orientada positivamente (según la regla de la mano derecha).

En primer lugar, tenemos un resultado que se asemeja (parcialmente) al Lema 2.1.5 para curvas planas. Notemos que α es de clase C^k si y sólo si \mathbf{t} es de clase C^{k-1} . Veamos que pasa con \mathbf{n}, \mathbf{b} y κ :

Lema 3.1.8. Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es regular y C^k ($k \geq 2$) entonces κ es de clase C^{k-2} ; si además $\kappa \neq 0$ en I entonces también \mathbf{n}, \mathbf{b} son de clase C^{k-2} . Si α está p.x.l.a. y es dos veces derivable, entonces

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa_\alpha(s)\mathbf{n}(s). \quad (3.3)$$

Demostración. De la fórmula (3.1) para la curvatura es evidente que si α es de clase C^k entonces κ es de clase C^{k-2} . Supongamos ahora que α está p.x.l.a., entonces en primer lugar $\mathbf{t}'(s) = 0$ si y sólo si $\mathbf{n}(s) = 0$ por definición, luego supongamos que no se anula ninguno de $\kappa, \mathbf{t}', \mathbf{n}$, entonces no se anula ninguno de los otros dos (Observación 3.1.3). En ese caso, tenemos $\kappa = \|\alpha''\| = \|\mathbf{t}'\|$ y entonces $\mathbf{n} = \mathbf{t}'\kappa^{-1}$ por la definición de \mathbf{n} , lo que prueba la fórmula enunciada en el lema.

Si α es de clase C^k lo mismo es cierto para su reparametrización por longitud de arco; si κ no se anula en I , entonces tenemos la fórmula recién probada que nos dice que $\mathbf{n} = \alpha''\kappa^{-1}$ luego \mathbf{n} es de clase C^{k-2} por ser producto de dos

funciones de esa clase. Como $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$, deducimos que lo mismo vale para el vector binormal. \square

§ La diferencia (importante) con el caso plano es que como aquí la existencia del vector normal se basa en la traza de la curva, entonces la regularidad de la función curvatura no nos garantiza necesariamente, que la curva α es más regular: es decir, κ puede ser de clase C^4 pero α sólo de clase C^3 . Sin embargo, si nos dicen a priori que *tanto* κ *como* \mathbf{n} *son de clase* C^k (en particular existe el vector normal), la fórmula recién probada nos asegura que \mathbf{t}' es de clase C^k , luego α será de clase C^{k+2} .

§ Como definimos $\mathbf{n}(s_0) = 0$ en aquellos puntos donde $\kappa(s_0) = 0$, notamos que \mathbf{n} no será una función continua. Una definición alternativa es tomar $\mathbf{n}(s_0) = \mathbf{t}''(s_0) / \|\mathbf{t}''(s_0)\|^{-1}$ (suponiendo que $\mathbf{t}''(s_0)$ es no nula). Sin embargo, si α no es analítica, podría ocurrir que todas las derivadas de \mathbf{t} sean nulas en el punto, y allí no habría manera de definir \mathbf{n} de otra forma que no sea el vector nulo.

3.1.3. La torsión de una curva regular

Observemos ahora que, si existe un plano fijo $\Pi \subset \mathbb{R}^3$, tal que la curva $\alpha \subset \Pi$ (diremos en este caso que $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ es una *curva plana*) entonces \mathbf{b} será un vector constante, ya que apunta siempre en la misma dirección y es unitario. Luego $\mathbf{b}'(s) = 0$ para todo $s \in I$. La idea es que la velocidad con la que α se sale de cualquier plano está entonces medida por la cantidad $\|\mathbf{b}'\|$ (Figura 3.1). Veamos como calcular esta cantidad. Aclaremos que en ciertos textos, la convención de la definición de la torsión lleva el signo opuesto al que hemos elegido aquí.

Lema 3.1.9. Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva regular C^k ($k \geq 3$), con curvatura $\kappa \neq 0$, entonces existe una función $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^{k-3} -que denominamos torsión- tal que

$$\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s) \quad (3.4)$$

para todo $s \in I$.

Demostración. Si $\kappa(s) \neq 0$ en I , entonces por el lema anterior $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ son C^{k-2} y forman una base ortonormal de \mathbb{R}^3 en cada instante s , y debe ser

$$\mathbf{b}'(s) = A(s)\mathbf{t}(s) + B(s)\mathbf{n}(s) + C(s)\mathbf{b}(s)$$

para A, B, C funciones a valores reales. Llamaremos $B = \tau$ de aquí en más, y observamos que $A = \langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \rangle$. Como $\mathbf{b} \perp \mathbf{t}$ (ver 3.1), se tiene $\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle = 0$, derivando se

deduce que $\langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{t}' \rangle = 0$, es decir $\langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \rangle = -\langle \mathbf{b}, \mathbf{t}' \rangle$. Como $\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}$, se deduce que $A = -\langle \mathbf{b}, \kappa \mathbf{n} \rangle = -\kappa \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle = 0$ pues $\mathbf{b} \perp \mathbf{n}$ también. Hemos probado que $A(s) = 0$. Como $C = \langle \mathbf{b}', \mathbf{b} \rangle$, con un razonamiento similar se obtiene $C(s) = 0$. Por último, observamos que $\tau = \langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle$ luego τ es de clase C^{k-3} por el lema anterior. \square

§ Una definición razonable (pero ad-hoc) para los puntos donde $\kappa = 0$ es definir allí $\tau(s_0) = 0$. Con esta definición, en general τ no resulta continua en s_0 , ya que no lo es $\mathbf{b}' = \mathbf{t} \times \mathbf{n}'$.

Con esta noción geométrica de torsión en mente, y la fórmula obtenida, podemos dar una fórmula que sólo involucra las derivadas de la parametrización de la curva.

Corolario 3.1.10. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular de clase C^3 con $\kappa \neq 0$, entonces

$$\tau(t) = -\frac{1}{\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|^2} \langle \dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t) \rangle = -\frac{\det(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha})}{\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|^2} \quad (3.5)$$

en el punto $P = \alpha(t)$. En particular, si α es una parametrización por longitud de arco,

$$\tau(t) = \frac{-1}{\kappa^2(t)} \langle \dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t) \rangle.$$

Demostración. Por el lema anterior, tenemos que

$$\tau = \tau \mathbf{1} = \tau \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \langle \tau \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{t}' \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle = 0 + \langle \mathbf{t} \times \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle.$$

Supongamos primero que α es una p.x.l.a, entonces como $\mathbf{t} = \alpha'$, se tiene $\alpha'' = \mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}$ luego $\alpha''' = \mathbf{t}'' = \kappa' \mathbf{n} + \kappa \mathbf{n}'$. En consecuencia

$$\mathbf{t} \times \mathbf{n}' = \mathbf{t} \times \left(\frac{1}{\kappa} \alpha''' - \frac{\kappa'}{\kappa} \mathbf{n} \right) = \frac{1}{\kappa} \alpha' \times \alpha''' - \frac{\kappa'}{\kappa} \mathbf{b}.$$

y entonces

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\kappa} \langle \alpha' \times \alpha''', \mathbf{n} \rangle - \frac{\kappa'}{\kappa} \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\kappa} \langle \alpha' \times \alpha''', \frac{1}{\kappa} \alpha'' \rangle - 0 \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \det(\alpha', \alpha''', \alpha'') = -\frac{1}{\kappa^2} \det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = -\frac{1}{\kappa^2} \langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle. \end{aligned}$$

Si α no está p.x.l.a, la reparametrizamos como es usual para que $\beta(s) = \alpha(d^{-1}(s))$ esté p.x.l.a. Recordemos que $d'(s) = 1/\|\dot{\alpha}(d^{-1}(s))\|$ por lo que resulta que

$$\tau_{\beta}(s) = -\frac{1}{\kappa_{\beta}^2(s)} \langle \beta'(s) \times \beta''(s), \beta'''(s) \rangle$$

de acuerdo a la fórmula recién obtenida. Como $\tau_{\alpha}(t) = \tau_{\beta}(s)$ pues $t = d^{-1}(s)$, y por otro lado

$$\kappa_{\beta}(s) = \kappa_{\alpha}(t) = \frac{\|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}\|}{\|\dot{\alpha}\|^3}$$

por la fórmula obtenida en (3.1), resta estudiar qué ocurre con las derivadas.

Recordando que $\beta' = \dot{\alpha}/\|\dot{\alpha}\|$, obtenemos expresiones para β'' , β''' en términos de las derivadas de α -como la ecuación que obtuvimos en (2.1)-. Más precisamente: llamamos $\lambda(s) = (d^{-1})'(s) = \|\dot{\alpha}\|^{-1}$. Notar que entonces, $\beta' = \dot{\alpha}\lambda$ y por la regla de la cadena (estamos derivando respecto de s), se tiene

$$\beta' = \lambda\dot{\alpha}, \quad \beta'' = \lambda'\dot{\alpha} + \lambda\ddot{\alpha}\lambda = \lambda'\dot{\alpha} + \lambda^2\ddot{\alpha}$$

-que es lo mismo que (2.1) con otra notación-, y volviendo a derivar,

$$\beta''' = \lambda''\dot{\alpha} + \lambda'\ddot{\alpha}\lambda + 2\lambda\lambda'\ddot{\alpha} + \lambda^2\ddot{\alpha}\lambda = a\dot{\alpha} + b\ddot{\alpha} + \lambda^3\ddot{\alpha}$$

esto es $\beta''' = a\dot{\alpha} + b\ddot{\alpha} + \frac{1}{\|\dot{\alpha}\|^3}\ddot{\alpha}$.

Usando que el plano osculador está generado por \mathbf{t}, \mathbf{n} o equivalentemente por $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$, y usando las relaciones de ortogonalidad de $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, se deduce la fórmula enunciada:

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha}(t) = \tau_{\beta}(s) &= -\frac{1}{\kappa_{\beta}^2(s)} \langle \beta'(s) \times \beta''(s), \beta'''(s) \rangle \\ &= -\frac{\|\ddot{\alpha}(t)\|^6}{\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|^2} \langle \lambda\dot{\alpha}(t) \times (A\dot{\alpha}(t) + \lambda^2\ddot{\alpha}(t)), a\dot{\alpha}(t) + b\ddot{\alpha}(t) + \lambda^3\ddot{\alpha}(t) \rangle \\ &= -\frac{\|\dot{\alpha}(t)\|^6}{\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|^2} \lambda^3 \langle \dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t), a\dot{\alpha}(t) + b\ddot{\alpha}(t) + \lambda^3\ddot{\alpha}(t) \rangle \\ &= -\frac{\|\dot{\alpha}(t)\|^6}{\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|^2} \lambda^6 \langle \dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t) \rangle \\ &= -\frac{1}{\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|^2} \langle \dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t) \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Observación 3.1.11. De acuerdo a lo propuesto en la definición de torsión, es inmediato que si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está contenida en un plano y es de clase C^k entonces $\tau = 0$ (definiendo $\tau = 0$ en los puntos donde $\kappa = 0$). El siguiente ejemplo muestra que cuando κ se anula, la torsión puede ser nula pero la curva no estar contenida en un plano.

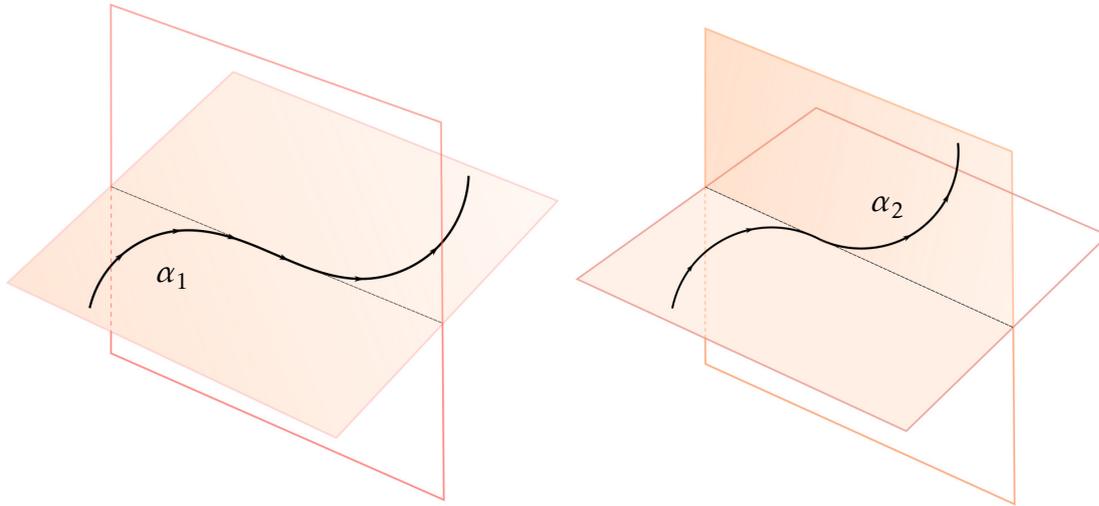


Figura 3.4: Dos curvas con la misma curvatura y torsión, α_1 es plana y α_2 no lo es.

Ejemplo 3.1.12. Sean $\alpha_i : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por $\alpha_1(t) = (t, t^5, 0)$, mientras que

$$\alpha_2(t) = \begin{cases} (t, t^5, 0) & \text{si } t < 0 \\ (t, 0, t^5) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Ambas curvas son regulares, de hecho α_1 es C^∞ y α_2 es de clase C^3 . Puede el lector verificar que para $t \neq 0$, ambas curvas tienen *la misma curvatura* no nula, y ambas curvas tienen *la misma torsión* nula. Mientras que para $t = 0$, ambas curvas tienen curvatura nula. Definiendo $\tau(0) = 0$ para ambas curvas, resulta que las dos curvas tienen la misma curvatura y la misma torsión (nula) en $I = (-1, 1)$. Notamos que α_1 está contenida en un plano, pero α_2 no lo está.

Para evitar este tipo de ejemplos, tenemos que pedir que haya vector normal no nulo a lo largo de la curva, o equivalentemente, que no se anule la curvatura (en el ejemplo anterior esto ocurre en $P = (0, 0, 0)$ para ambas curvas):

Proposición 3.1.13. Supongamos que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es regular, de clase C^3 y tiene $\kappa > 0$. Entonces si $\tau \equiv 0$, la curva α está contenida en un plano.

Demostración. Las hipótesis y los Lemas 3.1.8, 3.1.9 nos aseguran que los vectores $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ forman una b.o.n. y dependen continuamente del parámetro (y lo mismo ocurre con los números κ, τ). Podemos suponer que α está p.x.l.a., y como $\mathbf{b}' = \tau \mathbf{n} = 0$ debe ser \mathbf{b} constante. Pero entonces

$$\langle \alpha(s), \mathbf{b} \rangle' = \langle \alpha'(s), \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b} \rangle = 0,$$

lo que nos dice que $\langle \alpha(s), \mathbf{b} \rangle = cte$. Pero esto es equivalente a afirmar que α está contenida en un plano ortogonal a \mathbf{b} , digamos $\Pi : \langle X - \alpha(s_0), \mathbf{b} \rangle = 0$. \square

3.2. Triedro de Frenet, invariantes completos

Cuando $\kappa \neq 0$, la terna $\mathbf{T} = (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ se denomina **Triedro de Frenet** de la curva α , esta terna forma un triedro (o base ortonormal) que podemos pensar en cada instante apoyada en el punto $\alpha(t)$. Es un marco de referencia móvil (“repère mobile” en francés) para la curva α (ver también la Figura 3.1):

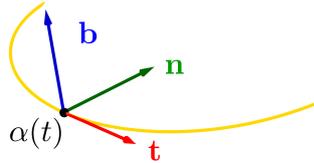


Figura 3.5: Triedro de Frenet en el punto $\alpha(t)$ de una curva en \mathbb{R}^3

Notemos que como el triedro forma una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , entonces debe ser

$$\mathbf{n}' = A\mathbf{t} + B\mathbf{n} + C\mathbf{b}$$

para ciertas funciones continuas $A, B, C : I \rightarrow \mathbb{R}$ (estamos asumiendo aquí y en lo que sigue que α es de clase C^3).

En lo que sigue, hallaremos A, B, C . Notamos que $A = \langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle$, $B = \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle$, $C = \langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle$. Como $\mathbf{n}' \perp \mathbf{n}$, debe ser $B = 0$ para todo t . Ahora, derivando $\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle = 0$, obtenemos $\langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{n}, \mathbf{t}' \rangle = 0$, es decir $A = -\langle \mathbf{n}, \mathbf{t}' \rangle$. Como $\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}$, debe ser $A = -\kappa$. Similarmente, como $\mathbf{b}' = \tau \mathbf{n}$, derivando $\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle = 0$ arribamos a $C = -\tau$. Entonces

$$\mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t} - \tau \mathbf{b}.$$

Esta ecuación junto con (3.3) y (3.4) se denominan *fórmulas de Frenet*:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \kappa \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\kappa \mathbf{t} - \tau \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= \tau \mathbf{n} \end{aligned}$$

que pueden escribirse como $\mathbf{T}' = Z\mathbf{T}$, donde $Z = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$.

Observación 3.2.1. La curvatura y la torsión son invariantes por movimientos rígidos. Esto puede deducirse a partir de las fórmulas para las mismas (3.1) y (3.5), y la siguiente identidad válida para t.l. ortogonales $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$Uv \times Uw = \pm U(v \times w),$$

con signo positivo si U preserva la orientación, y negativo si la invierte (Ejercicio 3.2.14). En particular, para un movimiento rígido $U \in O^+(n)$ preserva la orientación (tiene determinante +1) y entonces $Uv \times Uw = U(v \times w)$.

Recíprocamente, podemos probar que la curvatura y la torsión son *invariantes completos* de una curva espacial, esto es, que determinan completamente una curva, dadas las condiciones iniciales:

Teorema 3.2.2. *Dadas dos funciones continuas $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ con $\kappa > 0$, existe una única (salvo movimientos rígidos) curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regular y p.x.l.a. tal que κ y τ son la curvatura y la torsión de α .*

Demostración. Podemos ver que gracias a las ecuaciones de Frenet, una curva regular verifica la ecuación diferencial $T = ZT'$ como en el caso plano (en este caso $Z^* = -Z \in M_3(\mathbb{R})$ contiene la curvatura y la torsión, y la matriz $T \in M_3(\mathbb{R})$ tiene como filas los vectores $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$). Observemos que entonces las condiciones iniciales que determinan completamente una curva con curvatura y torsión dadas, son $\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0$, o equivalentemente, como suponemos α p.x.l.a, los vectores α_0, α'_0 y α''_0 . El resto de la demostración es similar a la demostración del Teorema 2.2.9 para curvas planas, y queda como ejercicio para el lector. \square

Observación 3.2.3. Si una curva regular tiene curvatura nula en algún punto, entonces la construcción del triedro de Frenet falla, y por eso mismo el teorema de unicidad no es necesariamente válido. Esto permite “pegar” distintas curvas en los puntos de curvatura nula para obtener curvas distintas que tendrán la misma curvatura y torsión, como en el Ejemplo 3.1.12. Eso sí, por el teorema anterior, en los tramos donde la curvatura es no nula, estos tramos deben ser obtenidos por un movimiento rígido de uno respecto del otro.

Nota bibliográfica 2. En este capítulo (y el anterior) seguimos de cerca la presentación de Do Carmo [3] con algunas variantes que debemos al texto de Struik [18] y una notación que intenta evitar el uso de coordenadas. La curvatura y la torsión de una curva pueden leerse como las cantidades barridas por los vectores del triedro de Frenet al

desplazar un partícula a lo largo de la curva (pensando la curva como una restricción o un alambre a lo largo del cual se desplaza la partícula); por esto hemos puesto énfasis en destacar el rol geométrico de los determinantes como medidas del área y el volumen orientado. Una presentación interesante de los determinantes con ese enfoque puede hallarse en el artículo [5] de Hannah.

3.2.1. Ejercicios

3.2.1. Sean $V, W, Z \in \mathbb{R}^3$. Probar que

a) $\langle Z, V \times W \rangle = \det(Z, V, W)$ (sugerencia: basta probar la igualdad para $Z = E_1, E_2, E_3$ con E_i los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^3).

b) Probar la propiedad cíclica del triple producto:

$$\langle Z, V \times W \rangle = \langle V, W \times Z \rangle = \langle W, Z \times V \rangle.$$

3.2.2. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular, π_s el plano osculador de $C = \text{Im}(\alpha)$ en el punto $\alpha(s)$, generado por $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)$. Probar que

$$\pi_s = \text{gen}\{\alpha'(s), \alpha''(s)\}$$

para todo $s \in I$.

3.2.3. Probar que las fórmulas de Frenet pueden escribirse como

$$\begin{aligned}\mathbf{t}' &= \mathbf{R} \times \mathbf{t} \\ \mathbf{n}' &= \mathbf{R} \times \mathbf{n} \\ \mathbf{b}' &= \mathbf{R} \times \mathbf{b}\end{aligned}$$

donde \mathbf{R} es la curva definida por $\mathbf{R} = -\tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}$. La interpretación “física” de este ejercicio es la siguiente: Cuando un cuerpo rígido (un trompo o una piedra, por ejemplo) gira alrededor de un punto existe un “eje instantáneo de rotación” que es el lugar de los puntos que están fijos es ese instante (velocidad nula). Si pensamos en el triedro de Frenet fijo al cuerpo rígido, el eje instantáneo está dado por \mathbf{R} .

3.2.4. Si α no está parametrizada por longitud de arco, entonces

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = -\frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}.$$

Hallar la curvatura y torsión de las siguientes curvas en \mathbb{R}^3 .

- a) $x = u, y = u^2, z = u^3$.
- b) $x = u, y = \frac{1+u}{u}, z = \frac{1-u^2}{u}$. Notar que $\tau = 0$.
- c) $y = f(x), z = g(x)$.
- d) $x = a(u - \sin(u)), y = a(u - \cos(u)), z = bu$.
- e) $x = a(3u - u^3), y = 3au^2, z = a(3u + u^3)$.

3.2.5. Calcular κ y τ para una hélice cualquiera $\alpha(t) = (a \cos(kt), b \sin(kt), ct)$ (a, b, c, k constantes).

3.2.6. Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$. Probar que si $\langle v, z \rangle = \langle w, z \rangle$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$, entonces $v = w$.

3.2.7. Probar que si v, w son vectores en \mathbb{R}^n entonces valen las igualdades

$$\langle v, w \rangle = w^t \cdot v = v^t \cdot w = \langle w, v \rangle$$

al pensar a v, w como matrices de $n \times 1$ y a sus traspuestos v^t, w^t como matrices de $1 \times n$.

3.2.8. Sea A una transformación lineal que escribimos como matriz T en la base canónica de \mathbb{R}^n , sea T^t la matriz traspuesta que se obtiene cambiando las filas de T por las columnas de T . Probar que

- a) $(T^t)^t = T$.
- b) $(Tv)^t = v^t T^t$ para todo vector v .
- c) $\langle Tv, w \rangle = w^t \cdot T \cdot v = (T^t w)^t \cdot v = \langle v, T^t w \rangle$ para todo par de vectores v, w .

Esta última propiedad permite “pasar para el otro lado” de un producto interno a una transformación lineal cualquiera (trasponiéndola), así por ejemplo

$$\langle v, Tw \rangle = \langle T^t v, w \rangle.$$

3.2.9. Sean T_1, T_2 matrices de $n \times n$. Probar que si para todo par de vectores v, w de \mathbb{R}^n se tiene

$$\langle T_1 v, w \rangle = \langle T_2 v, w \rangle$$

entonces $T_1 = T_2$.

(Sugerencia: ir eligiendo como v, w los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^n).

3.2.10. Una aplicación lineal $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una **transformación ortogonal** si

$$\langle Uv, Uw \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^3.$$

Probar que son equivalentes:

- a) U es una transformación ortogonal.
- b) U es una isometría, o sea U es lineal y $\|Uv\| = \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.
- c) U es inversible y su inversa se calcula como su traspuesta, es decir $U^{-1} = U^t$.
(Sugerencia para b) \Rightarrow a): observar que si vale b) entonces $\langle U(v+w), U(v+w) \rangle = \langle v+w, v+w \rangle$ y deducir que vale a) a partir de ahí).

3.2.11. Probar que toda transformación ortogonal verifica $\det(U) = \pm 1$. ¿Es cierta la recíproca? (dar una prueba o un contraejemplo).

3.2.12. Probar que

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es una transformación ortogonal de \mathbb{R}^2 . Mostrar que U es una simetría alrededor de la recta $y = x$. ¿Qué determinante tiene U ? ¿Preserva la orientación de \mathbb{R}^2 ?

3.2.13. Si $\theta \in [0, 2\pi]$, y

$$U_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

probar que U_θ es ortogonal y preserva la orientación. Mostrar que U es una rotación de ángulo θ alrededor del origen, en sentido positivo.

3.2.14. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ matriz inversible. Probar que para todo $v, w \in \mathbb{R}^3$ vale la identidad

$$A^t((Av) \times (Aw)) = \det(A) v \times w.$$

En particular si U es ortogonal, $Uv \times Uw = \pm U(v \times w)$, con signo positivo si U preserva la orientación, y negativo si la invierte.

Sugerencia: probar que vale la igualdad multiplicando ambos lados contra cualquier $z \in \mathbb{R}^3$, la fórmula del triple producto, y el Ejercicio 3.2.6.

3.2.15. Probar usando lo anterior y el Ejercicio 3.2.4 que la longitud, la curvatura y la torsión de una curva son invariantes por movimientos rígidos.

3.2.16. Si $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva, el **plano normal** en $\alpha(t)$ está dado por la ecuación $\langle \alpha'(t), X - \alpha(t) \rangle = 0$. Probar que la curva dada por

$$x = a \operatorname{sen}^2(t), \quad y = a \operatorname{sen}(t) \cos(t), \quad z = a \cos(t)$$

está sobre una esfera y que todos los planos normales pasan por el origen.

3.2.17. Si α una curva en \mathbb{R}^3 con curvatura y torsión nunca nulas, entonces α está contenida en una esfera si y sólo si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$R^2 + (R')^2 T^2 = A, \quad \text{donde } R = 1/\kappa, \quad T = 1/\tau.$$

3.2.18. Sea $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco, con curvatura nunca nula. Se llama **centro de curvatura de α en s_0** a:

$$\beta(s_0) = \alpha(s_0) + 1/\kappa(s_0) \mathbf{n}(s_0)$$

y se llama **círculo osculador a α en s_0** al círculo de centro $\beta(s_0)$ y radio $\rho(s_0) = |\kappa(s_0)|^{-1}$, contenido en el plano osculador a $\alpha(s_0)$. Probar:

1. Una expresión paramétrica para el círculo oscilador en $\alpha(s_0)$ es

$$\alpha(s_0) + 1/\kappa(s_0) [\cos(\theta) \mathbf{t}(s_0) + (\sin(\theta) + 1) \mathbf{n}(s_0)]$$

2. La curva α y el círculo osculador a α en s_0 tienen contacto de segundo orden.
3. La curva β es la **evoluta** de α y α es la **evolvente** de β . Probar que las tangentes a la evoluta son normales a la evolvente en los puntos respectivos.

3.2.19. Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco, con curvatura y torsión nunca nulas. Sea P un plano que satisface las siguientes condiciones:

1. P contiene la recta tangente en s_0 .
2. Para todo entorno $I \subset \mathbb{R}$ de s_0 , existen puntos de $\alpha(I)$ a ambos lados de P .

Probar que P es el plano osculador de α en s_0 .

3.2.20. Probar que bajo cualquiera de las siguientes condiciones ($\kappa > 0$), la curva es plana:

1. Todos los planos osculadores de la curva pasan por un punto fijo.

2. Todos los planos osculadores son paralelos a un plano dado.

3.2.21. Una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es llamada **hélice** si las tangentes de α forman un ángulo constante con alguna dirección fija. Asumiendo que $\kappa, \tau \neq 0$, probar que:

1. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) α es una hélice.
- b) $\frac{\kappa}{\tau}$ es constante.
- c) Las rectas que contienen $n(s)$ son paralelas a un plano fijo.
- d) Las rectas que contienen $b(s)$ tienen un ángulo constante con una dirección fija.

3.2.22. Probar que $\alpha(s) = (a \cos(s/c), a \sin(s/c), bs/c)$, con $s \in \mathbb{R}$ y a, b, c constantes tales que $c^2 = a^2 + b^2$ es una hélice parametrizada por longitud de arco con $\frac{\kappa}{\tau} = \frac{b}{a}$.

3.2.23. Probar que si la cubica $x = at, y = bt^2, z = t^3$ satisface la condición $2b^2 = 3a$, entonces es una hélice trazada sobre un cono cuyo eje está en el plano xz y forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje x . Hallar la ecuación del cono.

3.2.24. Probar que las tangentes a una hélice cortan un plano normal a su cilindro proyectante en puntos de la evolvente de la base del cilindro.

He intentado evitar las cuentas extensas, siguiendo de esta forma el postulado de Riemann de que las pruebas deben ser dadas a través de ideas y no de cálculos voluminosos.

David Hilbert

En esta parte del texto vamos a trabajar con superficies $S \subset \mathbb{R}^3$, y nos concentraremos en su geometría, en particular en las geodésicas (camino óptimo en S) y la curvatura (como se dobla y se estira S). Para comenzar daremos algunas definiciones.

4.1. Espacio tangente

Definición 4.1.1. Dado $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto conexo, y $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, decimos que

1. φ es suave si es (al menos) de clase C^1 .
2. φ es una *parametrización* suave si además es inyectiva, en ese caso denotamos $S = \text{im}(\varphi) \subset \mathbb{R}^3$, la imagen de φ en el espacio.
3. φ es una parametrización *regular* si $D\varphi_X$ es inyectiva para todo $X = (u, v) \in D = \text{Dom}(\varphi)$. Equivalentemente, si $\varphi = \varphi(u, v)$, entonces φ es regular si y sólo si los vectores $\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v) \in \mathbb{R}^3$ (los índices indican derivadas parciales) son linealmente independientes para todo $(u, v) \in D$.
4. Si φ es una parametrización regular, el subespacio $\text{gen}\{\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)\} \subset \mathbb{R}^3$ lo denominamos *espacio tangente* a S en $p = \varphi(u, v)$ (notar que como φ es regular, es un subespacio de dimensión 2, es decir un plano por el origen). Denotamos a este subespacio como $T_p S$; dando por entendido que

las derivadas parciales están calculadas en (u, v) cuando $p = \varphi(u, v)$, denotamos entonces

$$T_p S = \text{gen}\{\varphi_u, \varphi_v\}.$$

5. Si φ es regular, el *plano* tangente a S en $p \in S$, es $\Pi_p : \lambda\varphi_u(u, v) + \mu\varphi_v(u, v) + \varphi(u, v)$, para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Equivalentemente, $\Pi_p = T_p S + p$. En las ilustraciones del texto, sin embargo, en general no haremos esa distinción.

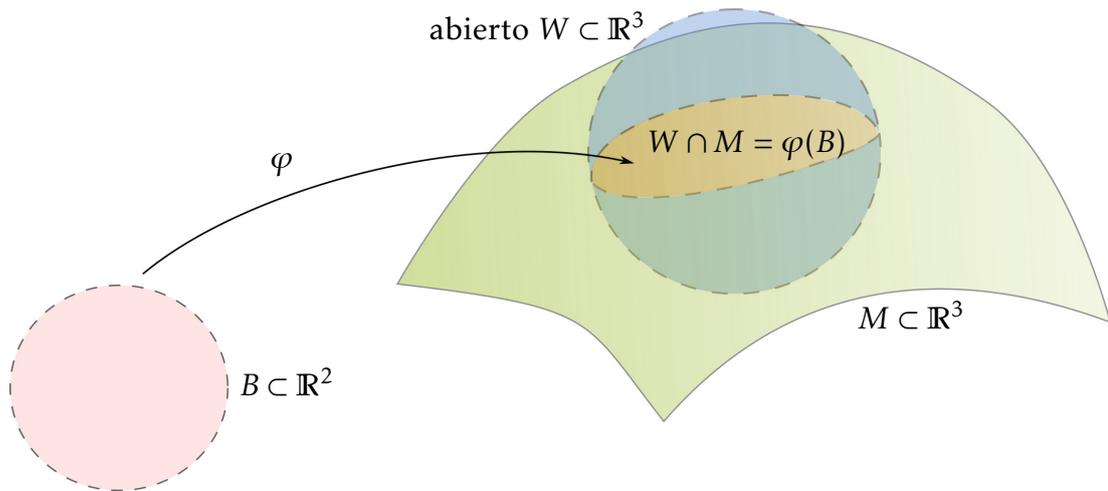


Figura 4.1: Parametrización regular de una superficie

En general, vamos a denotar $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ con lo cual

$$\varphi_u = (x_u, y_u, z_u), \quad \varphi_v = (x_v, y_v, z_v) \quad D\varphi = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

Observación 4.1.2 (Superficies como gráficos). Si $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular, entonces para todo $X \in U$ la matriz diferencial $D\varphi_X$ de φ en $X \in U$ tiene rango máximo, es decir rango 2. Luego de aplicar un difeomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, podemos considerar la nueva parametrización $\psi = T \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, que también resulta regular ya que $D\psi = DT \circ D\varphi$. La superficie así obtenida resulta la superficie transformada

$$T(S) = \text{im}(\psi) = \{T(p) : p \in S\}$$

que es entonces también regular. Fijado $X_0 = (u_0, v_0) \in D$, y eligiendo adecuadamente T , podemos entonces suponer que las primeras dos filas de $D\psi_{X_0}$ son linealmente independientes -por ejemplo, tomando como T una rotación, es decir una transformación ortogonal-. Ahora consideramos $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ (con la x e y de ψ), y observamos que DF_{X_0} es inversible. Por el teorema de la función inversa, y reduciendo U si es necesario, resulta $F : U \rightarrow F(U) = V \subset \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo. Ahora consideramos $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f = pr_z \circ \psi \circ F^{-1}$ que es de clase C^1 , y observamos que para $x, y \in V = F(U)$, se verifica

$$(x, y, f(x, y)) = (F(u, v), f \circ F(u, v)) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \psi(u, v).$$

Esto prueba que en un entorno de $p_0 = \psi(u_0, v_0)$ la superficie regular es el gráfico de una función de clase C^1 .

Lema 4.1.3. Si $S = \text{im}(\varphi) \subset \mathbb{R}^3$ es la imagen de una parametrización regular, entonces φ es abierta relativa, es decir para todo abierto $B \subset U$, existe un abierto $W \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(B) = W \cap S$ (Figura 4.1). Equivalentemente, $\varphi^{-1} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ es continua.

Demostración. Por la observación anterior, y como los enunciados del lema son locales, podemos suponer que S es localmente el gráfico de una función de clase C^1 . En ese caso, si $B \subset U$ es una bola abierta, entonces es inmediato que $\varphi(B) = S \cap \pi^{-1}(B \times \{0\})$ donde $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la proyección al plano $z = 0$ dada por $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$. Como π es continua, $W = \pi^{-1}(B \times \{0\})$ es abierto de \mathbb{R}^3 y se tiene la afirmación del lema. \square

Definición 4.1.4 (Superficies regulares dadas por varias parametrizaciones). Decimos que $S \subset \mathbb{R}^3$ es una *superficie regular de clase C^k* si existen parametrizaciones regulares $\varphi_i : D_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $i = 1, \dots, N$ (N puede ser infinito), de manera tal que, si $U_i = \varphi_i(D_i) = \text{im}(\varphi_i)$, entonces $S = \bigcup_{i=1}^N U_i$ y además para todo i, j

1. $U_i \subset S$ es *abierto relativo*: existe una bola abierta $B_i \subset \mathbb{R}^3$ tal que $U_i = B_i \cap S$.
2. Como $\varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j) = \varphi_j^{-1}(B_i \cap B_j)$, este conjunto es abierto en \mathbb{R}^2 ; requerimos que la *función de transición*

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset D_i \subset \mathbb{R}^2$$

sea de clase C^k .

En muchos casos simplificaremos las discusiones al suponer que S está cubierta con una sola parametrización, es decir que $S = \text{Im}(\varphi)$.

Lema 4.1.5. Si $p \in \text{Im}(\varphi) \subset S$, entonces $T_p S = \text{Im}(D\varphi_{(u,v)})$, donde $p = \varphi(u, v)$. Es decir el rango de la diferencial de φ en $X = (u, v)$ es el espacio tangente a S en p .

Demostración. Primero observemos que si $z \in \text{Im}(D\varphi_{(u,v)})$, entonces existe $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ de manera tal que $z = D\varphi_{(u,v)}w$. Esto es

$$\begin{aligned} z = D\varphi(w) &= \begin{pmatrix} | & | \\ \varphi_u & \varphi_v \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= (w_1, w_2) \begin{pmatrix} - & \varphi_u & - \\ - & \varphi_v & - \end{pmatrix} = w_1 \varphi_u + w_2 \varphi_v, \end{aligned}$$

luego $z \in T_p S = \text{gen}\{\varphi_u, \varphi_v\}$. Recíprocamente, si $z = a\varphi_u + b\varphi_v \in T_p S$, entonces tomando $w = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, se tiene $z = D\varphi(w) \in \text{Im}(D\varphi)$. \square

El lema anterior caracteriza de manera práctica el espacio tangente. Otra caracterización que usaremos bastante, es la dada por curvas.

Observemos primero que como φ es suave e inyectiva, toda curva $\gamma \subset S = \text{Im}(\varphi)$ proviene de una curva $\Gamma \subset D = \text{Dom}(\varphi)$, es decir $\gamma = \varphi \circ \Gamma$, y además por la regla de la cadena $\gamma' = D\varphi_{\Gamma} \Gamma'$, luego $\gamma' \in \text{Im}(D\varphi_{\Gamma})$, lo que nos asegura que

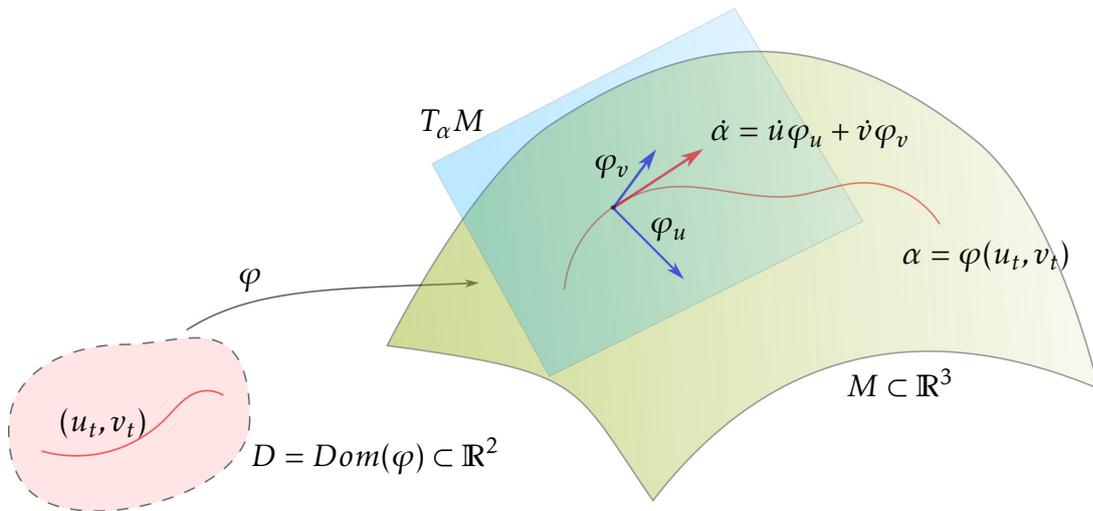
$$\gamma' \in T_{\gamma} S.$$

Es decir que la velocidad de una curva dentro S , siempre es tangente a la superficie.

Lema 4.1.6. Si $p \in S$ superficie regular, entonces

$$T_p S = \{\gamma'(0) : \gamma \subset S, \gamma(0) = p\}.$$

Es decir, el espacio tangente en p se obtiene considerando todas las velocidades de curvas en S que pasan por p (Figura 4.2).

Figura 4.2: Vector genérico $\dot{\alpha} \in T_{\alpha}M$

Demostración. Ya vimos que todas las velocidades de curvas que pasan por p son vectores tangentes a S . Recíprocamente, tomemos $v \in T_p$, entonces existe $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $v = D\varphi_X w$ si $\varphi(X) = p$. Consideremos la curva $\Gamma(t) = X + tw$ dentro de $D = \text{Dom}(\varphi)$, definida para $|t| < \varepsilon$ pues $\Gamma(0) = X \in D$, y D es abierto en \mathbb{R}^2 . Consideremos entonces $\gamma = \varphi \circ \Gamma$, esto es $\gamma(t) = \varphi(\Gamma(t))$. Entonces claramente $\gamma \subset S = \text{Im}(\varphi)$, $\gamma(0) = \varphi(X) = p$ y además

$$\gamma'(0) = D\varphi_{\Gamma(0)}\Gamma'(0) = D\varphi_X w = v.$$

Hemos probado que v es la velocidad inicial de la curva $\gamma \subset S$. \square

Definición 4.1.7. Diremos que una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es *cerrada* si S es la frontera (o cáscara) de un volumen acotado $W \subset \mathbb{R}^3$. En ese caso denotamos $S = \partial W$.

4.1.1. Ejercicios

4.1.1. Parametrizar las siguientes superficies y hacer un gráfico aproximado en cada caso:

- | | |
|--|--|
| a) $z = 3$, con $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ | b) $x + z = 2$, con $-2 \leq y \leq 3, x, z \geq 0$ |
| c) $x + y + z = 1$, en el 1 ^{er} octante | d) $x^2 + y^2 = 4$, con $y \geq 0$ y $-1 \leq z \leq 1$ |
| e) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, en el 1 ^{er} octante | f) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, con $y \geq 0$ |
| g) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, con $z \leq 5$ | h) $z = y^2$, con $x^2 + y^2 \leq 1$ |

4.1.2. Parametrizar las siguientes superficies ¿Cuáles son superficies cerradas? Indicar el borde de las que no lo sean.

a) $x^2 + z^2 = 3$, con $-1 \leq y \leq 1$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

c) $z = x^2 + y^2$, con $z \leq 5$

d) $y^2 + 4z^2 = 1$, con $-2 \leq x \leq 3$

e) $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1$

f) $z = 5 - x^2$, con $z \geq 0$ y $-1 \leq y \leq 1$

g) la superficie frontera del sólido definido por el plano $x+y+z = 1$ en el primer octante.

h) la superficie frontera del sólido definido por $z \leq 5 - x^2 - y^2$ y $z \geq 0$.

4.2. Funciones en superficies

Definición 4.2.1 (Continuidad de funciones entre superficies). Dadas dos superficies regulares $M, S \subset \mathbb{R}^3$, diremos que una función $f : M \rightarrow S$ es *continua* si para todo punto $p \in M$ y toda sucesión $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ tal que $p_n \rightarrow p$, se verifica $f(p_n) \rightarrow f(p)$.

Invitamos al lector a verificar que esto es equivalente a pedir que la preimagen de todo abierto relativo $W \subset S$ ($W = S \cap B$ con $B \subset \mathbb{R}^3$ abierto) es un abierto relativo de M .

Para definir diferenciabilidad, vamos a usar las parametrizaciones:

Definición 4.2.2 (Funciones diferenciables entre superficies). Sean $\varphi : D \rightarrow M$, $\phi : D^* \rightarrow S$ parametrizaciones regulares de M, S respectivamente y $f : M \rightarrow S$ continua. Sea $p \in U = \text{Im}(\varphi) \subset M$, $f(p) \in V = \text{Im}(\phi) \subset S$. Consideremos $W = f^{-1}(V) \cap U = \{q \in U : f(q) \in V\}$, que es un abierto no vacío de M si f es continua, y consideremos $\tilde{D} = \varphi^{-1}(W) \subset D$. Decimos que f es de clase C^k en W si

$$\phi^{-1} \circ f \circ \varphi : \tilde{D} \rightarrow D^*$$

es una función de clase C^k en el abierto $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^2$.

§ Puede verificarse fácilmente que esta definición no depende de las parametrizaciones regulares elegidas, mientras estas sean de clase C^k .

Definición 4.2.3. Sean S, M superficies regulares, $f : S \rightarrow M$ de clase C^1 . Para $p \in S$ y $\varphi : U \rightarrow S$ parametrización alrededor de p , definimos $Df_p : T_p S \rightarrow T_{f(p)} M$ como $Df_p v = D(f \circ \varphi)_X w$ si $v = D\varphi_X w \in T_p S$ y $p = \varphi(X)$. Esta se conoce como la *diferencial de f en p* .

Lema 4.2.4. Si $f : S \rightarrow M$ es C^1 , y $\alpha \subset S$ es de clase C^1 con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$, se tiene $Df_p v = (f \circ \alpha)'(0)$. Además $Df_p : T_p S \rightarrow T_{f(p)} M$ es transformación lineal.

Demostración. Si $p = \varphi(X)$, escribimos $\alpha = \varphi \circ \beta$ para $\beta \subset \text{Dom}(\varphi)$. Entonces si $v = D\varphi_X w \in T_p S$, como $v = \alpha'(0) = D\varphi_X \beta'(0)$ y $D\varphi_X$ es inyectiva, debe ser $w = \beta'(0)$. Luego

$$Df_p v = D(f \circ \varphi)_X w = (f \circ \varphi \circ \beta)'(0) = (f \circ \alpha)'(0)$$

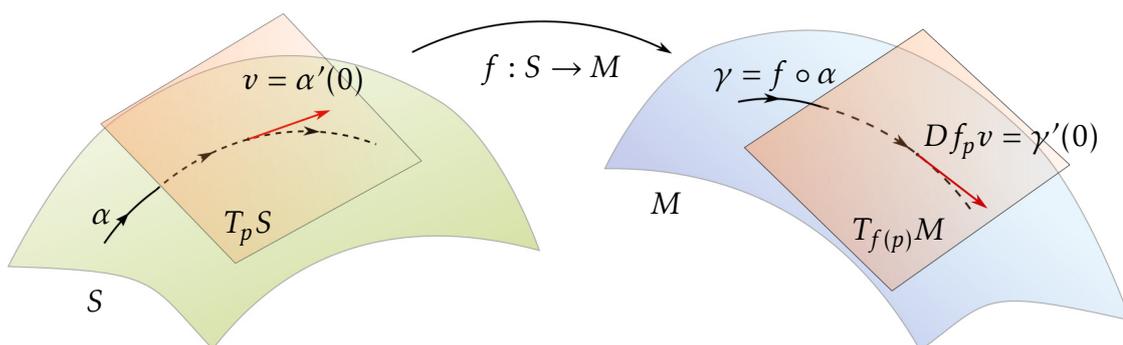


Figura 4.3: Función suave $f : S \rightarrow M$ entre superficies y su diferencial

y esto prueba la primera afirmación. Ahora si $v_i = D\varphi_X w_i$ entonces $v_1 + \lambda v_2 = D\varphi_X(w_1 + \lambda w_2) = D\varphi$ y entonces

$$Df_p(v_1 + \lambda v_2) = D(f \circ \varphi)_X(w_1 + \lambda w_2) = D(f \circ \varphi)_X w_1 + \lambda D(f \circ \varphi)_X w_2 = Df_p v_1 + \lambda Df_p v_2,$$

lo que prueba que Df_p es transformación lineal entre los respectivos espacios tangentes. \square

Problema 4.2.5. Sean S, M superficies regulares, $f : S \rightarrow M$ de clase C^1 . Probar

1. Df_p no depende de la parametrización φ elegida para definirla.
2. Df_p es inversible $\Leftrightarrow f$ es localmente inversible y f^{-1} es de clase C^1 .
3. Si Df_p es inversible entonces existe un entorno $W \subset U$ tal que $f \circ \varphi : W \rightarrow M$ es parametrización regular de M en un entorno de $f(p)$.
4. Si $f : S \rightarrow M$, $g : M \rightarrow N$ son dos funciones entre superficies regulares, la composición también es una función entre superficies regulares $g \circ f : S \rightarrow N$, y vale la regla de la cadena

$$D(g \circ f)_p v = Dg_{f(p)} Df_p v.$$

4.2.1. Campos vectoriales en superficies y flujo de un campo

Definición 4.2.6 (Campos vectoriales). Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular.

Una función $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $X(p) \in T_p M$ para todo $p \in M$ se denomina *campo vectorial en M* . Decimos que X es de clase C^k en un entorno de p cuando $X \circ \varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ lo es, para alguna parametrización $\varphi : D \rightarrow \varphi(D) \subset M$ tal que

$U = \varphi(D)$ es entorno de p . Decimos que X es de clase C^k en M cuando este entorno existe para todo $p \in M$. El conjunto de los campos suaves (de clase C^1) en M lo denotamos $\mathfrak{X}(M)$. Es habitual denotar X_p (y no $X(p)$) para $X \in \mathfrak{X}(M)$.

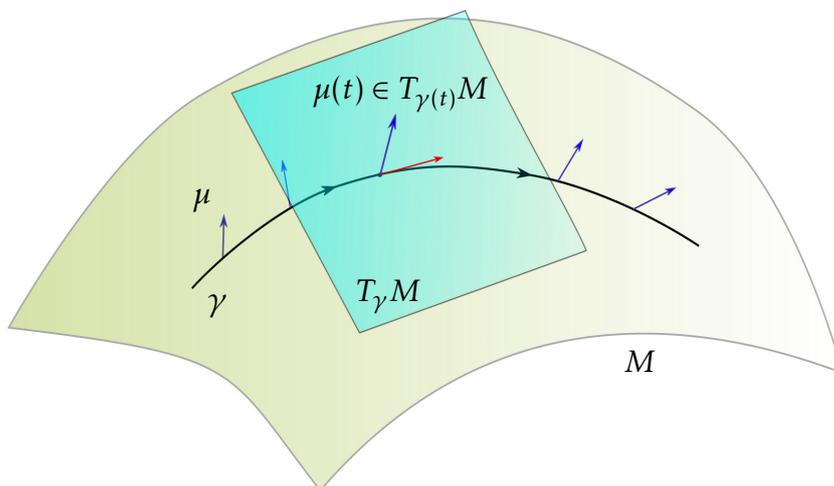


Figura 4.4: Campo μ a lo largo de la curva γ

Dada una curva $\gamma : I \rightarrow M$, decimos que $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un *campo a lo largo de γ* si $\mu(t) \in T_{\gamma(t)}M$ para todo $t \in I$ (Figura 4.4). Si consideramos $\dot{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inmediato por la discusión previa al Lema 4.1.6 que $\dot{\gamma}$ es un campo a lo largo de γ , denominado *campo de velocidades de γ* .

§ Notemos también que si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y, entonces $\mu = X \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo a lo largo de γ : en efecto $\mu(t) = X(\gamma(t)) \in T_{\gamma(t)}M$ para todo $t \in I$ pues X es campo vectorial. Recíprocamente, puede probarse que todo campo μ a lo largo de una curva puede "engordarse" a un entorno abierto U de γ en M para que $\mu = X|_\gamma$.

Definición 4.2.7 (Flujo de un campo vectorial). El *flujo* en $p \in M$ de un campo en M es la curva solución $\alpha_p^X : I_p \rightarrow M$ del problema dado por la ecuación diferencial

$$\dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t)), \quad \alpha(0) = p,$$

donde $I_p = (t_p^-, t_p^+) \subset \mathbb{R}$ es algún intervalo alrededor de $t = 0$. Por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias (ver Teorema 5.1.6), este problema tiene siempre alguna solución en un intervalo abierto alrededor de $t = 0$, y denotamos I_p al intervalo maximal de definición de la solución. Por el mismo teorema, la solución α depende suavemente de las condiciones iniciales, siempre que el campo sea C^1 . Entonces para cada abierto acotado $U \subset M$,

hay un intervalo común de definición de las α_p^X , y obtenemos una función de clase C^1 dada por $\alpha^X : I \times U \rightarrow M$ dada por $\alpha^X(t, p) = \alpha_p^X(t)$ denominada *flujo global* o sencillamente flujo de X en M .

Definición 4.2.8 (Corchete de Lie). Si X, Y son campos en M , en general $p \mapsto DX_p(Y_p) \in \mathbb{R}^3$ (la derivada direccional de X en la dirección de Y) no tienen por qué volver a ser tangente a M en p , luego no define un campo. Sin embargo, puede probarse que si X, Y son de clase C^2 entonces la operación

$$[X, Y](p) = DY_p(X_p) - DX_p(Y_p)$$

conocida como *corchete de Lie*, define un nuevo campo en M .

Problema 4.2.9. Sean X, Y, Z campos de clase C^2 en M . Probar que

1. $[X, Y]$ es un campo en M , que verifica $[X, Y] = -[Y, X]$ (antisimetría).

2. Para toda $f, g \in C^1(M)$ se verifica

$$[gX, fY] = gf[X, Y], \quad [X+Z, Y] = [X, Y] + [Z, Y], \quad [X, Y+Z] = [X, Y] + [X, Z],$$

y por ello se suele decir que el corchete de Lie es $C^1(M)$ bilineal.

3. Se verifica la *identidad de Jacobi*

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

4.2.2. Normal, área, integrales de superficie

Dada una superficie regular $S = \text{im}(\varphi) \subset \mathbb{R}^3$, como φ_u, φ_v generan el espacio tangente a S en $p \in S$, resulta que el vector $N_p = \varphi_u \times \varphi_v$ es no nulo y ortogonal al subespacio $T_p S$. Decimos que N_p es una *normal de S en p* .

Definición 4.2.10. Diremos que la superficie S es *orientable* si existe una función continua y nunca nula $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Normalizando el vector normal (dividiendo por su norma), podemos suponer que $N : S \rightarrow S^2$, para S^2 la esfera unitaria de \mathbb{R} (centrada en el origen). Para cada $p \in S$, el vector normal en p será

N_p , un vector perpendicular a la superficie en el punto p (es decir perpendicular a $T_p S$) y de norma 1. En ese caso la superficie tiene dos *orientaciones*, dadas por elegir la normal de uno u otro lado.

En el caso de superficies cerradas, podemos elegir siempre la *normal exterior* que es la que apunta hacia afuera del volumen W tal que $S = \partial W$. En ese caso diremos que $S = \partial W$ tiene la orientación *positiva*, y lo denotaremos como $S = \partial W^+$.

Si $\varphi : \text{Dom}(\varphi) \rightarrow S$ es una parametrización de S entonces como $\varphi_u \times \varphi_v$ también es perpendicular al espacio $T_p S$ correspondiente, debe ser $\varphi_u \times \varphi_v$ un múltiplo de N_p . Si φ es regular (salvo quizás en los bordes de S o en puntos aislados del interior de S o en regiones de S que no separen a S en 2 partes disjuntas) entonces se puede probar que $\varphi_u \times \varphi_v$ siempre apunta para el mismo lado de S .

Es decir, si S está orientado para determinado lado (uno de los 2 lados de S) entonces hay 2 casos posibles:

1. $\varphi_u \times \varphi_v$ apunta para el lado en el que está orientada S para todo $(u, v) \in \text{Dom}(\varphi)$ donde $\varphi_u \times \varphi_v \neq (0, 0, 0)$ (en cuyo caso se dice que φ **conserva** o **preserva** la orientación de S). En este caso vale la igualdad

$$N_{\varphi(u,v)} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}.$$

2. $\varphi_u \times \varphi_v$ apunta para el lado opuesto al que está orientada S para todo $(u, v) \in \text{Dom}(\varphi)$ donde $\varphi_u \times \varphi_v \neq (0, 0, 0)$ (en cuyo caso se dice que φ **invierte** la orientación de S). En este caso vale la igualdad

$$N_{\varphi(u,v)} = -\frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}.$$

O sea que para una parametrización regular φ de la superficie (orientable) S , el vector $\varphi_u \times \varphi_v$ apunta siempre para el mismo lado de S .

Una prueba de este hecho se puede obtener considerando una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ que una 2 puntos de S donde φ es regular, digamos $p = \alpha(a)$ y $q = \alpha(b)$. Allí consideramos en cada $\alpha(t)$ los valores de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ para

$f(t) = \langle N_{\alpha(t)}, \varphi_u \times \varphi_v \rangle$ (donde $\varphi_u \times \varphi_v = \varphi_u(u(t), v(t)) \times \varphi_v(u(t), v(t))$) es el correspondiente al punto $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$. Supongamos que en $p = \alpha(a)$ resulta que $N_{\alpha(t)}$ y $\varphi_u \times \varphi_v$ apuntan para el mismo lado, entonces la función

$$f(a) = \langle N_{\alpha(t)}, \varphi_u \times \varphi_v \rangle = \|N_{\alpha(t)}\| \|\varphi_u \times \varphi_v\| \cos(\theta) > 0 \quad (4.1)$$

ya que el ángulo θ entre los vectores debe ser $\theta = 0$ (porque ambos vectores son perpendiculares al mismo plano $T_p S$ y apuntan en la misma dirección).

Si el punto $q = \alpha(b)$ y fuera $f(b) < 0$ la función f (que es continua) debería anularse en un $c \in (a, b)$. Pero entonces en el punto $\alpha(c)$ debería ser $\|\varphi_u \times \varphi_v\| = 0$ ya que es la única manera que se anule $f(c)$ (observar la expresión (4.1) para convencerse). Luego, φ no podría ser regular en un punto de S sobre la curva α , en contra de lo supuesto. Por lo tanto, debería valer $f(b) > 0$. Por lo que $\varphi_u \times \varphi_v$ en $q = \alpha(b)$ también apunta para el mismo lado que $N_{\alpha(b)}$ ya que

$$f(b) = \langle N_{\alpha(b)}, \varphi_u \times \varphi_v \rangle = \|N_{\alpha(b)}\| \|\varphi_u \times \varphi_v\| \cos(\theta)$$

y por lo comentado antes $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ son los únicos valores posibles.

Definición 4.2.11. El *elemento de área* de la superficie S (y una parametrización φ) es la función

$$dS = \|\varphi_u \times \varphi_v\| : \text{Dom}(\varphi) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Notemos que es una función estrictamente positiva si φ es regular, ya que el producto vectorial sólo se puede anular si los vectores son linealmente dependientes.

Definimos el *área* o medida de la superficie orientable $S = \text{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}^3$ como la integral del elemento de área, esto es

$$\mu(S) = \iint_{\text{Dom}(\varphi)} \|\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)\| \, du \, dv.$$

Con mayor generalidad, dada una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ (en particular, si tenemos $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y miramos su restricción), definimos

$$\iint_S f = \iint_{\text{Dom}(\varphi)} (f \circ \varphi)(u, v) \|\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)\| \, du \, dv.$$

Asimismo, si $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo, definimos el *flujo de F a través de S* (para S una superficie orientada) como

$$\iint_S F = \iint_{\text{Dom}(\varphi)} \langle (F \circ \varphi)(u, v), \varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v) \rangle \, du \, dv.$$

Si N denota la normal unitaria de S , notemos que tomando $f = \langle F, N \rangle$, la tercer definición es un caso particular de la segunda.

Y que tomando $f = 1$ la definición de área es un caso particular también de la segunda definición, es decir $\mu(S) = \iint_S 1$.

Veamos que estas definiciones son intrínsecas a la superficie, y no dependen de la parametrización elegida. Para probarlo, por las observaciones recién hechas, basta ver que la segunda definición, la de integral de superficie de funciones escalares f , no depende de la parametrización. Primero enunciemos un lema que usaremos, de interés independiente:

Lema 4.2.12. *Sea $\varphi : D \rightarrow S$ es una parametrización suave, entonces*

$$\det(D\varphi^t D\varphi) = \|\varphi_u \times \varphi_v\|^2.$$

Demostración. Primero calculamos

$$D\varphi^t D\varphi = \begin{pmatrix} -\varphi_u^- \\ -\varphi_v^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | \\ \varphi_u & \varphi_v \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_u \cdot \varphi_u & \varphi_u \cdot \varphi_v \\ \varphi_v \cdot \varphi_u & \varphi_v \cdot \varphi_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\varphi_u\|^2 & \varphi_u \cdot \varphi_v \\ \varphi_v \cdot \varphi_u & \|\varphi_v\|^2 \end{pmatrix}.$$

Luego $\det(D\varphi^t D\varphi) = \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2$, que por el Lema 3.1.6, es igual a la cantidad $\|\varphi_u \times \varphi_v\|^2$. \square

Ahora si, veamos que las integrales de superficie no dependen de la parametrización elegida para calcularlas.

Proposición 4.2.13. Sea $S = \text{Im}(\varphi) = \text{Im}(\Phi) \subset \mathbb{R}^3$ con $\varphi : D \rightarrow S$, $\Phi : D^* \rightarrow S$ parametrizaciones regulares de S . Entonces para toda función continua $f : S \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\iint_D (f \circ \varphi) \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, du \, dv = \iint_{D^*} (f \circ \Phi) \|\Phi_x \times \Phi_y\| \, dx \, dy.$$

Demostración. Consideramos la función $T : D^* \rightarrow D$ dada por $T = \varphi^{-1} \circ \Phi$. Notar que por ser ambas funciones inyectivas, T es inyectiva y claramente $D = T(D^*)$. Por otro lado, esta función es C^1 por ser ambas parametrizaciones regulares. Llamemos $(u, v) \in D$ a las variables en D , llamemos $(x, y) \in D^*$ a las variables en D^* . Claramente $T(x, y) = (u, v)$, luego podemos calcular el determinante Jacobiano $JT(x, y) \, dx \, dy = du \, dv$. El teorema de cambio de variables para dominios en \mathbb{R}^2 nos dice que

$$\iint_{D^*} (g \circ T)(x, y) JT(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D=T(D^*)} g(u, v) \, du \, dv \quad (4.2)$$

para toda función continua $g : D \rightarrow \mathbb{R}$. En particular, podemos tomar

$$g(u, v) = f(\varphi(u, v)) \|\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)\|,$$

con lo cual

$$\iint_{D=T(D^*)} g(u, v) \, du \, dv = \iint_D (f \circ \varphi) \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, du \, dv. \quad (4.3)$$

Por otro lado, como $\varphi(T(x, y)) = \Phi(x, y)$, diferenciando obtenemos

$$D\varphi(T(x, y))DT(x, y) = D\Phi(x, y),$$

y trasponiendo las matrices $DT(x, y)^t D\varphi(T(x, y))^t = D\Phi(x, y)^t$. Multiplicando ambas expresiones se obtiene

$$DT(x, y)^t D\varphi(T(x, y))^t D\varphi(T(x, y))DT(x, y) = D\Phi(x, y)^t D\Phi(x, y),$$

omitiendo por un momento los puntos donde están evaluadas estas matrices obtuvimos

$$DT^t D\varphi^t D\varphi DT = D\Phi^t D\Phi.$$

Tomando determinante a ambos lados de la igualdad, llegamos a que

$$\det(DT)^2 \det(D\varphi^t D\varphi) = \det(D\Phi^t D\Phi).$$

Usando el lema anterior y tomando raíz cuadrada, obtenemos

$$|\det(DT)| \|\varphi_u \times \varphi_v\| = \|\Phi_x \times \Phi_y\|,$$

o más precisamente

$$JT(x, y) \|(\varphi_u \times \varphi_v)(T(x, y))\| = \|(\Phi_x \times \Phi_y)(x, y)\|. \quad (4.4)$$

Luego, como

$$\begin{aligned} g(T(x, y)) &= f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \Phi(x, y) \|(\varphi_u \times \varphi_v)(T(x, y))\| \\ &= (f \circ \Phi)(x, y) \|(\varphi_u \times \varphi_v)(T(x, y))\|, \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \iint_{D^*} (g \circ T)(x, y) JT(x, y) dx dy &= \iint_{D^*} (f \circ \Phi)(x, y) \|(\varphi_u \times \varphi_v)(T(x, y))\| JT(x, y) \\ &= \iint_{D^*} (f \circ \Phi)(x, y) \|(\Phi_x \times \Phi_y)(x, y)\| dx dy \end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de lo que obtuvimos en (4.4). Resumiendo,

$$\iint_{D^*} (g \circ T)(x, y) JT(x, y) dx dy = \iint_{D^*} (f \circ \Phi) \|(\Phi_x \times \Phi_y)\| dx dy. \quad (4.5)$$

Combinando las igualdades (4.2), (4.3) y (4.5) se obtiene la igualdad enunciada en la proposición. \square

4.2.3. Ejercicios

4.2.3. Sea f una función C^1 en un recinto elemental D . Calcular $\psi_u \times \psi_v$ en los siguientes casos:

a) $\psi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\psi(u, v) = (u, f(u, v), v)$.

b) $\psi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\psi(u, v) = (f(u, v), u, v)$.

4.2.4. Para las superficies de los Ejercicios 4.1.1 y 4.1.2 que se indican, utilizar las parametrizaciones halladas para calcular, si es posible, los planos tangentes y vectores normales en los puntos P señalados. En lo posible, graficar aproximadamente las superficies, los planos tangentes y los vectores normales.

Superficies del Ejercicio 4.1.1:

a) en $P = (1/2, 1/2, 3)$, c) en $P = (1/3, 1/3, 1/3)$, d) en $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, f) en $P = (0, 2, 0)$, g) en $P = (1, 1, \sqrt{2})$, g) en $P = (0, 0, 0)$ y h) en $P = (0, 0, 0)$.

Superficies del Ejercicio 4.1.2:

c) en $P = (0, 0, -2)$, c) en $P = (0, 0, 0)$, d) en $P = (0, 1, 0)$, f) en $P = (0, 0, 5)$ y h) en $P = (0, 0, 0)$.

4.2.5. Calcular el área de las superficies indicadas en el ejercicio anterior - exceptuando h) del Ejercicio 4.1.1, y f) del Ejercicio 4.1.2-.

4.2.6. La **proyección estereográfica** permite definir un sistema de coordenadas alternativo para la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Para esto, considérese una esfera descrita por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y sea $N = (0, 0, 1)$ su "polo norte". Se define π como $\pi(x, y, z) = q \in \mathbb{R}^2$ si q es la intersección de la línea que pasa por N y $P = (x, y, z)$ con el plano $z = 0$.

a) Hallar una fórmula para $\pi(x, y, z)$ con (x, y, z) en esta esfera.

b) Mostrar que una parametrización de S^2 está dada por

$$\varphi(u, v) = \pi^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, 1 - \frac{2}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

c) Mostrar que, usando la proyección estereográfica es posible cubrir la esfera con dos parametrizaciones.

4.2.7. Calcular el área de las siguientes superficies:

a) S la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ que verifica $-x \leq y \leq x$, $0 \leq z \leq 1$.

b) S superficie frontera del cuerpo definido por $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

4.3. Primera forma fundamental

Para trabajar con superficies parametrizadas $M = \text{Im}(\varphi)$, resulta muy útil considerar los *coeficientes de la primera forma fundamental* dados por

$$E = \varphi_u \cdot \varphi_u = \|\varphi_u\|^2, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v, \quad G = \varphi_v \cdot \varphi_v = \|\varphi_v\|^2,$$

donde hay que notar que $E, F, G : D = \text{Dom}(\varphi) \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de las variables $(u, v) \in D$ y además *dependen de la parametrización φ elegida* para recorrer M .

Definimos la *matriz de la primera forma fundamental* como

$$\mathbf{I}_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

y también (con un pequeño abuso de notación) se suele denotar a la forma bilineal asociada de la misma manera:

$$\mathbf{I}_p(v, w) = \langle \mathbf{I}_p v, w \rangle,$$

para $v, w \in \mathbb{R}^2$.

Observación 4.3.1. Notemos que, como $D\varphi = \begin{pmatrix} | & | \\ \varphi_u & \varphi_v \\ | & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$, entonces

$$D\varphi^T D\varphi = \begin{pmatrix} -\varphi_u^- \\ -\varphi_v^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | \\ \varphi_u & \varphi_v \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_u \cdot \varphi_u & \varphi_u \cdot \varphi_v \\ \varphi_v \cdot \varphi_u & \varphi_v \cdot \varphi_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

Luego si $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ y v_1, v_2 son sus imágenes en $T_p M$ por la diferencial de φ , se tiene

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle D\varphi w_1, D\varphi w_2 \rangle = \langle D\varphi^T D\varphi w_1, w_2 \rangle = \langle \mathbf{I} w_1, w_2 \rangle.$$

Es decir, la primera forma fundamental relaciona la métrica en $D = \text{Dom}(\varphi) \subset \mathbb{R}^2$ con la métrica en $M = \text{im}(\varphi)$.

Si $\Gamma \subset D$ es una curva suave y $\gamma = \varphi \circ \Gamma \subset M$ es su imagen en M , entonces

$$\|\gamma'\|^2 = \|D\varphi\Gamma'\|^2 = \langle D\varphi\Gamma', D\varphi\Gamma' \rangle = \langle \mathbf{I}_\gamma \Gamma', \Gamma' \rangle = \mathbf{I}_\gamma(\Gamma', \Gamma'). \quad (4.6)$$

Observación 4.3.2. La matriz de la primera forma fundamental, para una parametrización regular φ , siempre es inversible. Esto es porque

$$EG - F^2 = \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 = A(\varphi_u, \varphi_v)^2$$

donde A denota el área del paralelogramo generado por estos vectores (ver (3.1.6)). De acuerdo a las fórmulas obtenidas, esta área también se puede calcular como la norma del producto vectorial, es decir

$$A(\varphi_u, \varphi_v) = \|\varphi_u \times \varphi_v\|.$$

Combinando esta identidad con la anterior, tenemos

$$EG - F^2 = \|\varphi_u \times \varphi_v\|^2 \geq 0,$$

y sólo puede anularse cuando $\varphi_u \times \varphi_v = 0 \in T_p M$. Pero esto es posible si y sólo si φ_u, φ_v están alineados, lo cual contradice que φ sea regular.

Notemos que como $E > 0$ y también $\det(\mathbf{I}) > 0$, la matriz \mathbf{I} es siempre *definida positiva*. Equivalentemente,

$$\langle \mathbf{I}_p w, w \rangle > 0$$

para todo $w \in \mathbb{R}^2$ no nulo.

Esta última observación la podríamos haber obtenido también mediante la fórmula (4.6), reescrita poniendo $\Gamma'(0) = w \in \mathbb{R}^2$, $v = D\varphi_{\Gamma(0)}(w) = D\varphi_{\Gamma(0)}\Gamma'(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \Gamma)(0) = \gamma'(0)$, pues en ese caso

$$\langle \mathbf{I}_p w, w \rangle = \langle \mathbf{I}_{\gamma(0)}\Gamma'(0), \Gamma'(0) \rangle = \|\gamma'(0)\|^2 = \|v\|^2 > 0$$

siempre que $v = D\varphi(w)$ sea no nulo (y como $D\varphi$ es inyectiva, esto ocurre si y sólo si $w \in \mathbb{R}^2$ es no nulo).

4.3.1. Ejercicios

4.3.8. Sean S, M superficies regulares, $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 y $f = F|_S$. Si $\text{im}(f) \subset M$, probar que f es C^1 entre superficies y que para todo $p \in S$, $Df_p = DF_p|_{T_p S}$.

4.3.9. Dada una superficie parametrizada por $\varphi(u, v)$, los coeficientes de la primera forma fundamental son $E = \varphi_u \cdot \varphi_u$, $F = \varphi_u \cdot \varphi_v$, $G = \varphi_v \cdot \varphi_v$. Calcular la primera forma fundamental de las siguientes superficies parametrizadas en los puntos regulares ($a, b, c > 0$):

- a) Plano
- b) Esfera de radio $R > 0$, usando coordenadas esféricas.
- c) Esfera de radio 1, usando las coordenadas de la proyección estereográfica.
- d) Elipsoide: $\varphi(u, v) = (a \cos(u) \cos(v), b \cos(u) \sin(v), c \sin(u))$
- e) Paraboloides elíptico: $\varphi(u, v) = (au \cos(v), bu \sin(v), u^2)$
- f) Paraboloides hiperbólico: $\varphi(u, v) = (au \cosh(v), bu \sinh(v), u^2)$
- g) Hiperboloides de dos hojas: $\varphi(u, v) = (a \sinh(u) \cos(v), b \sinh(u) \sin(v), c \cosh(u))$.

4.3.10. El toro de radios $a > r > 0$ centrado en el origen está dado por la superficie de nivel

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2\}$$

Hacer un gráfico aproximado y verificar que $f : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

es una parametrización regular de T . Hallar E, F, G .

4.3.11. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie de revolución que se consigue rotando la curva $y = f(z) > 0$, para $z \in (a, b)$ alrededor del eje z . Probar que si f es C^2 entonces S es una superficie regular. Dar una parametrización, hallar su plano tangente y los coeficientes E, F, G .

4.3.12. Mostrar que toda superficie de revolución ($y = f(z) > 0$ rotada alrededor del eje z) puede ser reparametrizada de manera que queden $E = E(v), F = 0$ y $G = 1$.

4.3.13. La *pseudoesfera* es la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva tractriz alrededor del eje z . Dar una parametrización de la pseudoesfera y hallar sus coeficientes de la primera forma fundamental.

4.3.14. La cinta de Möbius se obtiene rotando un segmento alrededor de una circunferencia. A medida que recorre la circunferencia el segmento rota de manera que al haber dado una vuelta a la circunferencia, el segmento tiene la dirección opuesta con la que empezó. Hacer una cinta de Möbius usando una tira de papel.

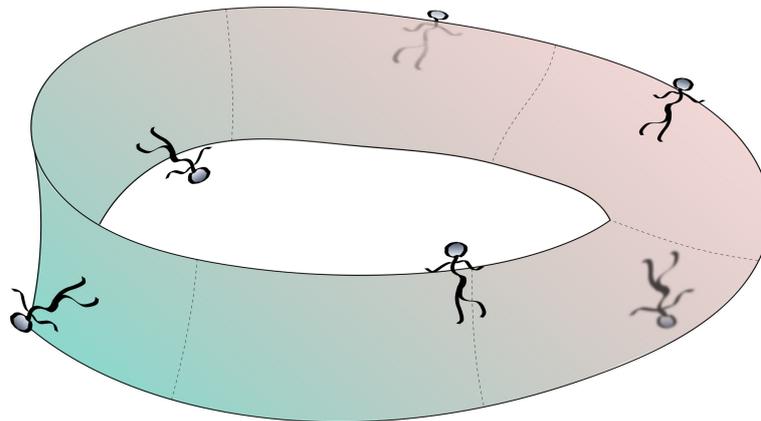


Figura 4.5: Cinta de Möbius

4.3.15. Sea $A = (0, 2\pi) \times (-1, 1)$ y $f_1, f_2 : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por

$$f_1(u, v) = ([2 + v \sen(u/2)] \sen(u), [2 + v \sen(u/2)] \cos(u), v \cos(u/2))$$

$$f_2(u, v) = ([2 + v \sen(u/2 + \pi/4)] \cos(u), -[2 + v \sen(u/2 + \pi/4)] \sen(u), v \cos(u/2 + \pi/4))$$

Sea $M = f_1(A) \cup f_2(A)$. Probar que M es una superficie regular de \mathbb{R}^3 y notar que es una cinta de Möbius. Hallar E, F, G .

4.3.16. Las curvas coordenadas de una parametrización $\varphi(u, v)$ forman una **red de Tchebyshev** si las longitudes de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales. Mostrar que si $\varphi \in C^2$, entonces una condición necesaria y suficiente para esto es que $\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0$.

4.3.17. Probar que si las curvas coordenadas de una parametrización $\varphi \in C^2$ forman una red de Tchebyshev entonces es posible reparametrizar el entorno coordenado de modo que los nuevos coeficientes de la primera forma fundamental sean $E = 1, F = \cos(\theta), G = 1$, donde θ es el ángulo entre las curvas coordenadas.

4.3.18. Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, con S superficie regular parametrizada por φ . Sea $\text{grad}(f)_p$ el único vector tal que $\langle \text{grad}(f)_p, z \rangle = Df_p(z)$ para todo $z \in$

$T_p S$. Si denotamos $f_u = \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u}$, y lo mismo con v , probar que

$$\text{grad}(f)_p = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} \varphi_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2} \varphi_v.$$

En particular, si $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ con la parametrización usual $\varphi(x, y) = (x, y, 0)$ se tiene $\text{grad}(f) = f_x e_1 + f_y e_2$ donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^3 .

5 GEODÉSICAS Y FUNCIÓN EXPONENCIAL

Desde cualquier punto dado construimos el sistema de líneas cortas que salen de él; la posición de un punto arbitrario puede entonces ser determinada por la dirección inicial de la geodésica en la que yace, y su distancia medida a lo largo de esta línea desde el origen.

B. Riemann “Sobre las hipótesis que yacen en las bases de la Geometría”

Dada una superficie regular $M \subset \mathbb{R}^3$, buscamos responder las dos preguntas que siguen:

· ¿Cuál es el camino más corto para ir de un punto a otro en M , sin salir de M ?

· ¿Hay alguna manera de especificar caminos que no gasten energía innecesaria, es decir que se mueven de manera “lo más recta posible”?

Como veremos, ambas preguntas están relacionadas y se contestan, local o globalmente, por medio de una familia especial de curvas en M que llamaremos *geodésicas*.

§ Para este capítulo y cada vez que hablemos de geodésicas, supondremos que la superficie M es regular y de clase C^3 .

5.1. Curvas sin aceleración

La primera aproximación al problema, atañe más a la segunda pregunta formulada. En el espacio \mathbb{R}^3 , es sabido que en ausencia de fuerzas externas, una partícula sigue un movimiento rectilíneo uniforme, describiendo así una recta, pero siempre parametrizada con velocidad constante, esto es $\alpha(t) = tV + P$ para ciertos vectores fijos $P, V \in \mathbb{R}^3$. El punto P es la posición inicial de la trayectoria, y el vector V es la velocidad inicial de la trayectoria. Notemos que $\|\dot{\alpha}(t)\| = \|V\| = cte$. Claramente $\ddot{\alpha}(t) = 0$, y recíprocamente, es fácil ver que toda curva con aceleración nula es una recta parametrizada con velocidad constante.

También sabemos que una recta así parametrizada es el camino más corto que une dos puntos en \mathbb{R}^3 (Sección 1.3).

Luego si la superficie M contiene una recta $L \subset M$, está claro que este es el camino (parametrizado con velocidad constante) que responde a las dos preguntas con las que iniciamos esta sección. Por ejemplo, en un cilindro recto, hay muchas rectas contenidas; así como en las superficies del tipo $\{(x, y, z) : z = f(x)\}$.

Pero por supuesto, esto no responde la pregunta general, ni agota todas las posibilidades. Para formular lo que queremos decir con *curvas sin aceleración*, vamos a ser más precisos.

Recordemos que si $\alpha \subset M$ es una curva suave con dominio $I \subset \mathbb{R}$, entonces para todo $t \in I$ se verifica $\dot{\alpha}(t) \in T_{\alpha(t)}M$, esto es, las velocidades de curvas son tangentes a la superficie. De hecho, esta fue una de las maneras en las que definimos el espacio tangente TM .

Sin embargo, es fácil ver a través de ejemplos, que en general $\ddot{\alpha}(t) \notin T_{\alpha(t)}M$, esto es, la aceleración no tiene por qué ser tangente a la superficie. Ahora bien, desde el punto de vista de un habitante de la superficie M , sólo es relevante para modificar el vector velocidad (y por ende la trayectoria en M) la componente de la aceleración que *si* es tangente a M . Más precisamente: como para cada $p \in M$, T_pM, N_p generan todo el espacio \mathbb{R}^3 (N_p es el vector normal al plano tangente T_pM), todo vector $W \in \mathbb{R}^3$ se descompone como $W = W_T + \lambda N_p$ donde $W_T \in T_pM$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Es decir, con una componente en el plano y otra paralela a la normal. En particular, a la aceleración la podemos descomponer como

$$\ddot{\alpha}(t) = \ddot{\alpha}(t)_T + \lambda(t)N_{\alpha(t)}$$

para cada $t \in I$. La componente normal de la aceleración, $\lambda(t)N_{\alpha(t)}$, no modifica la velocidad de la curva, ya que actúa perpendicular al vínculo dado por la

superficie. Luego la única componente que puede modificar el curso de α , es precisamente la componente tangencial.

De manera que si queremos que $\alpha \subset M$ no modifique su curso de manera extraordinaria, podemos suponer que la componente tangencial es nula. Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 5.1.1. Sea M una superficie regular. Una curva suave $\alpha : I \rightarrow M$ es una geodésica si para todo $t \in I$ se verifica $\ddot{\alpha}(t) \perp T_{\alpha(t)}M$.

En términos del proyector ortogonal $P_{\alpha(t)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con imagen $T_{\alpha(t)}M$ y núcleo $N_{\alpha(t)}$ (Ejercicio 5.1.1):

Decimos que α es una geodésica cuando

$$P_{\alpha(t)}(\ddot{\alpha}(t)) = 0, \quad \forall t \in I. \quad (5.1)$$

Esta ecuación se denomina *Ecuación de Euler de las geodésicas*.

Propiedades triviales (pero importantes) de P : es una transformación lineal autoadjunta e idempotente, esto es $P_p^t = P_p$, $P_p \circ P_p = P_p$ para todo $p \in M$. En particular, si $v \in T_pM$, se tiene $v = P_p(v)$ puesto que v está en la imagen de P_p .

Definición 5.1.2 (Derivada direccional y derivada covariante). Dados dos campos vectoriales X, Y en M (Definición 4.2.6), la derivada direccional se calcula como

$$DX_p(Y_p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X \circ \phi_p(t)$$

donde $\phi_p : I \rightarrow M$ es el flujo de Y en p , es decir la solución de la ecuación diferencial $\dot{\phi}_p(t) = Y(\phi_p(t))$ con $\phi_p(0) = p$. Notamos que la derivada direccional no tiene porque ser otro campo, ya que no está garantizado que esta cantidad vuelva a ser un vector tangente en p , es decir puede ocurrir que $DX_p(Y_p) \notin T_pM$.

Podemos considerar entonces la operación denominada *derivada covariante* del campo X en la dirección de Y , dada por derivar y luego proyectar sobre TM , esto es $\nabla_Y X = P(DX(Y))$, es decir

$$(\nabla_Y X)(p) = P_p(DX_p(Y_p)) = DX_p(Y_p) - \langle DX_p(Y_p), N_p \rangle N_p, \quad (5.2)$$

donde $P_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p M$ es el único proyector ortogonal con rango $T_p M$ (cuya normal es N_p), como en el ejercicio 5.1.1.

Es decir, la derivada covariante consiste en derivar, y luego proyectar (Figura 5.1). Se suele denotar también $\nabla_Y X = P(X'Y)$ para mayor brevedad. Ahora es evidente que $\nabla_Y X$ es un nuevo campo en M . Además, $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ es \mathbb{R} -bilineal pues tanto la derivada como la proyección lo son. La derivada covariante también se conoce como *derivada de Levi-Civita*.

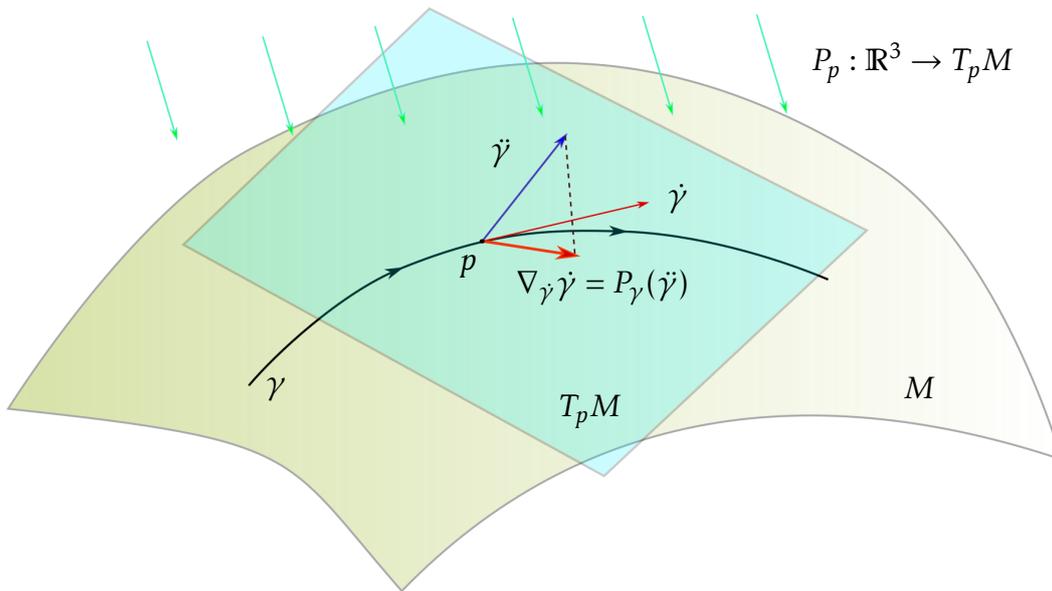


Figura 5.1: Derivada covariante de $\dot{\gamma}$, obtenida proyectando $\ddot{\gamma}$ ortogonalmente sobre $T_p M$

Observación 5.1.3 (Ecuación de Euler y derivada covariante). Si $\gamma : I \rightarrow M$ es suave y $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo a lo largo de γ (Definición 4.2.6), esto es $\mu(t) \in T_{\gamma(t)} M$ para todo $t \in I$, entonces podemos definir la *derivada covariante* de μ a lo largo de γ como $\nabla_{\dot{\gamma}} \mu$, esto es

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \mu = P_{\gamma}(\dot{\mu}) = \dot{\mu} - \langle \dot{\mu}, N_{\gamma} \rangle N_{\gamma} \quad (5.3)$$

puesto que, de la misma definición, $(D\mu)(\dot{\gamma}) = \dot{\mu}$, es decir, la derivada direccional de μ a lo largo de γ es $\dot{\mu}$. En particular, la derivada covariante de $\dot{\gamma}$ a lo largo de γ es la proyección de la aceleración de γ sobre el espacio tangente correspondiente (Figura 5.1).

Volviendo a las geodésicas, tomando $\mu = \dot{\gamma}$, entonces $\dot{\mu} = \ddot{\gamma}$, podemos reescribir la ecuación de Euler (5.1) como

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$$

con la notación de la derivada de Levi-Civita. Esto es, una curva es geodésica si su derivada covariante (a lo largo de ella misma) es nula.

Problema 5.1.4 (Propiedades de la derivada covariante). Sean X, Y campos en M y sea f una función, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. El producto entre una función y un campo se define punto a punto y da otro campo, es decir $(fY)(p) = f(p)Y(p)$ y como $Y(p) \in T_p$ y $f(p) \in \mathbb{R}$, el producto también está en T_pM .

1. Probar que $\nabla_{fY}X = f\nabla_YX$ para todo par de campos X, Y en M y toda f . Es decir, la derivada covariante es lineal *en funciones* en la variable Y .
2. Probar que si f es diferenciable, entonces

$$(\nabla_Y(fX))(p) = Df_p(Y_p)X_p + f(p)(\nabla_YX)(p).$$

Esta propiedad se conoce como *propiedad de derivación* en la variable X . Denotando $(\nabla_Yf)(p) = Df_p(Y_p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\phi_p(t))$ con ϕ_p el flujo de Y en p , se tiene la escritura compacta

$$\nabla_Y(fX) = (\nabla_Yf)X + f(\nabla_YX).$$

Se dice entonces que ∇ es *una derivación* en la variable X , porque cumple la regla de Leibniz de la derivada de un producto (en este caso, el producto de una función por un campo).

3. Probar que $\nabla_XY - \nabla_YX = [Y, X]$ (ver la Definición 4.2.8). Esta propiedad se conoce como *nulidad de la torsión* de la conexión de Levi-Civita.
4. Probar que si X, Y, Z son campos en M , entonces

$$\nabla_Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_ZX, Y \rangle + \langle X, \nabla_ZY \rangle, \quad (5.4)$$

donde el término de la izquierda hay que entenderlo como en el segundo ítem, para $f = \langle X, Y \rangle$. Esta propiedad se conoce como *compatibilidad con la métrica* de la conexión de Levi-Civita.

Observación 5.1.5 (La ecuación de Euler como ecuación diferencial ordinaria). Observemos también que puesto que, para todo $p \in M$, se tiene $P_p(V) = V - \langle V, N_p \rangle N_p$ donde N_p es la normal a M en p (Ejercicio 5.1.1), una curva γ es geodésica si y sólo si

$$\ddot{\gamma} = \langle \ddot{\gamma}, N_\gamma \rangle N_\gamma.$$

Pero como $\langle \dot{\gamma}, N_\gamma \rangle = 0$ siempre, derivando esa igualdad tenemos la relación válida para toda curva en M :

$$\langle \ddot{\gamma}, N_\gamma \rangle + \langle \dot{\gamma}, DN_\gamma \dot{\gamma} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \ddot{\gamma}, N_\gamma \rangle = -\langle \dot{\gamma}, DN_\gamma \dot{\gamma} \rangle,$$

Esto nos permite reescribir la derivada covariante (5.3), y en particular, si γ es el flujo del campo Y (o sea $Y \circ \gamma = \dot{\gamma}$), obtenemos también una nueva expresión para la derivada covariante de campos

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \mu = \dot{\mu} + \langle DN_\gamma \mu, \dot{\gamma} \rangle N_\gamma \quad (5.5)$$

$$(\nabla_Y X)_p = DX_p(Y_p) + \langle DN_p Y_p, X_p \rangle N_p. \quad (5.6)$$

Notemos entonces que por la ecuación (5.5), $\gamma \subset M$ es geodésica si y sólo si

$$\ddot{\gamma} = -\langle \dot{\gamma}, DN_\gamma \dot{\gamma} \rangle N_\gamma. \quad (5.7)$$

Recordamos aquí el teorema de existencia, unicidad, y dependencia suave de las condiciones, para ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios normados. Para una demostración recomendamos al lector el texto de Lang [7, Ch. IV §1].

Teorema 5.1.6. Sea $W \subset \mathbb{R}^d$ abierto y $F : W \rightarrow \mathbb{R}^d$ de clase C^k , con $k \geq 1$, y consideremos la ecuación diferencial $\dot{A}(t) = F(A(t))$.

1. Para cada $X \in W$, existe un intervalo abierto maximal $0 \in I_X \subset \mathbb{R}$ y una solución $A_X : I_X \rightarrow W$ de clase C^k , que es única.
2. Sea $D(F) \subset W \times \mathbb{R}$ el conjunto de los (X, t) tales que $t \in I_X$. Entonces $D(F)$ es abierto y contiene a $W \times \{0\}$.

3. Si $A : D(F) \rightarrow W$ es el flujo de F dado por $A(X, t) = A_X(t)$, entonces A es de clase C^k .

Llamando $\beta = \dot{\gamma}$, y notando que entonces $\dot{\beta} = \ddot{\gamma}$ podemos reescribir esta ecuación diferencial de orden 2 (5.7) como el sistema de dos ecuaciones de orden uno

$$\begin{cases} \dot{\beta} &= -\langle \beta, DN_\gamma \beta \rangle N_\gamma \\ \dot{\gamma} &= \beta \end{cases}.$$

que puede escribirse como $\dot{A}(t) = F(A(t))$ para $A(t) = (\gamma(t), \beta(t)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ y una F adecuada que involucra N y DN como puede verse. Para una formalización de la expresión de F usando una parametrización de M , ver la Observación 5.2.1.

Observación 5.1.7 (Existencia local y unicidad de geodésicas). Si M es de clase C^k , φ_u, φ_v son de clase C^{k-1} y lo mismo ocurre con el vector normal N . Luego DN es de clase C^{k-2} , y entonces la F que define la ecuación diferencial será también de clase C^{k-2} . Por ello dijimos al comienzo de la sección que nos concentraremos en superficies de clase (al menos) C^3 , para que F sea al menos C^1 .

Si M es de clase C^k ($k \geq 3$), la solución β de la ecuación será (al menos) de clase C^{k-2} , y entonces γ resultará de clase C^{k-1} . Pero entonces, como $\dot{\beta} = -\langle \beta, DN_\gamma \beta \rangle N_\gamma$, el lado derecho de la ecuación es de clase C^{k-2} , luego $\dot{\beta}$ es de clase C^{k-2} y en consecuencia β también es de clase C^{k-1} .

Fijando las condiciones iniciales $\gamma(0) = p \in M$, $\beta(0) = \dot{\gamma}(0) = V \in T_p M$ existe una única solución que las verifica que denotaremos

$$\gamma_{p,V} : I \rightarrow M$$

definida en un intervalo $I = I_{p,V}$ alrededor de $t = 0$, que depende de $X = (p, V)$. Esta solución, también por el Teorema 5.1.6 y lo recién discutido, también es de clase C^{k-1} respecto de las condiciones iniciales, es decir la función

$$\gamma = \gamma(p, V, t) : M \times T_p M \times \mathbb{R} \rightarrow M$$

(para los $t \in \mathbb{R}$ en los que tiene sentido $\gamma(p, V, t)$) es una función de clase C^2 .

Y si $q \in (B_\varepsilon(p) \cap M)$ y $W \in (B_\delta(V) \cap T_p M)$ para ε y δ pequeños (donde $B_r(x)$ es la bola con centro x y radio r) se puede encontrar un intervalo I común a todos esos q y W tal que $\gamma_{q,W}$ está definida en ese I . En ese caso

$$\gamma = \gamma(p, V, t) : (B_\varepsilon(p) \cap M) \times (B_\delta(V) \cap T_p M) \times I \rightarrow M$$

resulta de clase C^2 .

Si $p \in M$ y $0 \in T_p M$, entonces es inmediato que $\gamma_{p,0}(t) = p$ (la curva constantemente p en M , es la única geodésica que pasa por p con velocidad inicial nula $v = 0$).

Definición 5.1.8 (Exponencial riemanniana). Si $1 \in I_{p,v} = \text{Dom}(\gamma_{p,v})$, denotamos $\text{Exp}_p(V) = \gamma_{p,v}(1)$ la *función exponencial riemanniana* de M en p . Esta función está definida en algún subconjunto $\text{Dom}(\text{Exp}_p) \subset T_p M$ que contiene al vector nulo $v = 0 \in T_p M$, ya que $\text{Exp}_p(0) = \gamma_{p,0}(1) = p$ para todo $p \in M$.

Observación 5.1.9. Por la dependencia suave de las condiciones iniciales y lo recién observado, en realidad el dominio de la exponencial riemanniana es un abierto en $T_p M$ que contiene al vector nulo, y $\text{Exp}_p : \text{Dom}(\text{Exp}_p) \subset T_p M \rightarrow M$ es una función de clase C^2 (de hecho, es de clase C^{k-1} cuando M es de clase C^k).

Teorema 5.1.10. Si $\alpha : I \rightarrow M$ es una geodésica con $\alpha(0) = p \in M$, entonces

1. tiene rapidez constante, esto es $\|\dot{\alpha}(t)\| = k = \text{cte}$ para todo $t \in I$,
2. para todo $V \in T_p M, s, t \in \mathbb{R}$, se tiene $\alpha_{sV}(t) = \alpha_V(st)$, en el sentido que un lado existe si y sólo si existe el otro y son iguales.
3. Existe $r = r(p) > 0$ tal que $\text{Exp}_p : B_r(0) \subset T_p M \rightarrow M$ es un difeomorfismo con su imagen.

Demostración. Para probar la primer afirmación, observemos que

$$f(t) = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 = \langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle,$$

y el resultado estaría probado si podemos ver que $f'(t) = 0$ para todo $t \in I$. Notemos que por ser $\alpha \subset M$, se tiene derivando (y omitiendo la variable t para simplificar la escritura) tenemos

$$f' = 2\langle \ddot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle = 2\langle \ddot{\alpha}, P_\alpha(\dot{\alpha}) \rangle = 2\langle P_\alpha^t(\ddot{\alpha}), \dot{\alpha} \rangle = 2\langle P_\alpha(\ddot{\alpha}), \dot{\alpha} \rangle = 2\langle 0, \dot{\alpha} \rangle = 0$$

puesto que α es una geodésica y por lo tanto verifica la ecuación de Euler $P_{\alpha(t)}(\ddot{\alpha}(t)) = 0$ (ver (5.1)).

Otra forma de ver esto mismo es recordar que como $\ddot{\alpha}(t) \perp T_{\alpha(t)} M$ y $\dot{\alpha}(t) \in T_{\alpha(t)} M$ debe ser $\ddot{\alpha}(t) \perp \dot{\alpha}(t) \quad \forall t \in I$, y entonces

$$f'(t) = 2\langle \ddot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle = 0, \quad \forall t \in I.$$

Para probar la segunda afirmación, fijado $s \in \mathbb{R}$, llamamos $\beta(t) = \alpha_V(st)$ y notamos que $\beta \subset M$, que $\beta(0) = \alpha_V(0) = p$ y que $\dot{\beta}(t) = \dot{\alpha}_V(st)s$ (en particular $\dot{\beta}(0) = Vs$, $\ddot{\beta}(t) = \ddot{\alpha}_V(st)s^2$). Pero como α_V es una geodésica,

$$P_{\beta(t)}(\ddot{\beta}(t)) = P_{\alpha_V(st)}(s^2 \ddot{\alpha}_V(st)) = s^2 P_{\alpha_V(st)}(\ddot{\alpha}_V(st)) = 0,$$

luego β también es una geodésica con posición inicial p y velocidad inicial sV . Por la unicidad de las soluciones de la ecuación de Euler, debe ser $\beta(t) = \alpha_{sV}(t)$, lo que prueba la identidad enunciada $\alpha_V(st) = \alpha_{sV}(t)$.

Ahora notamos que fijado $p \in M$, existe $r > 0$ tal que $B_r(0) \subset T_p$ está incluido en el dominio de la exponencial, ya que si $v = 0$ el dominio de $\gamma_{p,0} \equiv p$ es todo \mathbb{R} . Por otro lado y por lo recién probado, para t pequeño y cualquier v se tiene $Exp_p(tv) = \gamma_{p,tv}(1) = \gamma_{p,v}(t)$, luego derivando y evaluando en $t = 0$ obtenemos

$$D(Exp_p)_0(v) = \gamma'_{p,v}(0) = v,$$

lo que nos dice que (como $Exp_p(0) = p$), la t.l. $D(Exp_p)_0 : T_pM \rightarrow T_pM$ es la identidad. En particular es inversible y por el teorema de la función inversa (reduciendo r si es necesario) es un difeomorfismo con su imagen. \square

Este lema, además de útil para simplificar las cuentas, tiene un sentido geométrico claro: las curvas no pueden estar cambiando su vector velocidad (si las miramos a todos en un mismo plano de dimensión 2 identificando todos los espacios T_pM), dado que pedimos que su aceleración “relativa” sea nula. Por otro lado, cambiar el “tamaño” del vector velocidad inicial sólo reparametriza la geodésica obtenida en un múltiplo constante con la misma proporción.

Observación 5.1.11 (Parametrización exponencial). El teorema recién probado nos provee de una parametrización regular especial, para cada $p \in M$, dada por la exponencial riemanniana en p . En efecto, como $Exp_p : B_r(0) \subset T_pM \simeq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ es un difeomorfismo con su imagen, resulta parametrización regular de un entorno abierto $V_r \subset M$ del punto p . Esta parametrización, como muestra el teorema, envía rectas $t \mapsto tv$ por el origen de \mathbb{R}^2 , en geodésicas $\gamma \subset M$ que pasan por p en $t = 0$:

$$t \mapsto Exp_p(tv) = \gamma_{p,v}(t) = \gamma_{p,tv}(1)$$

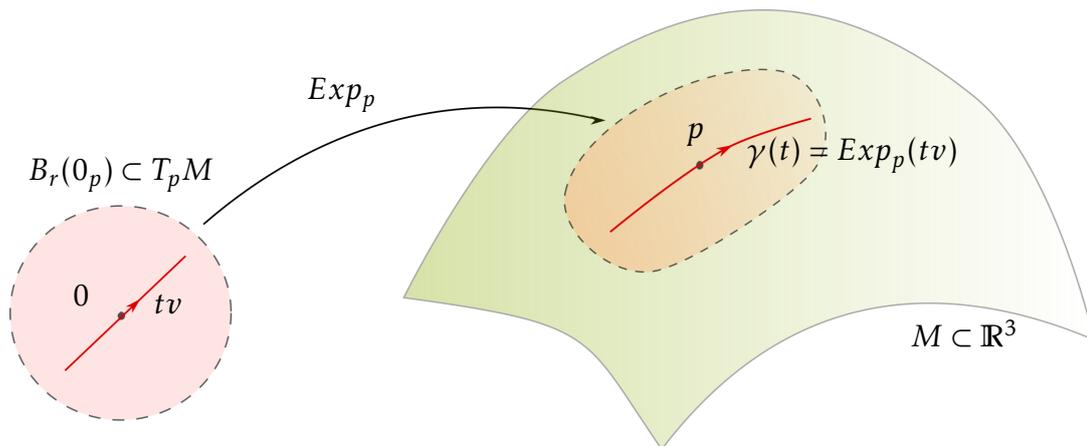


Figura 5.2: Parametrización exponencial/geodésica de un entorno de $p \in M$

En particular si dos puntos $p, q \in M$ son suficientemente cercanos, existe una geodésica de M que los une. Estos entornos $V_r(p) = Exp_p(B_r(0_p))$ para r suficientemente pequeño se conocen como *entornos normales* de p . Veremos más adelante (Corolario 5.4.6) que se pueden caracterizar como bolas métricas para la distancia intrínseca en M .

Terminamos esta sección con una observación geométrica que resulta útil para identificar geodésicas; denotamos N_p al vector normal a la superficie S en $p \in S$ y N_Π la normal de un plano Π .

Proposición 5.1.12. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular, Π un plano, $\alpha \subset (\Pi \cap S)$ una curva regular parametrizada con rapidez constante. Supongamos que Π corta transversalmente a S , es decir para cada $p \in S \cap \Pi$, se tiene $N_\Pi \perp N_p$ (equivalentemente $N_p \subset \Pi_0$ donde Π_0 es el trasladado de Π al origen). Entonces α es una geodésica de S .*

Recíprocamente, si α es una geodésica de S con $\alpha'' \neq 0$ en I , entonces Π corta transversalmente a S .

Demostración. Notemos primero que si $\alpha : I \rightarrow \Pi$, entonces para todo $t \in I$, α', α'' están contenidos en Π_0 , el subespacio trasladado de Π al origen (¿por qué?). Por otro lado, notamos que α' está en $T_p S$ ya que $\alpha \subset S$, luego α' también es ortogonal a N_p . Por último, notamos que α tiene rapidez constante, α'' debe ser ortogonal a α' .

Supongamos primero que $N_p \subset \Pi_0$. Entonces $\{\alpha', N_p\}$ es base de Π_0 (ya que ambos están en el mismo plano y son ortogonales), y se deduce que α'' debe ser

paralela a N_p . Esto prueba que α'' es ortogonal a $T_p S$, luego α es una geodésica de S .

Ahora supongamos que α es una geodésica de S , entonces $\alpha'' \perp T_p S$ es decir $\alpha'' = \langle \alpha'', N_p \rangle N_p$. Como $0 \neq \alpha'' \in \Pi_0$, entonces debe ser también $N_p \in \Pi_0$. \square

5.1.1. Ejercicios

5.1.1. Dado un subespacio $T \subset \mathbb{R}^3$ de dimensión 2 (un plano por el origen) y $N \in \mathbb{R}^3$ su normal unitaria ($\|N\| = 1$), definimos $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ como

$$P(V) = V - \langle V, N \rangle N. \quad (5.8)$$

- Probar que P es una transformación lineal, que $Ran(P) = T$, y que $Ker(P) = T^\perp = \text{gen}\{N\}$.
- Probar que $P^2 = P$. Una tal transformación lineal es un *proyector*.
- Probar que $P^t = P$. Un proyector con esta propiedad es un *proyector ortogonal*.

La t.l. P dada por (5.8) es el único proyector ortogonal con rango T .

5.1.2. Probar geoméricamente que las geodésicas de un plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ son las rectas $L \subset \Pi$.

5.1.3. Probar geoméricamente que las rectas que parten del vértice son geodésicas del cono $z^2 = x^2 + y^2$.

5.1.4. Probar geoméricamente que la parábola $z = y^2$ es una geodésica del paraboloides $z = x^2 + y^2$.

5.1.5. Probar geoméricamente que los círculos máximos de la esfera unitaria S^2 son geodésicas.

5.1.6. Probar geoméricamente que las circunferencias horizontales, y las rectas verticales inscriptas en el cilindro, son geodésicas. ¿Hay otras?

5.1.7. Probar que una curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow S^2$ es una geodésica si y sólo si verifica $\ddot{\alpha} + k^2 \alpha = 0$, donde $k = L_0^1(\alpha)$ (recordar que las geodésicas tienen velocidad constante).

5.1.8. Sea ∇ una derivada covariante en M , sin torsión ($\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ es \mathbb{R} -bilineal y verifica las tres primeras propiedades del problema 5.1.4).

1. Probar que $2\nabla_X Y = [X, Y] + \nabla_X Y + \nabla_Y X$
2. Probar que si se conoce el valor de $\nabla_X X$ para todo campo X , entonces se conoce el valor de $\nabla_X Y$ para todo par de campos X, Y (*sug: usar que ∇ es aditiva en las dos variables y que se conoce $\nabla_{X+Y}(X+Y)$ para todo X, Y*).

5.2. Cálculo de geodésicas en una parametrización

Una manera práctica de calcular geodésicas cuando $M = \text{Im}(\varphi)$ es la imagen de una parametrización regular es la siguiente: si buscamos una curva $\gamma \subset M = \text{Im}(\varphi)$, existe una curva $\beta \subset D = \text{Dom}(\varphi)$ tal que $\gamma = \varphi \circ \beta$. Llamando $\beta(t) = (u(t), v(t))$, lo que queremos es que $\dot{\gamma} \perp \varphi_u, \varphi_v$ puesto que estos son generadores del plano tangente. Ahora bien, como dijimos que $\gamma = \varphi \circ \beta$, tenemos

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt}\varphi(u(t), v(t)) = \varphi_u \dot{u} + \varphi_v \dot{v}$$

y derivando nuevamente

$$\ddot{\gamma} = \varphi_{uu} \dot{u}^2 + 2\varphi_{uv} \dot{u} \dot{v} + \varphi_{vv} \dot{v}^2 + \varphi_u \ddot{u} + \varphi_v \ddot{v}$$

ya que $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$ (estamos suponiendo que todas las superficies y objetos son al menos de clase C^2 para poder tener aceleraciones razonables, es decir, aceleraciones que varíen continuamente). De las condiciones de ortogonalidad $\langle \ddot{\gamma}, \varphi_u \rangle = 0$, $\langle \ddot{\gamma}, \varphi_v \rangle = 0$, deducimos que

$$\begin{cases} \langle \varphi_{uu} \dot{u}^2 + 2\varphi_{uv} \dot{u} \dot{v} + \varphi_{vv} \dot{v}^2 + \varphi_u \ddot{u} + \varphi_v \ddot{v}, \varphi_u \rangle = 0, \\ \langle \varphi_{uu} \dot{u}^2 + 2\varphi_{uv} \dot{u} \dot{v} + \varphi_{vv} \dot{v}^2 + \varphi_u \ddot{u} + \varphi_v \ddot{v}, \varphi_v \rangle = 0. \end{cases}$$

A partir de ahora y para simplificar la escritura escribiremos el producto escalar $\langle v, w \rangle$ de $v, w \in \mathbb{R}^3$ como $v \cdot w$. Las ecuaciones anteriores entonces pueden reescribirse distribuyendo el producto interno como

$$\begin{cases} \varphi_{uu} \cdot \varphi_u \dot{u}^2 + 2\varphi_{uv} \cdot \varphi_u \dot{u} \dot{v} + \varphi_{vv} \cdot \varphi_u \dot{v}^2 + E \ddot{u} + F \ddot{v} = 0, \\ \varphi_{uu} \cdot \varphi_v \dot{u}^2 + 2\varphi_{uv} \cdot \varphi_v \dot{u} \dot{v} + \varphi_{vv} \cdot \varphi_v \dot{v}^2 + F \ddot{u} + G \ddot{v} = 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

Ahora bien, $E = \varphi_u \cdot \varphi_u$, luego $\frac{\partial E}{\partial u} = E_u = 2\varphi_{uu} \cdot \varphi_u$ y manipulando de la misma forma las derivadas de E, F, G respecto de u, v obtenemos las relaciones

$$\varphi_{uu} \cdot \varphi_u = \frac{E_u}{2}, \quad \varphi_{uv} \cdot \varphi_u = \frac{E_v}{2}, \quad \varphi_{uv} \cdot \varphi_v = \frac{G_u}{2}, \quad \varphi_{vv} \cdot \varphi_v = \frac{G_v}{2} \quad (5.10)$$

$$F_u = \varphi_{uu} \cdot \varphi_v + \varphi_u \cdot \varphi_{uv} = \varphi_{uu} \cdot \varphi_v + \frac{E_v}{2}, \quad F_v = \varphi_{uv} \cdot \varphi_v + \varphi_u \cdot \varphi_{vv} = \varphi_u \cdot \varphi_{vv} + \frac{G_u}{2}$$

y a partir de las anteriores resulta que

$$F_u - \frac{E_v}{2} = \varphi_{uu} \cdot \varphi_v \quad \text{y que} \quad F_v - \frac{G_u}{2} = \varphi_u \cdot \varphi_{vv}. \quad (5.11)$$

A partir de (5.10) y (5.11), las ecuaciones (5.9) se pueden escribir como

$$\begin{cases} \frac{E_u}{2}\dot{u}^2 + E_v\dot{u}\dot{v} + \left(F_v - \frac{G_u}{2}\right)\dot{v}^2 + E\ddot{u} + F\ddot{v} = 0, \\ \left(F_u - \frac{E_v}{2}\right)\dot{u}^2 + G_u\dot{u}\dot{v} + \frac{G_v}{2}\dot{v}^2 + F\ddot{u} + G\ddot{v} = 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

Entonces usando que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) = (E_u\dot{u} + E_v\dot{v})\dot{u} + E\ddot{u} + (F_u\dot{u} + F_v\dot{v})\dot{v} + F\ddot{v} \\ \frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) = (F_u\dot{u} + F_v\dot{v})\dot{u} + F\ddot{u} + (G_u\dot{u} + G_v\dot{v})\dot{v} + G\ddot{v}, \end{cases}$$

puede verse que las ecuaciones de Euler (5.12) para $u = u(t), v = v(t)$, escritas de manera un poco más compacta son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) &= \frac{1}{2}E_u\dot{u}^2 + F_u\dot{u}\dot{v} + \frac{1}{2}G_u\dot{v}^2 \\ \frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) &= \frac{1}{2}E_v\dot{u}^2 + F_v\dot{u}\dot{v} + \frac{1}{2}G_v\dot{v}^2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

o escritas matricialmente:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}\dot{\beta}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{I}_u \dot{\beta}, \dot{\beta} \rangle \\ \langle \mathbf{I}_v \dot{\beta}, \dot{\beta} \rangle \end{pmatrix}, \quad \text{donde } \mathbf{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \text{ y } \beta = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Observación 5.2.1. Para $w \in \mathbb{R}^2$, $D = \text{Dom}(\varphi) \subset \mathbb{R}^2$, denotamos $X = (u, v, w) \in D \times \mathbb{R}^2 = W \subset \mathbb{R}^4$. Si $\mathbf{I}^{-1}(u, v)$ indica la matriz inversa en $(u, v) \in D = \text{Dom}(\varphi)$, con $(\mathbf{I}^{-1})_u(u, v)$ indicamos la matriz cuyas entradas son las derivadas parciales respecto de u de la matriz inversa \mathbf{I}^{-1} , evaluada en (u, v) . Similarmente con $(\mathbf{I}^{-1})_v$. Sea $F : W = D \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(u, v, w) = \left(\mathbf{I}^{-1}(u, v) \cdot w, -\frac{1}{2}w^t \cdot (\mathbf{I}^{-1})_u(u, v)w, \cdot w, -\frac{1}{2}w^t \cdot (\mathbf{I}^{-1})_v(u, v) \cdot w \right),$$

es claro que si M es C^3 entonces F es de clase C^1 . Invitamos al lector a verificar que $\gamma_t = \varphi \circ \beta_t = \varphi(u_t, v_t)$ es geodésica si y sólo si $A_t = (\beta_t, \mathbf{I}(\beta_t) \cdot \dot{\beta}_t)$ es solución de la ecuación ordinaria $\dot{A} = F(A) = F(\beta, \mathbf{I}(\beta) \cdot \dot{\beta})$. Esto formaliza las aseveraciones hechas a continuación del Teorema 5.1.6 sobre existencia y unicidad de las geodésicas con las condiciones iniciales dadas (y su dependencia de clase C^1 respecto de las susodichas condiciones iniciales).

Fijada la superficie M y su parametrización φ , los términos E, F, G y sus derivadas son datos de la superficie. Y lo que uno desea obtener es una solución $\beta(t) = (u(t), v(t))$ al sistema de ecuaciones diferenciales enunciado arriba.

De obtener esta solución (recordar que fijadas la posición y la velocidad inicial $u(0), v(0), \dot{u}(0), \dot{v}(0)$, existe una única solución de la ecuación), se recupera la geodésica $\gamma \subset M$ notando que

$$\gamma(t) = \varphi(\beta(t)) = \varphi(u(t), v(t)).$$

En particular, $\gamma(0) = \varphi(u(0), v(0)) = p \in M$ es la posición inicial de β , y

$$\dot{\gamma}(0) = \varphi_u(u(0), v(0))\dot{u}(0) + \varphi_v(u(0), v(0))\dot{v}(0) = V \in T_p M$$

es la velocidad inicial de γ .

Vamos a ilustrar este procedimiento con dos ejemplos.

Ejemplo 5.2.2. Sea M la superficie de revolución dada por $y = z^3 + 1$ alrededor del eje z , con $z \in (-1, 1)$. Veamos que los meridianos son geodésicas. Para ello parametrizamos M mediante

$$\varphi(u, v) = ((u^3 + 1)\cos v, (u^3 + 1)\sin v, u), \quad (u, v) \in D = (-1, 1) \times (0, 2\pi).$$

Calculamos las derivadas parciales

$$\varphi_u = (3u^2 \cos v, 3u^2 \sin v, 1), \quad \varphi_v = (-(u^3 + 1)\sin v, (u^3 + 1)\cos v, 0)$$

y con estos los coeficientes de la primera forma fundamental

$$E = 9u^4 + 1, \quad F = 0 \quad G = (u^3 + 1)^2.$$

Entonces las ecuaciones de las geodésicas (5.13) son

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left((9u^4 + 1) \dot{u} \right) &= \frac{1}{2} 36u^3 \dot{u}^2 + \frac{1}{2} 6u^2 (u^3 + 1) \dot{v}^2 \\ \frac{d}{dt} \left((u^3 + 1)^2 \dot{v} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Un meridiano está dado por una ecuación $v = cte$, ya que v representa el ángulo θ en coordenadas cilíndricas, que indica el ángulo de rotación alrededor del eje z , medido a partir del eje x en sentido antihorario. Veamos qué ocurre si

proponemos $v(t) = c$ (luego su derivada es nula). La segunda ecuación se verifica trivialmente ($0 = 0$), mientras que en la primera queda, luego de derivar el término de la izquierda,

$$36u^3\dot{u}^2 + (9u^4 + 1)\ddot{u} = 18u^3\dot{u}^2.$$

Esto es $(9u^4 + 1)\ddot{u} = -18u^3\dot{u}^2$. Reescribiendo $\ddot{u} = \frac{d\dot{u}}{dt} = \frac{d\dot{u}}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d\dot{u}}{du}\dot{u}$ y cancelando un \dot{u} a ambos lados de la ecuación, queda

$$(9u^4 + 1)\frac{d\dot{u}}{du} = -18u^3\dot{u},$$

luego debe ser $\frac{1}{\dot{u}}d\dot{u} = -\frac{18u^3}{9u^4+1}du$, que se integra a

$$\ln|\dot{u}| = -1/2\ln(9u^4 + 1) + A.$$

Como $\dot{v} = 0$ no puede ser $\dot{u} = 0$, luego \dot{u} tiene un signo concreto, que establece si recorreremos la curva subiendo (cuando $\dot{u} > 0$) o bajando (cuando $\dot{u} < 0$). Entonces exponenciando la última ecuación se tiene

$$\frac{du}{dt} = \dot{u} = \pm A \frac{1}{\sqrt{9u^4 + 1}},$$

o equivalentemente $\sqrt{9u^4 + 1}dt = \pm Adu$. Si $F(u)$ es una primitiva de $\sqrt{9u^4 + 1}$, se arriba entonces a $F(u) = \pm At + B$ donde $A, B \in \mathbb{R}$ son constantes a elegir. Como $F'(u) > 0$, resulta inyectiva y entonces tiene una función inversa de clase C^1 , así que

$$u(t) = F^{-1}(\pm At + B)$$

es la solución general de la ecuación diferencial. La elección de A, B determina las condiciones iniciales u_0, \dot{u}_0 (y viceversa). Hemos hallado entonces una geodésica dada por $\gamma(t) = \varphi(\beta(t)) = \varphi(u(t), v(t))$, esto es

$$\gamma(t) = ((u(t)^3 + 1)\cos(c), (u(t)^3 + 1)\sin(c), u(t)),$$

que recorre el meridiano vertical dado por $v(t) = c = cte$. La explicación de por qué la expresión explícita de $u(t)$ puede ser complicada, está en que una geodésica debe tener *rapidez constante*, luego no importa sólo el gráfico o la traza sino como la recorremos. Invitamos al lector a verificar que $\|\dot{\gamma}(t)\| = cte$.

Ejemplo 5.2.3. Sea M la superficie de revolución del ejemplo anterior. Veamos si las circunferencia horizontales ($u = cte$) son geodésicas de M . Ahora debe ser $u(t) = k = cte$, luego sus derivadas son nulas. Las ecuaciones son entonces

$$0 = 3k^2(k^3 + 1)\dot{v}^2$$

$$\frac{d}{dt}((k^3 + 1)^2\dot{v}) = 0.$$

Si $k = 0$, la primer ecuación se verifica, mientras que la segunda es $\ddot{v} = 0$ cuya solución es una recta $v(t) = at + b$, luego para $u(t) \equiv 0$ tenemos una geodésica que es un círculo horizontal, parametrizado como

$$\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t)) = (\cos(at + b), \sin(at + b), 0).$$

Notemos que γ tiene rapidez constante, y la elección de a, b es por la libertad de elegir el punto y velocidad iniciales de γ .

Veamos ahora qué pasa si $k \neq 0$. En ese caso, como dijimos que $|u| = |k| < 1$, la primer ecuación dice $\dot{v} = 0$, luego debe ser $v(t) = v_0 = cte$. Pero entonces $u(t) = k, v(t) = v_0$ nos da el punto fijo en la superficie $\gamma(t) = ((k^3 + 1)\cos(v_0), (k^3 + 1)\sin(v_0), k)$. Esto nos dice que γ es constante y por lo tanto la circunferencia horizontal $u = k \neq 0$ no es una geodésica.

§ Respecto del último cálculo, notemos que como una geodésica está determinada por sus condiciones iniciales $p = \gamma_0, v = \dot{\gamma}_0$, si elegimos $v = 0$ la geodésica constante $\gamma(t) = p$ es **siempre** solución de la ecuación de Euler. Pero en el ejemplo anterior vimos que si $u(t) = cte \neq 0$, estas son las únicas velocidades iniciales posibles (las nulas), luego la curva “circunferencia horizontal” no es una geodésica, si entendemos por ella a una curva no constante.

Invitamos al lector a pensar por qué, en la figura dada por la superficie de revolución S de estos ejemplos, mirando los cortes horizontales, para alguna altura obtuvimos una geodésica y para las demás no. Afirmamos que esto (así como que todas las curvas verticales en S son geodésicas) se deduce de la Proposición 5.1.12. ¿Cómo generalizaría esto para cualquier superficie de revolución?

5.2.1. Ejercicios

5.2.9. Hallar las ecuaciones diferenciales de las geodésicas de

- a) un plano,
- b) un cono,
- c) un paraboloide,
- d) una esfera,
- e) un cilindro.

Verificar que las curvas halladas geoméricamente en los ejercicios de la sección anterior cumplen estas ecuaciones.

5.2.10. Probar que toda hélice inscrita en un cilindro es una geodésica del mismo, y que, junto con las curvas mencionadas en el ejercicio 5.1.6, estas son todas las geodésicas del mismo.

5.2.11. Para cada una de las siguientes superficies, hallar geodésicas no triviales:

- a) la pseudoesfera, b) silla de montar, c) hiperboloide de dos hojas.

5.2.12. Sea S superficie de revolución obtenida rotando $y = f(z) > 0$ alrededor del eje z .

1. Probar que los meridianos de S son geodésicas.
2. Dar una condición necesaria y suficiente para que un paralelo de S sea geodésica.

5.3. Distancia intrínseca y curvas minimales

El otro punto de vista para estudiar geodésicas es el de caminos óptimos o mínimos. Dada una superficie $M \subset \mathbb{R}^3$, y dos puntos $p, q \in M$, podemos definir la distancia entre p, q como la mejor distancia posible caminando por la superficie, es decir definimos

$$\text{dist}(p, q) = \inf\{L_0^1(\gamma) : \gamma \subset M, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\},$$

donde γ son curvas regulares a trozos. Esta se conoce como *distancia intrínseca* en M o *distancia Riemanniana*.

Veamos que en efecto se trata de una distancia, para ello primero observemos que si M es conexa, entonces es arcoconexa por ser localmente una copia de \mathbb{R}^2 luego dist es finita en cada componente conexa. Supondremos entonces que M es conexa para nuestras consideraciones (puede declararse que la distancia entre distintas componentes es $+\infty$).

Lema 5.3.1. Si dist es la distancia intrínseca en la superficie regular M , entonces para todo $p, q, r \in M$:

1. $\text{dist}(p, q) \geq 0$ y $\text{dist}(p, q) = 0$ si y solo si $p = q$.
2. $\text{dist}(p, q) = \text{dist}(q, p)$
3. $\text{dist}(p, q) \leq \text{dist}(p, r) + \text{dist}(r, q)$.

Demostración. Claramente dist es positiva, y por otro lado (Teorema 1.3.2) como $\|p - q\| \leq L(\gamma)$ para cualquier curva que una p, q en \mathbb{R}^3 (en particular, si $\gamma \subset M$), entonces $\|p - q\| \leq \text{dist}(p, q)$ y esto prueba que es nula si y sólo si $p = q$. Cambiando $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ que une p, q con $\beta(t) = \gamma(a + b - t)$ que recorre la misma traza en el sentido opuesto, y tiene la misma longitud, es claro que dist es simétrica. Por último, si α es cualquier curva (regular a trozos) que une p, r y β es cualquier curva que une r, q , denotando $\alpha \# \beta$ a la concatenación de ambas, esta une p, q y entonces

$$\text{dist}(p, q) \leq L(\alpha \# \beta) = L(\alpha) + L(\beta).$$

Tomando ínfimo primero sobre las curvas α , y luego sobre las curvas β , obtenemos la desigualdad triangular de la métrica intrínseca. \square

Observación 5.3.2. Podemos suponer (reparametrizando) que todas las curvas suaves están parametrizadas en el intervalo $I = [0, 1]$. Notemos que en la definición pusimos ínfimo y no mínimo; esto se debe a que puede no haber, en ciertos casos, un mínimo.

Ejemplo 5.3.3 (Superficie sin curvas de longitud mínima). Si $M = \Pi - \{0\}$ donde Π es un plano por el origen, tomamos $p \in M$ cualquier punto, y tomamos $q = -p$. Está claro que $\text{dist}(p, q) = \|q - p\|$. Sin embargo, la curva que nos daría ese número, es decir, la que realizaría el mínimo en la definición de arriba, es el segmento $s(t) = t(q - p) + p \subset \Pi$. Sin embargo, $s(t)$ no está dentro de M pues “pasa por encima” del punto 0 que habíamos sacado del plano para construir M . En este caso entonces, sabemos cual es la distancia, pero no hay ninguna curva que tenga esa longitud en M .

§ Puede probarse (Teorema de Hopf-Rinow 5.5.6) que este tipo de obstáculos (remover puntos o conjuntos cerrados) son los únicos que hacen que no se realice el mínimo.

Veamos ahora que la distancia intrínseca es equivalente a la distancia de \mathbb{R}^3 . Ya observamos en la demostración del lema previo que si $p, q \in M \subset \mathbb{R}^3$, tenemos $\|p - q\| \leq \text{dist}(p, q)$ siempre, ya que la distancia en línea recta siempre es menor o igual a la longitud de cualquier curva (en particular cualquier curva en M). El problema evidente, es que la línea recta en general no es un camino posible *dentro* de la superficie M . Sin embargo, tenemos una comparación local:

Teorema 5.3.4. *Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular y dist la distancia intrínseca en M . Entonces esta distancia es equivalente a la distancia en M como subconjunto de \mathbb{R}^3 . Es decir, para todo $p_0 \in M$ existe una parametrización (U, φ) alrededor de p_0 y una constante $C_{p_0} > 1$ tal que*

$$\|p - q\| \leq \text{dist}(p, q) \leq C_{p_0} \|p - q\|$$

para todo $p, q \in \varphi(U)$.

Demostración. Como ya mencionamos, la primer desigualdad es siempre cierta sin restricciones. Para probar la segunda, por la Observación 4.1.2 podemos suponer que M alrededor de $p_0 \in M$ es el gráfico de una función $f : U = B_r(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , es decir

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

Achicando U si fuese necesario, existe una constante $K > 0$ tal que $\|\nabla f(v)\| \leq K$ para todo $v \in U$. Ahora dados $p, q \in V = \varphi(U)$, tomamos $v, w \in B_r(0)$ tales que $p = \varphi(v), q = \varphi(w)$ y consideramos el segmento $s(t) = tw + (1-t)v$ que los une. Sea $\alpha(t) = \varphi(s(t)) = (s(t), f(s(t)))$ curva que une p, q en M . Tenemos $\alpha' = (s', \nabla f_s \cdot s')$ luego como $s'(t) = w - v$,

$$\|\alpha'(t)\|^2 = \|w-v\|^2 + |\nabla f_{s(t)} \cdot (w-v)|^2 \leq (1+K^2)\|w-v\|^2 \leq (1+K^2)(\|v-w\|^2 + |f(w)-f(v)|^2).$$

Luego $\|\alpha'(t)\| \leq C\|\varphi(w) - \varphi(v)\|$, donde $C = \sqrt{1+K^2}$. Pero entonces

$$\text{dist}(p, q) \leq L(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'\| \leq C\|p - q\|,$$

que es lo que queríamos probar. \square

§ El ejemplo del plano punteado nos muestra que el entorno $\varphi(U) \subset M$ puede ser en algunos caso muy pequeño (tomar p_0 cerca del punto faltante en Π).

Corolario 5.3.5. *Los abiertos de la distancia intrínseca de M son exactamente los mismos que los abiertos relativos $B = W \cap M$ con $W \subset \mathbb{R}^3$ abierto.*

5.3.1. Fórmula de la primer variación

Vamos a buscar entonces curvas $\gamma \subset M$ con $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$ tales que $L(\gamma) = \text{dist}(p, q)$. Ahora bien, ¿cómo la encontramos? Veremos que necesariamente, una curva así es una geodésica, es decir, cumple la ecuación de Euler.

Para probarlo, consideremos lo que vamos a llamar una *variación* de una curva α , esto es una función de clase C^2 , $v : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$ de manera tal que $v = v(s, t)$ y $v(0, t) = \alpha(t)$. Por otro lado, para cada s fijo denotamos $v_s(t) = v(s, t)$, y esto da nuevas curvas que recorren M .

Si pedimos que todas las curvas comiencen en p y terminen en q , estamos forzando que

$$v(s, 0) = p, v(s, 1) = q \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Este tipo de variación se conoce como *variación de extremos fijos*. También vamos a definir el *campo variacional* $\mu = \mu(t) : [0, 1] \rightarrow TM$ de manera tal que $\mu(t) \in T_{\alpha(t)}M$ para todo t , de la siguiente manera

$$\mu(t) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} v(s, t) = v'_0(t).$$

Notemos que como $s \mapsto \nu(s, t)$ es una curva en M para cada t fijo, que pasa por $\gamma(t) = \nu(0, t)$ cuando $s = 0$, se deduce que la derivada de esta curva respecto de s en $s = 0$ es en efecto un vector tangente a M en el punto $\alpha(t)$.

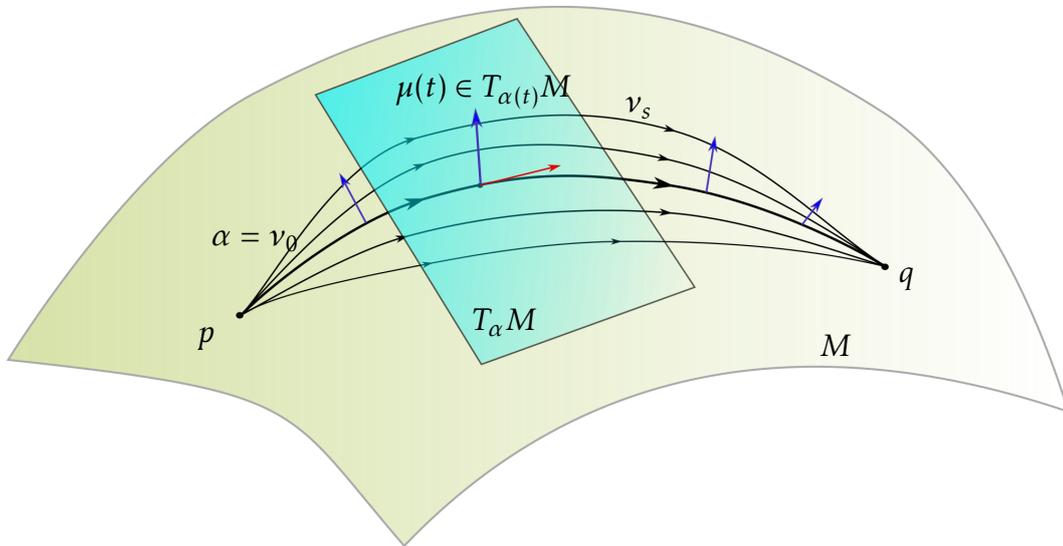


Figura 5.3: Una variación ν_s de α con extremos fijos y campo variacional μ

Lema 5.3.6. Dado $\mu : [0, 1] \rightarrow TM$ campo a lo largo de $\alpha \subset M$ continua (esto es, $\mu(t) \in T_{\alpha(t)} M$ para todo t), existe una variación $\nu(s, t)$ definida en $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1]$ para algún $\varepsilon > 0$, de manera que $\mu(t) = \frac{d}{ds}|_{s=0} \nu(s, t)$. Es decir todo campo variacional proviene de una variación en M . Si $\mu(0) = \mu(1) = 0$, entonces la variación tiene extremos fijos.

Demostración. Por el Teorema 5.1.10, las funciones dadas por las geodésicas - soluciones de la ecuación de Euler- dadas por $\gamma = \gamma(p, V, s)$ son funciones suaves y además se tiene $\gamma(p, sV, 1) = \gamma(p, V, s) = \text{Exp}_p(sV)$, donde esta expresión siempre existe si suponemos que s es suficientemente pequeño, pues el lado derecho existe en ese caso. Estamos usando la notación de la Observación 5.1.7. Consideremos la función

$$\nu(s, t) = \gamma_{\alpha(t), \mu(t)}(s) = \text{Exp}_{\alpha(t)}(s\mu(t))$$

para $|s| < \varepsilon$, eligiendo ε pequeño de manera tal que $\nu(s, t)$ esté definida para todo $t \in [0, 1]$. Esto se puede realizar con cuidado usando una propiedad de la exponencial que probaremos más adelante, ver el Corolario 5.5.4.

Notemos que para cada $t \in [0, 1]$ fijo, $s \mapsto v(s, t)$ es una geodésica. Afirmamos que v tiene las propiedades deseadas. Notemos primero que

$$v(0, t) = \gamma_{\alpha(t), \mu(t)}(0) = \text{Exp}_{\alpha(t)}(0\mu(t)) = \alpha(t)$$

puesto que $\alpha(t)$ es la posición inicial de la geodésica $s \mapsto \gamma_{\alpha(t), \mu(t)}(s)$. Por otra parte, derivando respecto de s tenemos que

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} v(s, t) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \text{Exp}_{\alpha(t)}(s\mu(t)) = D(\text{Exp}_{\alpha(t)})_0 \mu(t) = \mu(t)$$

puesto que la diferencial de la exponencial es la identidad en $v = 0$. Para terminar, notemos que para todo s , se tiene $v(s, 0) = \text{Exp}_{\alpha(0)}(0) = \alpha(0)$ si $\mu(0) = 0$. Similarmente $\alpha(s, 1) = \alpha(1)$ para todo s si $\mu(1) = 0$, lo que prueba que si $\mu(0) = \mu(1) = 0$, entonces la variación tiene extremos fijos. \square

Observación 5.3.7. Así que una variación induce un campo, y acabamos de probar que dado un campo μ , podemos construir una variación tal que μ sea su campo variacional. Notemos que la variación construida será de clase C^2 en la variable s sin importar la regularidad de μ ni de α , por la regularidad de la exponencial (suponiendo que M es C^3 como es habitual). Por otro lado, la regularidad en la variable t está condicionada por la de α, μ .

Dada una curva $\alpha \subset M$, de vital relevancia será el siguiente campo variacional de aceleraciones

$$\mu(t) = t(1-t)P_{\alpha(t)}(\ddot{\alpha}(t)) \in T_{\alpha(t)}M$$

que induce una variación con extremos fijos pues se anula en los extremos.

Teorema 5.3.8 (Fórmula de la primera variación). *Sea $\alpha = \alpha(s, t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1]$ una variación de $\alpha \subset M$ con extremos fijos de clase C^2 , y supongamos que α está parametrizada con rapidez constante $\ell = \|\dot{\alpha}\| = L(\alpha)$. Denotamos*

$$f(s) = L_0^1(\alpha_s) = \int_0^1 \left\| \frac{d}{dt} \alpha(s, t) \right\| dt$$

la función que a cada s le asigna la longitud de $\alpha_s : [0, 1] \rightarrow M$. Entonces

$$f'(0) = -\frac{1}{\ell} \int_0^1 \langle \ddot{\alpha}(t), \mu(t) \rangle dt = -\frac{1}{\ell} \int_0^1 \langle \nabla_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}, \mu \rangle ,$$

donde μ es el campo variacional de α : $\mu(t) = \frac{d}{ds}\big|_{s=0} \alpha(s, t)$.

Demostración. Para abreviar y como es habitual, denotamos $(\cdot)' = \frac{d}{ds}$ y denotamos $(\cdot)\dot{=} \frac{d}{dt}$. Entonces claramente

$$f'(0) = \int_0^1 \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \|\dot{\alpha}_s(t)\| dt.$$

Calculamos $\frac{d}{ds}\big|_{s=0} \|\dot{\alpha}_s(t)\| = \frac{1}{\|\dot{\alpha}_0(t)\|} \langle \dot{\alpha}_0(t), \dot{\alpha}'|_{s=0}(t) \rangle$ por la fórmula para la derivada de la norma euclídea (Observación 1.1.10). Intercambiando las derivadas (la función exponencial de M es de clase C^2), y recordando que $\alpha_0 = \alpha$, y que α tiene rapidez constante, obtenemos

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \|\dot{\alpha}_s(t)\| = \frac{1}{\ell} \langle \dot{\alpha}(t), \dot{\mu}(t) \rangle$$

puesto que $\mu = \alpha'_s|_{s=0}$. Esto es

$$f'(0) = \int_0^1 \frac{1}{\ell} \langle \dot{\alpha}(t), \dot{\mu}(t) \rangle dt$$

Ahora observamos que $\frac{d}{dt} \langle \mu(t), \dot{\alpha}(t) \rangle = \langle \dot{\mu}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle + \langle \mu(t), \ddot{\alpha}(t) \rangle$, luego integrando t entre 0 y 1, se tiene

$$\langle \mu(t), \dot{\alpha}(t) \rangle \bigg|_{t=0}^{t=1} = \int_0^1 \langle \dot{\mu}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle dt + \int_0^1 \langle \mu(t), \ddot{\alpha}(t) \rangle dt.$$

Pero $\mu(1) = \mu(0) = 0$ luego el lado izquierdo es nulo y

$$\int_0^1 \langle \dot{\mu}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle dt = - \int_0^1 \langle \mu(t), \ddot{\alpha}(t) \rangle dt.$$

Multiplicando por $\frac{1}{\ell}$ obtenemos la primer parte de la fórmula enunciada:

$$f'(0) = -\frac{1}{\ell} \int_0^1 \langle \ddot{\alpha}(t), \mu(t) \rangle dt,$$

Para obtener la segunda igualdad, que involucra la derivada de Levi-Civita ∇ , notamos que $\ddot{\alpha} = (\dot{\alpha})'$ y que $P_\alpha \mu = \mu$ ya que $\mu \in T_\alpha M$ (Definición 5.1.3). Entonces

$$\langle \ddot{\alpha}, \mu \rangle = \langle \ddot{\alpha}, P_\alpha \mu \rangle = \langle P_\alpha(\ddot{\alpha}), \mu \rangle = \langle \nabla_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}, \mu \rangle$$

ya que $P_\alpha^t = P_\alpha$. □

Con esta fórmula a mano, es muy simple probar que una curva extremal (de longitud mínima) cumple la ecuación de Euler. Es decir, toda curva minimal es una geodésica.

Teorema 5.3.9. *Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ regular de clase C^2 tal que $L(\gamma) = \text{dist}(p, q)$, donde $p = \gamma(0), q = \gamma(1)$. Entonces γ es una reparametrización de una geodésica (esta reparametrización verifica la ecuación de Euler).*

Demostración. Supongamos primero que γ tiene rapidez constante y está definida en $[0, 1]$. Esto obliga a que $\ddot{\gamma} \perp \dot{\gamma}$ pero no necesariamente $\ddot{\gamma} \in T_{\gamma(t)}^\perp M$. Consideremos entonces el campo variacional con extremos fijos a lo largo de γ dado por proyectar la aceleración de γ sobre TM : $\mu(t) = t(1-t)P_{\gamma(t)}(\ddot{\gamma}(t)) \in T_{\gamma(t)}M$, donde supondremos primero que γ es de clase C^4 así μ es de clase C^2 . Y consideremos una variación de clase C^2 , $\alpha(s, t) \subset M$, con extremos fijos, tal que $\alpha'_0(t) = \mu(t)$ como en el Lema 5.3.6. Entonces por la fórmula de la primera variación, si $f(s) = L(\alpha_s)$,

$$f'(0) = -\frac{1}{\ell} \int_0^1 \langle \ddot{\gamma}(t), t(1-t)P_{\gamma(t)}(\ddot{\gamma}(t)) \rangle dt = -\frac{1}{\ell} \int_0^1 t(1-t) \langle \ddot{\gamma}(t), P_{\gamma(t)} \circ P_{\gamma(t)}(\ddot{\gamma}(t)) \rangle dt$$

puesto que $P \circ P = P$. Por otro lado, si γ es minimal, entonces f tiene un mínimo en $s = 0$, luego $f'(0) = 0$. Además, como $P^t = P$, tenemos

$$0 = f'(0) = -\frac{1}{\ell} \int_0^1 t(1-t) \langle P_{\gamma(t)}(\ddot{\gamma}(t)), P_{\gamma(t)}(\ddot{\gamma}(t)) \rangle dt = -\frac{1}{\ell} \int_0^1 t(1-t) \|P_{\gamma(t)}(\ddot{\gamma}(t))\|^2 dt.$$

Ahora bien, $t(1-t)\|P_{\gamma(t)}(\ddot{\gamma}(t))\|^2 \geq 0$ para todo $t \in [0, 1]$, luego si su integral es nula, debe ser

$$t(1-t)\|P_{\gamma(t)}(\ddot{\gamma}(t))\|^2 = 0$$

para todo $t \in [0, 1]$. Si $t, 1-t \neq 0$ (o sea si $t \neq 0, t \neq 1$), se deduce que

$$\|P_{\gamma(t)}(\ddot{\gamma}(t))\|^2 = 0$$

para todo $t \in (0, 1)$. Pero esto sólo es posible si $P_{\gamma(t)}(\ddot{\gamma}(t)) = 0$ para todo $t \in (0, 1)$. Como esa norma es una función continua, debe ser

$$P_{\gamma(t)}(\ddot{\gamma}(t)) = 0$$

para todo $t \in [0, 1]$. Luego γ verifica la ecuación de Euler, y se trata entonces de una geodésica. Si γ es sólo de clase C^2 , se puede tomar un campo $\tilde{\mu}$ de clase C^2

que aproxime tanto como deseemos μ , y se llega a la misma conclusión (Ejercicio 5.3.14).

Supongamos ahora que γ , definida en $[a, b]$ es regular, no necesariamente de velocidad constante, y reparametrizemos por velocidad constante en $[0, 1]$. Aplicando el razonamiento anterior a la nueva curva, esta reparametrización resulta una geodésica. Volviendo atrás (reparametrizando con la función inversa de la que usamos antes) se deduce que γ es una reparametrización de una geodésica. \square

Obtuvimos entonces la relación
 γ minimal $\implies \gamma$ geodésica.

Observación 5.3.10. Hay que tener precaución porque la otra implicación no es necesariamente cierta. Por ejemplo, si $p, -p$ son puntos antipodales de la esfera S^2 (por ejemplo, el polo norte y el polo sur), y tomamos un arco máximo que los une, esta es una geodésica. Si prolongamos este arco, sigue siendo una geodésica, sin embargo, ya deja de ser minimizante, ya que el camino más corto se obtiene recorriendo este arco pero por el otro lado.

También hay que notar en este ejemplo, que dados $p, q = -p$ hay infinitas geodésicas cortas que los unen (cualquier meridiano sirve para este fin).

5.3.2. Ejercicios

5.3.13. Sea M superficie regular, con su distancia geodésica $dist$, sean $p, q \in M$. Decimos que $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ curva continua es *minimal para L* , si $dist(\gamma(a), \gamma(b)) = L(\gamma)$.

1. Probar que toda restricción de γ es minimal. ¿Es cierto esto si γ sólo es punto crítico de la funcional longitud?
2. Probar que si $(M, dist)$ es un espacio métrico completo, entonces existe una curva continua minimal γ que une p, q (sug: Teorema de Arzelá-Ascoli).

5.3.14. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ continua y $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo continuo a lo largo de α . probar que si $\int_a^b \langle z(t), \phi(t) \rangle dt = 0$ para todo campo $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ a lo largo de α de clase C^2 , entonces $z(t) = 0$ en $[a, b]$.

5.3.15. Sean $M \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ regular a trozos con rapidez constante, μ campo a lo largo de α , regular a trozos. Tomemos la variación de α dada por la colección de geodésicas $\nu(s, t) = \gamma_{\alpha(t), \mu(t)}(s) = \text{Exp}_{\alpha(t)}(s\mu(t))$. Probar que

$$L(\alpha) \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\nu_s) = - \int_0^1 \langle \nabla_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}, \mu \rangle dt + \sum_{i=1}^n \langle \mu(t_i), \dot{\alpha}(t_i^-) - \dot{\alpha}(t_i^+) \rangle + \langle \mu(1), \dot{\alpha}(1^-) \rangle - \langle \mu(0), \dot{\alpha}(0^+) \rangle.$$

5.3.16. Sea M superficie regular, $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$. Probar que

1. Si γ es geodésica, entonces es punto crítico de L para toda variación propia.
2. Si γ es C^2 y punto crítico de L (en particular minimal), entonces es geodésica.
3. Si γ es regular a trozos y punto crítico de L (en particular minimal), entonces γ es una reparametrización de una geodésica, en particular es suave en $[0, 1]$.

5.3.17. Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ curva regular inyectiva, sea $N = \text{im}(\gamma)$. Sea $p \in M \setminus N$, consideremos $f(q) = \text{dist}(q, p)$ con $q \in N$. Probar que existe $q_0 \in N$ que minimiza f , y que si α es una geodésica minimizante que une p, q_0 , entonces α es ortogonal a N en q_0 (sug: considerar una variación de α con un extremo fijo en p y el otro libre en N).

5.3.18. El funcional energía se define, para curvas regulares a trozos $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, como

$$E(\gamma) = 1/2 \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|_{\gamma}^2 dt.$$

Probar resultados análogos a los de los Ejercicios 5.3.15 y 5.3.16, para el funcional energía. Concluir que un mínimo del funcional energía es una geodésica (sug: E no es invariante por reparametrizaciones).

5.3.19. Probar que $L(\alpha)^2 \leq 2E(\alpha)$ para toda curva regular a trozos. Probar que los mínimos de la longitud son mínimos de la energía. ¿Es cierta la afirmación recíproca?

5.4. Minimalidad local de las geodésicas

El siguiente resultado, conocido como Lema de Gauss, nos dice que, a lo largo de la geodésica $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$, la diferencial de la exponencial es *casi* una isometría.

Más precisamente, tomamos $f = \text{Exp}_p : T_pM \rightarrow M$ (restringiendo a $B_r(0_p) \subset T_pM$, para un $r > 0$ adecuado para que esté bien definida). Notamos que $f(0) = \text{Exp}_p(0) = p$, y además denotamos $q = \text{Exp}_p(v)$ para $v \in B_r(0_p)$. Pensamos $S = B_r(0_p) \subset \mathbb{R}^3$ como superficie regular, y notamos que $T_vS = T_pM$ puesto que el conjunto de todas las direcciones posibles, en un subconjunto abierto de un subespacio, es el mismo subespacio. Luego, usando la observación general que dice que si $f : S \rightarrow M$ y $f(v) = q \in M$, se obtiene diferenciando una transformación lineal $Df_v : T_vS \rightarrow T_{f(v)}M$. En particular y por lo recién observado,

$$D(\text{Exp}_p)_v : T_pM \rightarrow T_qM \quad \text{cuando } q = \text{Exp}_p(v).$$

Entonces dado $w \in T_pM$ podemos preguntarnos qué ángulo hay entre $D(\text{Exp}_p)_v w$ y $D(\text{Exp}_p)_v v$, con respecto al ángulo entre v y w . El lema de Gauss nos dice que este ángulo se conserva.

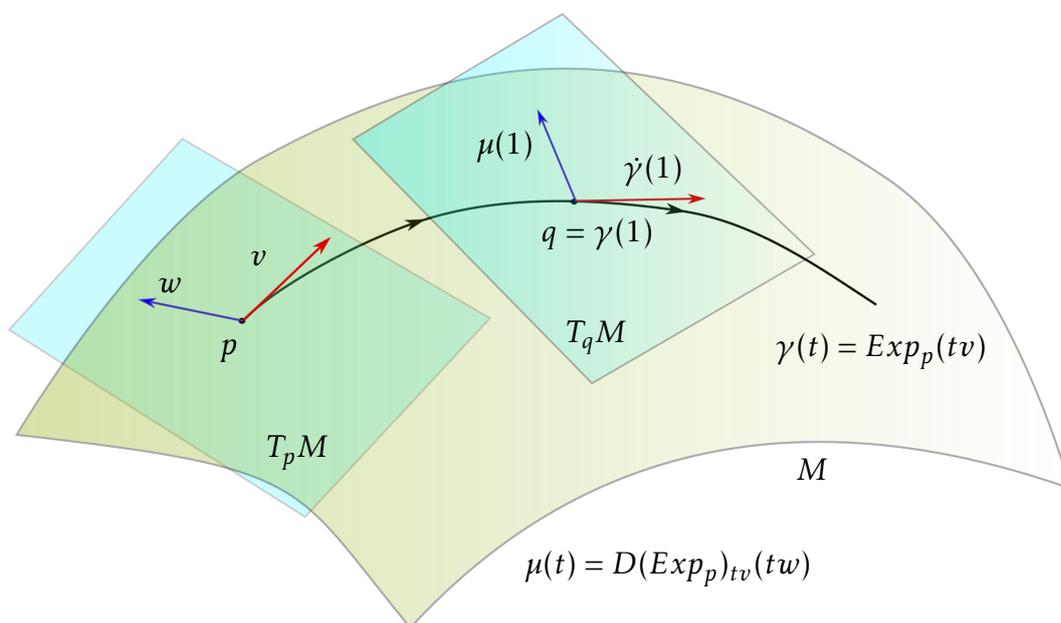


Figura 5.4: Lema de Gauss: El ángulo entre $\dot{\gamma}$ y μ es constante

Teorema 5.4.1 (Lema de Gauss). *Sea M superficie regular, $p \in M$, $v \in \text{Dom}(\text{Exp}_p)$. Entonces para todo $w \in T_p M$,*

$$\langle D(\text{Exp}_p)_v v, D(\text{Exp}_p)_v w \rangle = \langle v, w \rangle.$$

En particular si $v \perp w$, el los vectores siguen siendo ortogonales luego de aplicar la diferencial de Exp_p en la dirección de v .

Demostración. Consideramos la variación $\nu(s, t) = \text{Exp}_p(t(v + sw))$ definida en $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1]$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de manera tal que $v + sw$ esté en el dominio de Exp_p . Notamos que para cada s fijo, $t \mapsto \nu_s = \nu(s, \cdot)$ es una geodésica con velocidad inicial $v + sw$. Como las geodésicas tienen velocidad constante, se tiene

$$\|\dot{\nu}_s(t)\|^2 = \|\dot{\nu}_s(0)\|^2 = \|v + sw\|^2 = \|v\|^2 + s^2\|w\|^2 + 2s\langle v, w \rangle.$$

Llamemos μ al campo variacional de ν , es decir $\mu(t) = \nu'_0(t)$. Derivando la identidad recién observada respecto de s obtenemos

$$2\left\langle \frac{d}{ds} \dot{\nu}_s(t), \dot{\nu}_s(t) \right\rangle = 2s\|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle.$$

Cancelando los 2, intercambiando las derivadas respecto de s, t en el primer término y evaluando en $s = 0$ obtenemos $\langle \dot{\mu}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = \langle v, w \rangle$. Sea entonces $f(t) = \langle \mu(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$, como γ es geodésica se tiene

$$f'(t) = \langle \dot{\mu}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle + \langle \mu(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle = \langle \dot{\mu}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle + 0 = \langle v, w \rangle.$$

Luego f tiene que ser lineal, y así $f(t) = \langle v, w \rangle t + f(0) = t\langle v, w \rangle$ puesto que $\mu(0) = 0$, ya que de la misma definición de ν es claro que $\mu(t) = D(\text{Exp}_p)_{tv}(tw)$. Por otro lado $\dot{\gamma}(t) = D(\text{Exp}_p)_{tv}v$ y entonces evaluando en $t = 1$,

$$\langle D(\text{Exp}_p)_v(w), D(\text{Exp}_p)_v(v) \rangle = \langle \mu(1), \dot{\gamma}(1) \rangle = f(1) = \langle v, w \rangle,$$

obtenemos la identidad del lema. □

Definición 5.4.2 (Coordenadas polares). Usando la parametrización exponencial, definida en una bola $B_R(0_p) \subset T_p M$ de radio $R = R(p) > 0$, podemos tomar cualquier vector no nulo $v \in T_p M$ y escribirlo como $w = ru$ donde $r = \|v\| > 0$ y $u = \frac{v}{\|v\|} \in T_p M$ tiene norma unitaria. Esta escritura se conoce como coordenadas

polares de w , en analogía con la escritura en coordenadas polares de un número complejo no nulo, $z = re^{i\theta}$, donde $r > 0$ y $e^{i\theta}$ tiene módulo unitario.

Sea $V_R = \text{Exp}_p(B_R(0_p)) \subset M$ el entorno abierto de $p \in M$ dado por la parametrización exponencial restringida a la bola $B_R(0_p) \subset T_pM$ donde es un difeomorfismo con su imagen. Si $\gamma \subset V_R$ es una curva C^1 que no toca p , entonces podemos considerar $v(t) = \text{Exp}_p^{-1}(\gamma(t)) \subset B_R(0_p) \setminus \{0\}$ que no toca el 0 de T_pM . En consecuencia podemos escribir

$$\gamma(t) = \text{Exp}_p(v(t)) = \text{Exp}_p(r(t)u(t))$$

donde $r(t)u(t) = v(t)$ es la escritura en coordenadas polares de $v(t)$. Su derivada se calcula usando la regla de la cadena como

$$\dot{\gamma}(t) = D(\text{Exp}_p)_{v(t)}(\dot{r}(t)u(t) + r(t)\dot{u}(t)),$$

o de manera más compacta, omitiendo la variable t , como

$$\dot{\gamma} = \dot{r} D(\text{Exp}_p)_v(u) + r D(\text{Exp}_p)_v(\dot{u}), \quad (5.14)$$

puesto que r, \dot{r} son escalares y la diferencial de Exp_p es lineal.

Lema 5.4.3. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow V_R$ no toca p y $\gamma(t) = \text{Exp}_p(v(t)) = \text{Exp}_p(r(t)u(t))$ es la escritura en coordenadas polares de $v(t)$, entonces para todo t

$$\|\dot{\gamma}(t)\| \geq |\dot{r}(t)|$$

Demostración. Por la ecuación (5.14), tomando norma de la suma y usando el Lema de Gauss, obtenemos

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}\|^2 &= |\dot{r}|^2 \|D(\text{Exp}_p)_v u\|^2 + |r|^2 \|D(\text{Exp}_p)_v \dot{u}\|^2 + 2r\dot{r} \langle D(\text{Exp}_p)_v u, D(\text{Exp}_p)_v \dot{u} \rangle \\ &= |\dot{r}|^2 \|D(\text{Exp}_p)_v u\|^2 + |r|^2 \|D(\text{Exp}_p)_v \dot{u}\|^2 + 2r\dot{r} \langle u, \dot{u} \rangle \\ &= |\dot{r}|^2 \|D(\text{Exp}_p)_v u\|^2 + |r|^2 \|D(\text{Exp}_p)_v \dot{u}\|^2 + 0 \end{aligned}$$

puesto que, como $\|u(t)\|^2 = 1$, entonces $u \perp \dot{u}$. Luego

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = |\dot{r}|^2 \|D(\text{Exp}_p)_v u\|^2 + |r|^2 \|D(\text{Exp}_p)_v \dot{u}\|^2 \geq |\dot{r}|^2 \|D(\text{Exp}_p)_v u\|^2 \quad (5.15)$$

Pero para cada $u \in T_pM$ fijo de norma unitaria, si consideramos la curva $\beta(r) = \text{Exp}_p(ru)$, esta resulta una geodésica, luego tiene velocidad constante igual a $\|u\| = 1$ y entonces como $v = ru$, se tiene

$$\|\dot{\gamma}\| \geq |\dot{r}| \|D(\text{Exp}_p)_{ru} u\| = |\dot{r}| \left\| \frac{d\beta}{dr} \right\| = |\dot{r}|. \quad \square$$

El siguiente teorema nos dice que tomando un punto cualquiera en la superficie, y usando las geodésicas como rayos o direcciones radiales, podemos dotar al entorno del punto de un sistema de coordenadas donde la distancia al punto dado se realiza a lo largo de la geodésica correspondiente (Figura 5.2). Este es el contenido de la cita de la disertación habilitante de Riemann que da inicio este capítulo -disertación que le permitió obtener el puesto de profesor en Erlangen-.

Teorema 5.4.4 (Minimalidad local de las geodésicas). *Sea $p \in M$ y $R = R(p) > 0$ tal que la parametrización exponencial está definida en $B_R(0_p) \subset T_pM$. Dado $q = \text{Exp}_p(v) \in V_R = \text{Exp}_p(B_R(0_p)) \subset M$, sea $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$ la única geodésica en V_R que une p, q . Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ curva regular a trozos que comienza en p , entonces*

1. Si α sale de V_R , entonces $L(\alpha) \geq R$.
2. Si α une p, q , entonces $L(\alpha) \geq \|v\| = L(\gamma)$, con igualdad si y sólo si α es una reparametrización de γ .
3. $\text{dist}(p, q) = L(\gamma) = \|v\|$.

Demostración. Si α vuelve a pasar por p en tiempo $a < t_1 < b$, entonces $L(\alpha) \geq L(\alpha|_{[t_1, b]})$ y podemos entonces suponer que α no vuelve a pasar por p . Sea $I \subset [a, b]$ la componente conexa que contiene a $a \in \mathbb{R}$ del conjunto $\alpha^{-1}(V_R)$, que es un abierto no vacío puesto que $\alpha(a) = p$. Luego $I = [a, b]$ si α no se sale de V_R , mientras que $I = [a, c]$ con $a < c < b$ si α sale de V_R . Para evitar problemas con las coordenadas polares, trabajaremos en $t > a + \delta$ para evitar que α toque p , y al finalizar haremos tender $\delta \rightarrow 0^+$. Si α se sale de V_R , escribiendo $\alpha(t) = \text{Exp}_p(v(t))$, con $v(t) = r(t)u(t)$ las coordenadas polares de v , debe existir $a < t_n < c$ creciente tal que $r(t_n) > R - 1/n$. Luego

$$|r(t_n) - r(a + \delta)| = \left| \int_{a+\delta}^{t_n} \dot{r}(t) dt \right| \leq \int_{a+\delta}^{t_n} |\dot{r}(t)| dt \leq \int_{a+\delta}^{t_n} \|\dot{\alpha}(t)\| dt \leq L(\alpha)$$

por el lema anterior. Haciendo tender $\delta \rightarrow 0^+$ tenemos $r(a + \delta) \rightarrow r(a) = 0$ (ya que $\alpha(a) = p$), luego

$$R - 1/n < r(t_n) \leq L(\alpha)$$

prueba que $L(\alpha) \geq R > \|v\| = L(\gamma)$ (y en particular la desigualdad es estricta). Supongamos ahora que α no sale de V_R , entonces nuevamente

$$|r(b) - r(a + \delta)| \leq \int_{a+\delta}^b \|\dot{\gamma}\| dt \leq L(\gamma)$$

y haciendo tender $\delta \rightarrow 0^+$ obtenemos $L(\alpha) \geq |r(b) - r(a)| = r(b) = \|v\| = L(\gamma)$, puesto que $Exp_p(v) = q = \alpha(b) = Exp_p(r(b)u(b))$ y por la inyectividad de la exponencial en $B_R(0)$, debe ser $r(b)u(b) = v$, luego $\|v\| = r(b)$. Si vale la igualdad, examinando la desigualdad (5.15) debe ser $r\|D(Exp_p)_{ru}\dot{u}\| = 0$ idénticamente, pero como $r(t)$ es no nulo en $(a, b]$, debe ser $D(Exp_p)_{ru}\dot{u} = 0$ en $[a, b]$. Pero esta diferencial es un isomorfismo luego debe ser $\dot{u}(t) = 0$ en $[a, b]$ y esto sólo es posible si $u(t) = u$ es constante. Como $r(b)u_0 = r(b)u(b) = v$, se tiene que u_0 es múltiplo de v y en consecuencia $\alpha(t) = Exp_p(r(t)u_0)$ es una reparametrización de $\gamma(t) = Exp_p(tv)$. La última afirmación enunciada en el teorema es inmediata de lo recién probado, ya que la distancia intrínseca es el ínfimo de las longitudes de curvas que unen p, q en M . \square

Definición 5.4.5 (Radio de inyectividad). El número $i_p = R(p)$ se denomina *radio de inyectividad* de la exponencial en p , formalmente se define como

$$i_p(M) = \sup\{r > 0 \text{ tq } Exp_p|_{B_r(0_p)} : B_r(0_p) \rightarrow M \text{ es un difeomorfismo con su imagen}\}.$$

Se denomina *radio de inyectividad* de la superficie M al ínfimo de los radios de inyectividad, esto es

$$i(M) = \inf\{i_p(M) : p \in M\}.$$

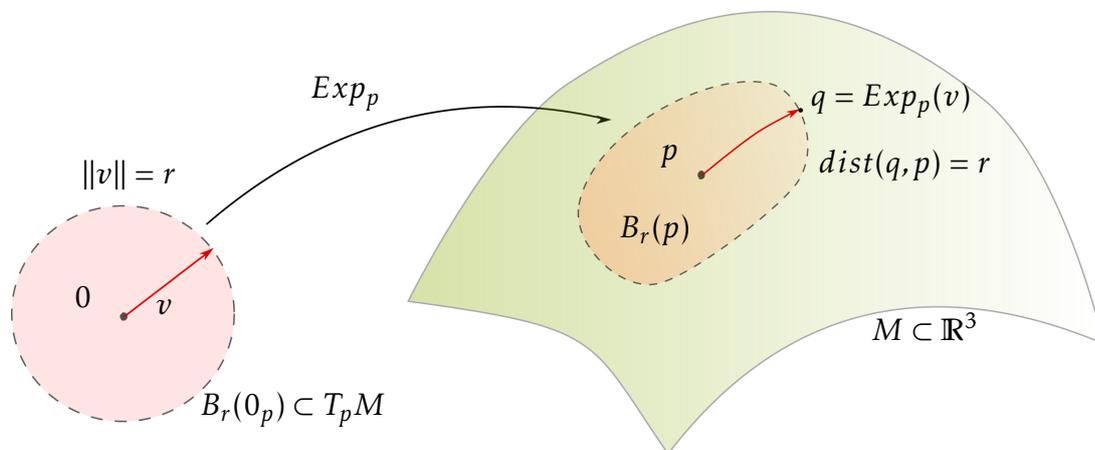


Figura 5.5: Entornos métricos dados por la parametrización exponencial

Corolario 5.4.6 (Isometría radial-local de la exponencial). Para todo $0 < c \leq R = i_p(M)$ se tiene

$$Exp_p(B_c(0_p)) = B_c(p) = \{q \in M : dist(q, p) < c\},$$

$$\text{Exp}_p(\overline{B}_c(0_p)) = \overline{B}_c(p) = \{q \in M : \text{dist}(q, p) \leq c\},$$

y si $S_c(0_p) \subset T_p M$ denota la circunferencia de radio c centrada en 0_p , $S_c = \overline{B}_p \setminus B_p$ entonces también

$$\text{Exp}_p(S_c(0_p)) = S_c(p) = \{q \in M : \text{dist}(q, p) = c\}.$$

Demostración. Si $\|v\| < c$ entonces por el teorema anterior aplicado a la bola de radio c , dado $q = \text{Exp}_p(v) \in V_c$ y $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$ se tiene

$$\|v\| = L(\gamma) \geq \text{dist}(p, q) = \inf\{L(\alpha) : \alpha \subset M \text{ une } p, q\} \geq \|v\|$$

lo que nos dice que en efecto $\text{dist}(p, q) = \|v\| < c$. Esto prueba que $\text{Exp}_p(B_c(0_p)) \subset \{q \in M : \text{dist}(q, p) < c\}$. Ahora supongamos que $\text{dist}(q, p) < c$, entonces $q \in V_c$ porque de otra manera toda curva que los une saldría de V_c y tendría longitud mayor a c . Pero si $q \in V_c$ existe $v \in T_p M$ con $\|v\| < c$ tal que $q = \text{Exp}_p(v)$ y esto prueba la otra inclusión. La prueba para la bola cerrada y la esfera es similar y queda como ejercicio para el lector. \square

5.5. Teoremas de Hopf-Rinow

Para entender los próximos resultados es útil recordar y poner en contexto la Observación 1.2.12, que nos dice que una curva continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ es rectificable si

$$\ell(\gamma) = \sup_{\pi} \sum_i \text{dist}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) < \infty$$

donde el supremo es sobre todas las particiones $\pi = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}$ del intervalo $[0, 1]$.

Veamos que al igual que para la distancia euclídea (como propusimos al lector probar en el Problema 1.2.13), para curvas regulares a trozos esta definición coincide con la usual de longitud integrando su rapidez. Más precisamente si $\beta : [0, 1] \rightarrow M$ es curva regular, a partir de la ecuación (1.8) y el Teorema 5.3.4 podemos hallar, para cada $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tal que si toda la partición $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$ de $[0, 1]$ tiene diámetro menor que δ , entonces denotando $\Delta_i = t_{i+1} - t_i \geq 0$,

$$\|\dot{\beta}(c_i)\|\Delta_i < \varepsilon\Delta_i + \|\beta(t_{i+1}) - \beta(t_i)\| \leq \varepsilon\Delta_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{\beta}(t)\| dt,$$

siempre que $c_i \in [t_i, t_{i+1}]$. Sumando sobre i y observando que a la izquierda quedan las sumas de Riemann de la rapidez, obtenemos

$$\int_0^1 \|\dot{\beta}\| \leq \varepsilon + \ell(\beta) \leq \varepsilon + \int_0^1 \|\dot{\beta}\|,$$

lo que nos dice que $\ell(\beta) = L(\beta)$.

Observación 5.5.1. Uno debería preguntarse, si definimos una nueva distancia con esta longitud ℓ , si será distinta de la intrínseca de M ; afortunadamente esto no es así, y ambas distancias coinciden en M . Para verlo, y sólo por claridad de esta observación, llamemos d_ℓ al ínfimo de las longitudes de arcos rectificables que unen p, q (parametrizadas en $[0, 1]$). Tomando la partición trivial $t_0 = 0, t_1 = 1$ obtenemos que para toda curva rectificable

$$\text{dist}(p, q) = \text{dist}(\gamma(0), \gamma(1)) \leq \ell(\gamma)$$

y tomando ínfimo sobre γ rectificable, $\text{dist}(p, q) \leq d_\ell(p, q)$. Recíprocamente y si β es regular a trozos uniéndo p, q en M entonces para cualquier partición se tiene

$$\text{dist}(\beta(t_i), \beta(t_{i+1})) \leq L(\beta|_{[t_i, t_{i+1}]})$$

asi que sumando sobre i obtenemos

$$d_\ell(p, q) \leq \ell(\beta) = \sum_i \text{dist}(\beta(t_i), \beta(t_{i+1})) \leq \sum_i L(\beta|_{[t_i, t_{i+1}]}) = L(\beta).$$

Tomando ínfimo sobre las curvas β regulares a trozos obtenemos $d_\ell(p, q) \leq \text{dist}(p, q)$, luego $d_\ell = \text{dist}$.

Observación 5.5.2 (Espacios de métrica interior). Un espacio métrico (X, d) donde la distancia se calcula como el ínfimo de las longitudes de curvas, se conoce como *espacio de métrica interior*. Estos espacios métricos comparten propiedades intuitivas más cercanas a las de los espacios normados. Por ejemplo, puede el lector verificar que en estos espacios, la clausura de la bola abierta coincide con la bola cerrada, es decir

$$\overline{B_r(p)} = \{q \in X : \text{dist}(q, p) \leq r\}$$

para todo $r > 0$ (Ejercicio 5.5.20).

El siguiente resultado será de utilidad para estudiar las geodésicas.

Teorema 5.5.3 (Entornos uniformemente normales). *Sea M superficie regular, $p \in M$. Entonces existe $\delta = \delta(p) > 0$ y un entorno abierto $W \subset M$ de p tal que para todo $q \in W$, la parametrización exponencial está definida en (al menos) $B_\delta(0_q) \subset T_q M$. Además para todo $x, y \in W$, se tiene $W \subset B_\delta(x)$, existe una única geodésica $\gamma_{x,y}$ que los une, y la función $(t, x, y) \mapsto \gamma_{x,y}(t)$ es de clase C^1 .*

Demostración. Sea $\varphi : B_R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ parametrización regular de un entorno de p dada por $\varphi(x) = \text{Exp}_p(Lx)$ donde $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p M$ es un isomorfismo lineal isométrico y $R = i_p(M)$. Notamos que $\varphi(0) = p$ y que $D\varphi_0 = L$. Consideramos el abierto

$$TB_r = \{(x, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \|x\| < r, \|D\varphi_x v\| < r\} \supset B_r \times \{0\},$$

y la función $E : TB_r \rightarrow M \times M \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dada por

$$E(x, v) = (\varphi(x), \text{Exp}_{\varphi(x)}(D\varphi_x v)),$$

con r suficientemente chico como para que E esté bien definida y sea de clase C^1 (Teorema 5.1.6 y las observaciones que le siguen). La superficie $M \times M$ la pensamos parametrizada (alrededor de $p \times p$) con $\varphi \times \varphi$, ya que $E(x, 0) = (\varphi(x), \varphi(x))$. Por otro lado,

$$DE_{(x,0)} = \begin{pmatrix} D\varphi_x & 0 \\ \star & D\varphi_x \end{pmatrix},$$

donde para el bloque 2–2 calculamos la diferencial respecto de v en $v = 0$ como

$$\frac{d}{dt} \text{Exp}_{\varphi(x)}(D\varphi_x v_t) = D(\text{Exp}_{\varphi(x)})_0 D\varphi_x \dot{v} = D\varphi_x \dot{v}.$$

Es claro que $DE_{(x,0)}$ es inversible. Tomando $0 < \delta < r$, y por el teorema de la función inversa, E es un difeomorfismo entre TB_δ y $Z = E(TB_\delta)$ que es un entorno abierto en $M \times M$, que contiene a $p \times p$. Tomamos cualquier entorno $W \subset B_\delta(p)$ del punto p tal que $W \times W \subset Z$. Afirmamos que W tiene las propiedades necesarias. Sea $q = \varphi(x) \in W$, $\tilde{v} \in T_q M$ con $\|\tilde{v}\| < \delta$. Sea $v = D\varphi_x^{-1} \tilde{v}$, entonces $(x, v) \in TB_\delta$ y la siguiente cadena es de difeomorfismos:

$$(q, \tilde{v}) = (\varphi(x), D\varphi_x v) \mapsto (x, v) \mapsto E(x, v) = (q, \text{Exp}_q(\tilde{v})).$$

En particular Exp_q es un difeomorfismo restringido a $B_\delta(0_q)$. Las otras afirmaciones las dejamos como ejercicio para el lector (Ejercicio 5.5.27). \square

Corolario 5.5.4 (Radio de inyectividad). *Sea M superficie regular y $K \subset M$ compacto. Entonces existe $R > 0$ tal que $i_p(M) \geq R$ para todo $p \in K$.*

Demostración. Supongamos que no, entonces el ínfimo es nulo y existe una sucesión $(p_n)_n \subset K$ que lo realiza; pasando a una subsucesión podemos suponer que $p_n \rightarrow p \in K$ es convergente. Pero si W es un entorno uniformemente normal de p , y $\delta > 0$ es como en el teorema anterior, tomamos n_0 tal que $i_{p_n}(M) < \delta$ para todo $n \geq n_0$, y a la vez $p_n \in W$ para todo $n \geq n_0$. Esto es contradictorio. \square

§ Dejamos como ejercicio para el lector probar que la función $i : M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por el radio de inyectividad, $i(p) = i_p(M)$ es una función continua (Ejercicio 5.5.28). Ver también [14, Sección III.4] para una discusión sobre el radio de inyectividad vinculada con la noción de puntos conjugados de una geodésica, con la cual no hemos trabajado en este texto.

Teorema 5.5.5. *Sean $p, q \in M$ superficie regular, $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ que los une con $\ell(\gamma) = \text{dist}(p, q)$. Entonces γ es una reparametrización de una geodésica de M .*

Demostración. Consideramos $K = \text{im}(\gamma)$ y nos quedamos con $R > 0$ como en el corolario anterior. Tomamos $B_R(p)$ alrededor de $p = \gamma(0)$ y $q_1 = \gamma(t_1)$, de manera tal que $q_1 \in B_R(p)$ y $\gamma|_{[0, t_1]} \subset B_R(p)$. Por el teorema de minimalidad local (Teorema 5.4.4), hay una geodésica minimal μ que une q, q_1 , y μ no sale de $B_R(p)$.

Afirmamos que $\gamma|_{[0,t_1]}$ es una reparametrización de μ . Suponamos que existe $x = \gamma(c)$ con $0 < c < t_1$ tal que $x \notin im(\mu)$. Como

$$\text{dist}(p, x) = \ell(\gamma|_{[0,c]}) \leq \ell(\gamma|_{[0,t_1]}) < R$$

pues γ es corta en cualquier tramo (Ejercicio 5.3.13), también existe una geodésica corta μ_1 en $B_R(p)$ que une p, x . Similarmente

$$\text{dist}(x, q_1) = \ell(\gamma|_{[c,t_1]}) \leq \ell(\gamma|_{[0,t_1]}) < R,$$

así que también existe una geodésica corta μ_2 en $B_R(q_1)$ que une x, q_1 . Pero entonces, si $\mu_1 \# \mu_2$ denota la curva μ_1 seguida de μ_2 ,

$$\begin{aligned} L(\mu_1 \# \mu_2) &= L(\mu_1) + L(\mu_2) = d(p, x) + d(x, q_1) = \ell(\gamma|_{[0,c]}) + \ell(\gamma|_{[c,t_1]}) \\ &= \ell(\gamma|_{[0,t_1]}) = d(p, q_1) < R \end{aligned}$$

lo que prueba que $\mu_1 \# \mu_2$ también es corta uniendo p, q_1 . Pero al ser una concatenación de dos geodésicas de M , tiene que ser una geodésica (Ejercicio 5.3.16). Como es corta, no sale de $B_R(p)$, y por la unicidad en $B_R(p)$ debe ser $\mu_1 \# \mu_2$ una reparametrización de μ (Teorema 5.4.4). En particular $x \in im(\mu)$ contradiciendo nuestra suposición. Esto prueba que $im(\gamma) \subset im(\mu)$. Afirmamos que las imágenes coinciden; en caso contrario y por la continuidad de ambas, tomemos c tal que $\mu(c) \notin im(\gamma)$ y notemos que donde μ no toca la imagen de γ es un conjunto abierto. Sea $I = (s, t)$ el intervalo abierto maximal que contiene a c donde μ no toca $im(\gamma)$; por la maximalidad debe ser $\mu(s) = \gamma(s_1)$, $\mu(t) = \gamma(t_1)$ para $s_1, t_1 \in [0, 1]$. Como $im(\gamma) \subset im(\mu)$ debe ser $\mu(s) = \mu(t)$. Esto contradice la minimalidad de μ ya que retirando el lazo $\mu|_{[s,t]}$ obtenemos una curva estrictamente más corta que une los extremos p, q . Hemos probado que las imágenes de γ y μ coinciden entre p y q . Por el argumento recién mencionado, $\gamma(t) = \mu(s) = \mu(s_0)$ sólo es posible si $s = s_0$ porque μ es inyectiva, entonces existe una inyección creciente $f : [0, t_1] \rightarrow [0, 1]$ de manera que $Exp_p(f(t)v) = \mu(f(t)) = \gamma(t)$ (eligiendo v de norma unitaria). Como $f(t) = \|Exp_p^{-1}(\gamma(t))\|$, f es una función continua. Esto prueba que μ es una reparametrización continua de γ entre p y q .

Repitiendo este procedimiento finitas veces a lo largo de γ , deducimos que (luego de reparametrizarla) γ es de hecho una geodésica a trozos. Nuevamente por el Ejercicio 5.3.16, podemos concluir que γ es una reparametrización de una geodésica de M . \square

Con estas herramientas podemos probar un teorema que nos dice que la completitud como espacio métrico de M garantiza la existencia de geodésicas

minimizantes uniendo dos puntos dados de M (aunque como ya observamos en el ejemplo de la esfera, Observación 5.3.10), esta geodésica puede no ser única, y también, que hay otras geodésicas que los unen que pueden no ser minimizantes).

Teorema 5.5.6 (Hopf-Rinow/Cohn Vossen). *Sea M superficie regular conexa. Si (M, dist) es un espacio métrico completo, entonces para todo $p, q \in M$ existe γ geodésica que los une, tal que $L(\gamma) = \text{dist}(p, q)$.*

Demostración. Sea $d = \text{dist}(p, q) > 0$, sea γ_n una sucesión minimizante, $L(\gamma_n) \leq d + 1/n$, donde todas las γ_n son regulares a trozos y están definidas en $[0, 1]$ (luego $L(\gamma_n|_{[s, t]}) = |s - t|L(\gamma_n)$ para todo n y todo $0 \leq s \leq t \leq 1$). Entonces la familia resulta equicontinua y equiacotada en el espacio métrico (M, dist) , y por el teorema de Ascoli, existe una subsucesión que converge uniformemente sobre $[0, 1]$ a una curva continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ que une p, q . Afirmamos que

$$\ell(\gamma) = \sup_{\pi} \sum_i \text{dist}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) = d.$$

Con la partición trivial $\pi = \{t_0 = 0, t_1 = 1\}$ obtenemos $\ell(\gamma) \geq \text{dist}(\gamma(0), \gamma(1)) = d$. Para probar la otra desigualdad, dado $\varepsilon > 0$, si π es una partición de $[0, 1]$ con $n + 1$ puntos, tomamos k_0 tal que $k \geq k_0$ implique que

$$\sup_{t \in [0, 1]} \text{dist}(\gamma(t), \gamma_k(t)) < \delta = \frac{\varepsilon}{n}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{dist}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) &\leq \text{dist}(\gamma(t_i), \gamma_k(t_i)) + \text{dist}(\gamma_k(t_i), \gamma_k(t_{i+1})) + \text{dist}(\gamma_k(t_{i+1}), \gamma(t_{i+1})) \\ &< 2\delta + L(\gamma_n|_{[t_i, t_{i+1}]}) = \frac{2\varepsilon}{n} + L(\gamma_k|_{[t_i, t_{i+1}]}) \end{aligned}$$

Sumando sobre i , obtenemos

$$\sum_{i=0}^{n-1} \text{dist}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) < 2\varepsilon + L(\gamma_k) \leq 2\varepsilon + d + 1/k,$$

y haciendo $k \rightarrow \infty$ se deduce que

$$\sum_i \text{dist}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq 2\varepsilon + d$$

y entonces $\sum_i \text{dist}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq d$. Como esto es cierto para toda partición, $\ell(\gamma) \leq d$. Así que γ es una curva rectificable de longitud d que une p, q . Por el teorema anterior, reparametrizando adecuadamente γ , obtenemos una geodésica de M cuya longitud es d . \square

Definición 5.5.7 (Compleitud geodésica). Diremos que M es geodésicamente completa si el dominio de toda geodésica de M es todo \mathbb{R} . Equivalentemente, el dominio de Exp_p es todo $T_p M$ para todo $p \in M$.

Teorema 5.5.8 (Hopf-Rinow, segunda versión). Si M es una superficie regular y conexa, entonces son equivalentes:

1. (M, dist) es un espacio métrico completo
2. M es geodésicamente completa
3. Existe $p \in M$ tal que $\text{Dom}(\text{Exp}_p) = T_p M$
4. Existe $p \in M$ tal que $\text{Exp}_p(\overline{B_r(0_p)}) = \overline{B_r(p)} = \{q \in M : \text{dist}(q, p) \leq r\}$ para todo $r \geq 0$,
5. Todo conjunto cerrado y acotado en (M, dist) es compacto.

En cualquiera de estos casos, para todo $x, y \in M$ existe una geodésica minimizante de M que los une.

Demostración. Supongamos que (M, dist) es completo, sea $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$ geodésica de M con dominio maximal $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Podemos suponer que $\|v\| = 1$. Supongamos que $b < \infty$. Sea $a < t_n < b$ sucesión creciente con $\lim_n t_n = b$. Entonces

$$\text{dist}(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq \int_{t_n}^{t_m} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = |t_n - t_m|$$

puesto que las geodésicas tienen rapidez constante. Entonces la sucesión de puntos de la curva $(\gamma(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente a un punto $p \in M$. Sea W entorno uniformemente normal de p y $\delta > 0$ como en el Teorema 7.2.3. Tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $t_k > b - \delta$, y $\gamma(t_k) \in W$. Consideremos la geodésica

$$\mu(s) = \text{Exp}_{\gamma(t_k)}(s\dot{\gamma}(t_k))$$

definida en (al menos) el intervalo $(-\delta, \delta)$. Pero es claro que $\mu(0) = \gamma(t_k)$ y que $\mu'(0) = \dot{\gamma}(t_k)$ luego por la unicidad μ y γ coinciden donde ambas están definidas.

Si tomamos s suficientemente grande, cerca de δ , tenemos también $s + t_k > b$ (puesto que $\delta + t_k > b$). Pero entonces μ es una prolongación de γ , y esto es una contradicción con la maximalidad de b . Entonces debe ser $b = +\infty$. Con un argumento similar, se prueba que $a = -\infty$ y entonces M es geodésicamente completa.

Si suponemos que M es geodésicamente completa, la tercer afirmación es inmediata. Supongamos entonces que vale la tercer afirmación, sea $I \subset [0, +\infty)$ el conexo maximal conteniendo al 0 donde

$$\text{Exp}_p(\overline{B_r(0_p)}) = \overline{B_r(p)} = \{q \in M : \text{dist}(q, p) \leq r\}.$$

es válido, que por el Corolario 5.4.6 es no vacío, entonces es un intervalo de la forma $I = [0, r)$ o $I = [0, r]$. Claramente $\text{Exp}_p(\overline{B_{r_i}(0_p)}) \subset \overline{B_{r_i}(p)}$ es siempre válido, si $r_i \in I$ y $r_i \rightarrow r$ (podemos suponer de manera creciente), entonces tomamos $q \in \overline{B_r(p)}$ y lo podemos aproximar con $q_i \in \overline{B_{r_i}(p)}$, que por hipótesis son de la forma $q_i = \text{Exp}_p(v_i)$ con $v_i \in T_p M$, $\|v_i\| \leq r_i < r$. Si $r < \infty$, extraemos por compacidad una subsucesión convergente $v_i \rightarrow v \in T_p M$, claramente $\|v\| \leq r$ y $q = \lim_i \text{Exp}_p(v_i) = \text{Exp}_p(v)$ por la continuidad de la exponencial. Entonces $q \in \text{Exp}_p(\overline{B_r(0_p)})$ y esto prueba que $r \in I$ (la igualdad entre la bola cerrada y la clausura de la bola abierta en M es producto de la Observación 5.5.2).

Como $\overline{B_t(p)} = \text{Exp}_p(\overline{B_t(0_p)})$ para $0 < t \leq r$, es fácil ver que $S_r(p) = \text{Exp}_p(S_r(0_p))$, luego este conjunto es compacto (es la imagen de un compacto euclídeo por una función continua). Por el Corolario 5.5.4, sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\text{Exp}_x(\overline{B_\varepsilon(0_x)}) = \overline{B_\varepsilon(x)}$ para todo $x \in S_r(p)$. Sea $s \in (r, r + \varepsilon)$, afirmamos que $s \in I$ y esto contradecería la maximalidad de r , luego debe ser $r = +\infty$. Supongamos entonces que r es finito y que $r < s < r + \varepsilon$, sea $q \in \overline{B_s(p)}$, queremos ver que existe $v_0 \in T_p M$ con $\|v_0\| \leq s$ tal que $q = \text{Exp}_p(v_0)$. Sea $x \in S_r(p)$ tal que $\text{dist}(x, q) = \text{dist}(S_r(p), q)$, entonces $x = \text{Exp}_p(rv)$ con $\|v\| = 1$, $v \in T_p M$. Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ une p, q entonces atraviesa $S_r(p)$ al menos una vez, digamos en el instante t_1 , luego

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[0, t_1]}) + L(\gamma|_{[t_1, 1]}) \geq r + \text{dist}(S_r(p), q) = \text{dist}(p, x) + \text{dist}(x, q),$$

y tomando infimo sobre las curvas α obtenemos $\text{dist}(p, q) \geq \text{dist}(p, x) + \text{dist}(x, q)$. Como la otra desigualdad vale siempre tenemos una igualdad. En particular $\text{dist}(x, q) = \text{dist}(p, q) - \text{dist}(p, x) < s - r < \varepsilon$, y entonces existe β geodésica que une x, q con $L(\beta) = \text{dist}(x, q)$. Ahora bien, si $\alpha(t) = \text{Exp}_p(tv)$ con $t \in [0, r]$ entonces

$$L(\alpha \# \beta) = L(\alpha) + L(\beta) = r\|v\| + \text{dist}(x, q) = \text{dist}(p, x) + \text{dist}(x, q) = \text{dist}(p, q)$$

luego $\alpha\sharp\beta$ es corta, y al ser una concatenación de geodésicas, debe ser una geodésica (Ejercicio 5.3.16). Entonces $q = \beta(1) = \text{Exp}_p(t_0v)$ y $\|t_0v\| = L(\alpha\sharp\beta) = \text{dist}(p, q) \leq s$, luego $q \in \text{Exp}_p(\overline{B_s(0_p)})$ y así $s \in I$.

Si vale la afirmación sobre las bolas métricas, entonces todas ellas son compactas porque son la imagen de un conjunto compacto por una función continua. De allí es inmediato que todo conjunto $C \subset M$ cerrado y acotado es compacto, ya que $C \subset B_R(p)$ para algún $R > 0$ y las bolas tienen clausura compacta, luego C es compacto. También es fácil ver que en cualquier espacio métrico, si todo cerrado y acotado es compacto, entonces es completo: en efecto, si $(x_n)_n \subset M$ es de Cauchy, entonces está en alguna bola cerrada $\overline{B_R(x_{n_0})}$ que es acotada y así por compacidad $(x_n)_n$ tiene una subsucesión convergente a un punto $x \in M$. Pero entonces

$$\text{dist}(x_n, x) \leq \text{dist}(x_n, x_{n_j}) + \text{dist}(x_{n_j}, x) < 2\varepsilon$$

donde el primer término lo acotamos usando que la sucesión es de Cauchy y el segundo usando que la subsucesión converge a x . Esto prueba que x es el límite de la sucesión de Cauchy original.

Por último, si vale cualquiera de las condiciones, en particular vale la primera y por el Teorema 5.5.6, dos puntos en M siempre están conectados por una geodésica minimal. \square

§ Es por este teorema que las nociones *geodésicamente completa* o *métricamente completa* son intercambiables, y en general sólo se dice “ M es completa”. El teorema anterior también se conoce como Teorema de Heine Borel para variedades de Riemann.

Observación 5.5.9. Es posible demostrar de otra forma que si la exponencial está definida en todo el espacio tangente a $p \in M$, y M es conexa, entonces para todo $q \in M$ existe una geodésica minimal que los une (lo cual además da otra prueba de la implicación $3 \Rightarrow 4$ del teorema anterior). Como la idea de esta otra prueba es interesante, hacemos un esbozo aquí (e invitamos al lector a leer los detalles en el texto de Do Carmo [3, pág. 338]). Supongamos que la exponencial está definida en todo el tangente a p , entonces por el teorema de minimalidad local existe $r > 0$ tal que $\overline{B_r(p)} = \text{Exp}_p(B_r(0_p))$. Si $q \in \overline{B_r(p)}$, entonces $q = \text{Exp}_p(rv)$ con $v \in T_pM$ de norma unitaria; podemos suponer entonces que $\text{dist}(q, p) > r$, y por la compacidad de $S_r(p)$ existe un punto $x \in S_r(p)$ tal que $\text{dist}(q, x) = \text{dist}(q, S_r(p))$. Escribimos $x = \text{Exp}_p(rv)$ con $\|v\| = 1$, y tomamos $\gamma(t) =$

$Exp_p(tv)$. Puede probarse entonces que $q = Exp_p(dv)$ donde $d = \text{dist}(q, p)$; esta es la estrategia de “apuntar y disparar”.

Algunas consecuencias simples de los teoremas que demostramos, están en este corolario que sigue. Otras quedan como ejercicios para el lector.

Corolario 5.5.10. *Sea M superficie regular, entonces*

1. *Si $M \subset \mathbb{R}^3$ es cerrada, es completa.*
2. *Si $M \subset \mathbb{R}^3$ es compacta, es completa.*
3. *Si (M, dist) es acotado y completo, es compacto.*

Demostración. Supongamos que M es cerrada como subespacio métrico de \mathbb{R}^3 , tomemos un conjunto $K \subset M$ cerrado y acotado en dist ; entonces es K cerrado en \mathbb{R}^3 y además por el Teorema 5.3.4, es acotado en \mathbb{R}^3 . Luego K es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^3 ; si $(x_n)_n \subset K$ es una sucesión acotada, existe entonces una subsucesión convergente $x_{n_k} \rightarrow x \in K$. La convergencia es en la norma de \mathbb{R}^3 , pero el mismo teorema nos dice que también converge en dist . Luego K es compacto en (M, dist) , y por el teorema de Hopf-Rinow, M es completa. Si M es compacta, en particular es cerrada y por lo recién probado, es completa. Si el espacio métrico (M, dist) es acotado (existe $c > 0$ y $p \in M$ tal que $\text{dist}(p, x) \leq c$ para todo $x \in M$), y también es completo, entonces por el Teorema de Hopf-Rinow, $M = Exp_p(\overline{B_c(0_p)})$. De esta forma, M es la imagen de un conjunto compacto por una función continua, luego es compacta. \square

Nota bibliográfica 3. Tal como hicimos en el primer capítulo con las curvas, decidimos presentar aquí las superficies y su geometría bajo dos luces o enfoques complementarios: el primero es el de la geometría diferencial clásica de superficies que nace con Gauss, como se expone en el texto de Do Carmo [3]. Hay por supuesto variaciones en la notación y el énfasis que pusimos en algunos temas, en particular la presentación del Lema de Gauss y el teorema de minimalidad local de las geodésicas le debe mucho al texto de Lang [7]. El segundo enfoque es el de la geometría métrica, que deja de lado las estructuras diferenciables para concentrarse en las curvas en el espacio métrico dado por la superficie (y la distancia allí entendida como el camino más corto para llegar de un punto a otro dentro de la misma). Este punto de vista es especialmente útil para discutir los teoremas de Hopf-Rinow, que son esencialmente de naturaleza métrica. Como mencionamos antes, un texto básico sobre la geometría métrica es el libro [2] de Burago et al.

5.5.1. Ejercicios

5.5.20. Sea (X, d) un espacio de métrica interior, es decir $d = d(x, y)$ se calcula como el ínfimo de las longitudes de las curvas rectificables que unen x, y . Probar que la clausura de la bola abierta coincide con la bola cerrada. (Sugerencia: dado $n \in \mathbb{N}$ tomar una curva rectificable que una x, y con $d \leq \ell(\gamma_n) < d + 1/n$, y usando la continuidad de γ_n tomar $z_n = \gamma_n(t_0)$ tal que $\text{dist}(x, z_n) = d - 1/n < d$ pero $\text{dist}(z_n, y) \leq 2/n$).

5.5.21. Probar que dado $p \in M$ superficie regular, si c es suficientemente chico, entonces

$$\text{Exp}_p(\overline{B}_c(0_p)) = \overline{B}_c(p) = \{q \in M : \text{dist}(q, p) \leq c\},$$

y si $S_c(0_p) \subset T_p M$ denota la circunferencia de radio c centrada en 0_p , $S_c = \overline{B}_p \setminus B_p$ entonces también

$$\text{Exp}_p(S_c(0_p)) = S_c(p) = \{q \in M : \text{dist}(q, p) = c\}.$$

5.5.22. Sea M superficie regular,

1. Probar que M es completa en \mathbb{R}^3 si y sólo si (M, dist) es completo.
2. Probar que (M, dist) es compacto si y sólo si M es compacta en \mathbb{R}^3 .

5.5.23. Sea M superficie completa, X campo en M de clase C^1 y acotado: existe $C > 0$ tal que $\|X(p)\| \leq C$ para todo $p \in M$. Probar que el flujo de M es global, es decir, tiene dominio $\mathbb{R} \times M$.

5.5.24. Sea $f : M \rightarrow S$ una isometría local, probar que si $p, q \in M$ son suficientemente cercanos, entonces $\text{dist}_S(f(p), f(q)) = \text{dist}_M(p, q)$. Dar un ejemplo donde no valga la igualdad.

5.5.25. Sea $\gamma : I \rightarrow M$ curva de clase C^1 , probar que

$$\|\gamma'(t)\| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{dist}(\gamma(t+h), \gamma(t))}{h}.$$

5.5.26. Si $f : M \rightarrow S$ es tal que $\text{dist}_S(f(p), f(q)) = \text{dist}_M(p, q)$ para todo $p, q \in M$, entonces f es suave y es una isometría (sug: usar entornos exponenciales).

5.5.27. Sea $p \in M$ y $E : TB_r \rightarrow M \times M$ como en el Teorema 5.5.3, sea $W = B_\delta(p) \subset M$ entorno uniformemente normal de p . Probar que

1. $W \subset B_\delta(q)$ para todo $q \in W$.
2. si $q_1, q_2 \in W$, existe una única geodésica en W (parametrizada en $[0, 1]$) que los une.
3. si $F : (t, q_1, q_2) \mapsto \gamma_{q_1, q_2}(t)$ la pensamos como función $(-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \times W \times W \rightarrow W$, entonces F es de clase C^1 .

5.5.28. Sea $i : M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ el radio de inyectividad de la exponencial riemanniana de M . Probar que i es continua.

5.5.29. Sea $p \in M$ y $S_r(p) = \{q \in M : \text{dist}(q, p) = r\}$. Probar que si r es suficientemente pequeño, entonces

1. $S_r(p)$ es una curva regular, difeomorfa a $rS^1 = \{v \in T_p S : \|v\| = r\}$.
2. Las geodésicas que salen de p cortan de manera ortogonal a la curva $S_r(p)$.
3. Si $\gamma(t) = \text{Exp}_q(tu)$ es una geodésica con $\gamma(0) = q \in S_r(p)$ y $\gamma'(0)$ es tangente a $S_r(p)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma|_{(-\varepsilon, \varepsilon)}$ permanece fuera de $\bar{B}_r(p)$ (sug: considerar $F(t, q, u) = \text{Exp}_p^{-1}(\text{Exp}_q(tu))$, y la función $g(t) = \|F(t)\|^2$. Probar que $g''(0) > 0$ para p suficientemente cercano a q).
4. La bola $B_r(p)$ es geodésicamente convexa: dados $q_1, q_2 \in B_r(p)$, la única geodésica minimizante que une q_1, q_2 permanece dentro de $B_r(p)$ (sug: considerar $g(t) = \text{dist}(p, \gamma(t))^2$).

El espaciotiempo le dice a la materia cómo moverse; la materia le dice al espaciotiempo cómo curvarse.

J. A. Wheeler

Discutimos en esta sección distintas nociones de curvaturas en una superficie regular, con énfasis en la curvatura de Gauss, también llamada *curvatura seccional*. Supondremos que las superficies involucradas son regulares y (al menos) de clase C^3 . En términos históricos, las ideas aquí presentadas fueron desarrolladas en gran medida por C.F. Gauss en sus trabajos originales del siglo XIX [4].

6.1. Curvaturas normales

Dado un vector $V \in T_p M$ de longitud unitaria ($\|V\| = 1$) consideramos la única geodésica $\gamma = \gamma_{p,V} \in M$ con las condiciones iniciales $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = V$. ¿Qué tan curvada está M en la dirección de V ? es la pregunta que queremos contestar. Notemos que es natural formular esta pregunta con geodésicas (y no con cualquier curva) ya que se supone que las geodésicas recorren M doblando lo menos posible, es decir, tomando el camino más recto posible dada la velocidad inicial V . De esta manera no nos molestan las curvaturas “artificiales” que serían producto de las variaciones de velocidad arbitrarias de una curva genérica (no geodésica) α -aunque como veremos, esta disquisición es vana ya que esta cantidad depende sólo de la forma de M y no de cómo la recorremos-, ver la figura 6.1.

Hay además un detalle adicional con el que no se contaba para las curvas

generales de \mathbb{R}^3 (ver comentarios posteriores a la definición de curvatura en 3.1): las superficies M a considerar están orientadas, al menos localmente. La elección de un lado de M se realiza a través de los vectores normales N_p (vectores unitarios perpendiculares a M en el punto p , o lo que es igual $N_p \perp T_pM$, $\|N_p\| = 1$ que apuntan todos para el lado en que está orientada M). Esto permite darle un signo a la curvatura de las curvas sobre M ya que hay un lado canónico desde el cual se puede mirar la superficie (desde el lado hacia el que está orientada).

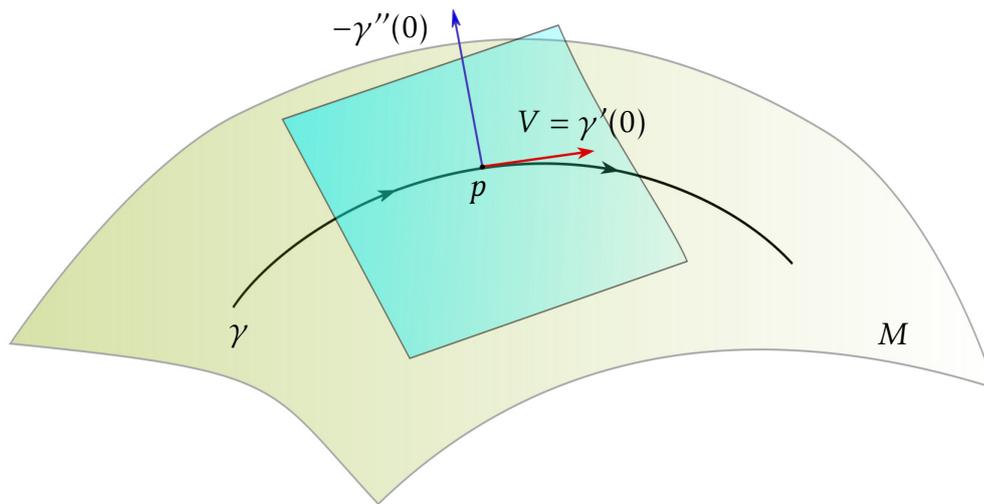


Figura 6.1: Curvatura normal de la superficie M en el punto p , usando una geodésica

Definición 6.1.1. Dada la geodésica $\gamma = \gamma_{p,V} \subset M$, para $p \in M$, $V \in T_pM$, $\|V\| = 1$, definimos la *curvatura normal* de M en p en la dirección del vector unitario $V \in T_pM$ al número

$$\kappa_V(p) = -\langle \gamma''(0), N_p \rangle. \quad (6.1)$$

Veamos ahora que $\kappa_V(p)$ es la curvatura usual κ_γ (ver 3.1) en p de la geodésica $\gamma = \gamma_{p,V}$ como curva en \mathbb{R}^3 , pero con un signo. Esto es así porque como $\|\gamma'(0)\| = \|V\| = 1$ y las geodésicas tienen rapidez constante, entonces resulta que γ está p.x.l.a. Luego su curvatura (en \mathbb{R}^3) está dada simplemente por su aceleración en el punto de paso p , es decir $\kappa_\gamma(0) = \|\gamma''(0)\|$. Por otro lado

$$\kappa_V(p) = -\langle \gamma''(0), N_p \rangle = -\|\gamma''(0)\| \|N_p\| \cos(\theta)$$

para θ el ángulo entre $\gamma''(0)$ y N_p . Como $\gamma''(0)$ es perpendicular a T_pM por ser geodésica, y N_p también, ambos deben ser vectores paralelos. Entonces este

ángulo puede ser $\theta = 0$ (si $\gamma''(0)$ apunta hacia el mismo lado que N_p) o $\theta = \pi$ (si $\gamma''(0)$ apunta hacia el lado opuesto al que apunta N_p). Entonces usando que $\|N_p\| = 1$ y los valores posibles de θ la igualdad anterior queda

$$\begin{aligned} \kappa_V(p) &= -\langle \gamma''(0), N_p \rangle = -\|\gamma''(0)\| \|N_p\| \cos(\theta) = -\|\gamma''(0)\| \cos(\theta) \\ &= \begin{cases} -\|\gamma''(0)\| \cos(0) = -\|\gamma''(0)\|, & \text{si } \gamma''(0) \text{ apunta en sentido de } N_p \\ -\|\gamma''(0)\| \cos(\pi) = \|\gamma''(0)\|, & \text{si } \gamma''(0) \text{ es opuesto a } N_p \end{cases} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Aquí puede observarse que, como mencionamos antes, la definición de la curvatura normal $\kappa_V(p)$ coincide con la de la geodésica γ , como curva de \mathbb{R}^3 . que llamábamos $\kappa_\gamma(0) = \|\gamma''(0)\|$ (porque γ está p.x.l.a.), con la adición de un signo en uno de los casos.

Observación 6.1.2. *Resaltamos que el signo de la curvatura normal depende de la orientación elegida para la superficie, porque como puede verse en (6.2), el sentido de N_p define el signo de $\kappa_V(p)$.*

Denotamos como es habitual con $N : M \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ a la normal unitaria de M para cierta orientación elegida en la superficie M . Entonces las curvaturas normales se pueden calcular mediante la diferencial de N , sin utilizar las geodésicas, de la siguiente manera:

Lema 6.1.3. (Meusnier) *Para todo $p \in M$, y todo $V \in T_p M$ de norma unitaria,*

$$\kappa_V(p) = \langle DN_p V, V \rangle.$$

Demostración. Consideremos, como en la definición de curvatura normal, a $\gamma = \gamma_{p,V}$ la única geodésica de M tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = V$.

Como $(N \circ \gamma) \perp T_\gamma M$ en todo punto, entonces $\langle N \circ \gamma, \gamma' \rangle = 0$ siempre. Luego derivando se tiene que

$$\langle DN_\gamma \gamma', \gamma' \rangle + \langle N \circ \gamma, \gamma'' \rangle = 0.$$

Evaluando γ en $t = 0$ deducimos que

$$-\langle N_p, \gamma''(0) \rangle = \langle DN_p V, V \rangle.$$

por lo que por la definición de $\kappa_V(p)$ se obtiene (ver 6.1)

$$\kappa_V(p) = -\langle N_p, \gamma''(0) \rangle = \langle DN_p V, V \rangle. \quad \square$$

Este lema nos dice que las curvaturas normales en todas las direcciones están controladas por (la diferencial de) la función normal N . En la próxima sección estudiaremos con más detalle esta función.

Veamos ahora cómo calcular la curvatura normal usando una curva cualquiera que pasa por p , con la misma dirección de V :

Lema 6.1.4. *Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva C^2 con $\alpha(0) = p \in M$, $\alpha'(0) = \lambda V \in T_p M$ con V de norma unitaria y $\lambda \neq 0$. Entonces la curvatura normal se calcula como*

$$\kappa_V(p) = \frac{-1}{\lambda^2} \langle N_p, \alpha''(0) \rangle.$$

Demostración. Como $\langle N \circ \alpha, \alpha' \rangle = 0$, derivando obtenemos

$$\langle DN_\alpha \alpha', \alpha' \rangle + \langle N_\alpha, \alpha'' \rangle = 0.$$

Evaluando en $t = 0$ (y por el lema anterior):

$$\lambda^2 \kappa_V(p) = \lambda^2 \langle DN_p V, V \rangle = \langle DN_p \lambda V, \lambda V \rangle = -\langle N_p, \alpha''(0) \rangle.$$

Dividiendo por λ^2 se obtiene la fórmula enunciada. □

Observación 6.1.5. En muchos textos, se elige la convención opuesta para definir el vector normal. Esto es, se elige N_p de manera tal que $\gamma''(0) = \kappa_V(p)N_p$. Entonces $\kappa_V(p) = -\langle DN_p V, V \rangle$ es la fórmula habitual.

Nosotros hemos optado por la convención opuesta $\gamma''(0) = -\kappa_V(p)N_p$, por los siguientes dos motivos: las curvaturas principales son así los autovalores de DN_p (ver la Observación 6.1.7) en lugar de los de $-DN_p$; y por otro lado en superficies cerradas, donde en general se elige la normal *exterior* (como por ejemplo la esfera), es más común que ocurra que la aceleración de la curva γ apunte en la dirección *contraria* a la de la normal exterior (el lector puede pensar en esta observación gráficamente en algunos ejemplos).

6.1.1. Mapa de Gauss

Como siempre $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ denota la normal unitaria de M (que elige alguna de las dos orientaciones posibles de M). Notemos que al ser unitaria, se puede pensar $N : M \rightarrow S^2$, pues $N_p = N(p)$ es un vector de norma unitaria. Esta función se conoce como *mapa de Gauss* y “mapea” conjuntos de M dentro de conjuntos en la esfera.

Claramente, $DN_p : T_pM \rightarrow T_{N(p)}S^2$ como es habitual para funciones entre superficies. Pero al ser S^2 la esfera unitaria, $T_{N(p)}S^2 = \{N(p)\}^\perp$, es decir el plano tangente es el ortogonal a $N(p)$. Por la misma definición de N (es la normal unitaria de M) también se tiene $T_pM = \{N(p)\}^\perp$. Así que en realidad vamos a pensar $DN_p : T_pM \rightarrow T_pM$ es decir como una transformación lineal de T_pM en si mismo.

Lema 6.1.6. *Para todo $p \in M$, DN_p es una transformación lineal simétrica de T_pM en si mismo.*

Demostración. Si $\varphi : D \rightarrow M$ es una parametrización regular de M (en un entorno de p), recordamos que φ_u, φ_v forman una base de $T_\varphi M$ en todo punto de D . Luego como $N \perp TM$, se tiene

$$\langle N \circ \varphi, \varphi_u \rangle = 0.$$

Derivando respecto de v , deducimos que

$$\langle DN_\varphi \varphi_v, \varphi_u \rangle + \langle N \circ \varphi, \varphi_{vu} \rangle = 0.$$

Mientras que si comenzamos con $\langle N \circ \varphi, \varphi_v \rangle = 0$, derivando ahora respecto de u obtenemos

$$\langle DN_\varphi \varphi_u, \varphi_v \rangle + \langle N \circ \varphi, \varphi_{uv} \rangle = 0.$$

Puesto que φ es C^2 , tenemos que las derivadas cruzadas coinciden, luego $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$, lo que nos muestra que

$$\langle DN_\varphi \varphi_u, \varphi_v \rangle = -\langle N \circ \varphi, \varphi_{uv} \rangle = \langle DN_\varphi \varphi_v, \varphi_u \rangle.$$

Evaluando en u_0, v_0 de manera tal que $\varphi(u_0, v_0) = p$, y escribiendo cualquier par de vectores $V, W \in T_pM$ como combinación lineal de $\varphi_u(u_0, v_0), \varphi_v(u_0, v_0)$, deducimos que

$$\langle DN_p V, W \rangle = \langle DN_p W, V \rangle = \langle V, DN_p W \rangle$$

(la última igualdad es consecuencia de que el producto interno es conmutativo). Asimismo, este último término siempre es igual a $\langle DN_p^t V, W \rangle$, lo que nos dice

$$\langle DN_p V, W \rangle = \langle DN_p^t V, W \rangle.$$

Como esto vale para todo $V, W \in T_pM$, deducimos que $DN_p = DN_p^t$, esto es, $DN_p : T_pM \rightarrow T_pM$ es una transformación lineal simétrica. \square

Observación 6.1.7. Por el teorema de diagonalización de transformaciones lineales simétricas, existen números reales $\kappa_1(p), \kappa_2(p)$ (que siempre pensaremos ordenados de menor a mayor, es decir $\kappa_1 \leq \kappa_2$) y vectores $V_1 \perp V_2 \in T_p M$ de norma unitaria que son autovectores de DN_p , es decir

$$DN_p V_i = \kappa_i(p) V_i, \quad i = 1, 2.$$

Definición 6.1.8 (Curvaturas principales). Los números $\kappa_1 \leq \kappa_2$ dados por los autovalores de la diferencial del mapa de Gauss DN se denominan *curvaturas principales* de M en p . Los vectores V_1, V_2 dan las *direcciones principales* de curvatura de M en p .

Tomando geodésicas γ_i que pasan por p y tienen velocidades iniciales V_i respectivamente, se tiene por el Lema 6.1.3:

$$\kappa_{V_i}(p) = -\langle \gamma_i''(0), N_p \rangle = \langle DN_p V_i, V_i \rangle = \langle \kappa_i(p) V_i, V_i \rangle = \kappa_i(p) \|V_i\|^2 = \kappa_i(p), \quad i = 1, 2.$$

Sintéticamente, las curvaturas normales en las direcciones de los autovectores V_i de DN_p coinciden con las curvaturas principales de M en p . Pero podemos decir aún más:

Lema 6.1.9 (Euler). Si $p \in M$ y $\kappa_1(p) \leq \kappa_2(p)$ denotan las curvaturas principales de M en p , entonces para toda dirección unitaria $V \in T_p M$, la curvatura normal $\kappa_V(p)$ está acotada por estos dos números:

$$\kappa_1(p) \leq \kappa_V(p) \leq \kappa_2(p).$$

Demostración. Podemos escribir a $V \in T_p M$ como $V = \alpha V_1 + \beta V_2$. Puesto que V_i son unitarios y perpendiculares, $1 = \|V\|^2 = \langle \alpha V_1 + \beta V_2, \alpha V_1 + \beta V_2 \rangle = \alpha^2 + \beta^2$. Por otro lado por el Lema 6.1.3

$$\begin{aligned} \kappa_V(p) &= \langle DN_p V, V \rangle = \langle DN_p(\alpha V_1 + \beta V_2), (\alpha V_1 + \beta V_2) \rangle \\ &= \langle \alpha \kappa_1 V_1 + \beta \kappa_2 V_2, \alpha V_1 + \beta V_2 \rangle \\ &= \alpha^2 \kappa_1 + \beta^2 \kappa_2 \end{aligned}$$

donde nuevamente usamos que V_1, V_2 son unitarios y perpendiculares.

Entonces, usando que $1 = \alpha^2 + \beta^2$ se obtiene lo buscado

$$\kappa_1 = \kappa_1(\alpha^2 + \beta^2) = \kappa_1\alpha^2 + \kappa_1\beta^2 \stackrel{\kappa_1 \leq \kappa_2}{\leq} \underbrace{\kappa_1\alpha^2 + \kappa_2\beta^2}_{\kappa_V(p)} \stackrel{\kappa_1 \leq \kappa_2}{\leq} \alpha^2\kappa_2 + \beta^2\kappa_2 = \kappa_2,$$

es decir: $\kappa_1 \leq \kappa_V(p) \leq \kappa_2$. □

Es por este motivo que los vectores V_1, V_2 se denominan *direcciones principales de curvatura*.

Definición 6.1.10 (Curvatura media). La curvatura media H de la superficie regular M está dada por el promedio de sus curvaturas principales, es decir

$$H(p) = 1/2(\kappa_1(p) + \kappa_2(p)).$$

Definición 6.1.11 (Líneas de curvatura, direcciones y curvas asintóticas). Diremos que una curva $\alpha \subset M$ es una *línea de curvatura* si su velocidad siempre es paralela a una dirección principal de curvatura de M . Dado un punto $p \in M$, decimos que $V \in T_pM$ es una *dirección asintótica* si $\kappa_V(p) = 0$, y diremos que β es una *curva asintótica* si su velocidad es siempre paralela a una dirección asintótica.

Definición 6.1.12 (Clasificación de puntos según las curvaturas). Un punto $p \in M$, es

1. *umbílico* si $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ (todas las curvaturas principales en p coinciden).
2. *hiperbólico* si $\kappa_1(p)\kappa_2(p) < 0$,
3. *elíptico* si $\kappa_1(p)\kappa_2(p) > 0$,
4. *parabólico* si algún $\kappa_i(p) = 0$,
5. *plano* si $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) = 0$.

6.2. Curvatura de Gauss

La curvatura de Gauss, también llamada curvatura seccional, se define como

$$K(p) = \det(DN_p).$$

Notemos que a pesar de que hay arbitrariedad en un signo en la elección del vector normal $N(p)$ -y por ende de la diferencial DN_p - este signo es irrelevante ya que al tratarse de una matriz de 2×2 , el determinante no tiene en cuenta este signo: $\det(-DN_p) = (-1)^2 \det(DN_p) = \det(DN_p)$.

De acuerdo a las cuentas de la sección previa, si $\kappa_1 \leq \kappa_2$ son las curvaturas principales de M en p (los autovalores de DN_p), entonces DN_p se diagonaliza en una base $B' = \{V_1, V_2\}$ de T_pM . Si C denota la matriz de cambio de base en cuestión, entonces

$$\begin{aligned} K(p) &= \det(DN_p) = \det\left(C \begin{pmatrix} \kappa_1(p) & 0 \\ 0 & \kappa_2(p) \end{pmatrix} C^{-1}\right) \\ &= \det(C) \det\begin{pmatrix} \kappa_1(p) & 0 \\ 0 & \kappa_2(p) \end{pmatrix} \det(C)^{-1} \\ &= \det\begin{pmatrix} \kappa_1(p) & 0 \\ 0 & \kappa_2(p) \end{pmatrix} = \kappa_1(p)\kappa_2(p) \end{aligned}$$

por propiedades del determinante. Esto es

$$K(p) = \kappa_1(p)\kappa_2(p) \tag{6.3}$$

lo que nos da la intuición de que K mide más bien cambios en áreas que curvaturas, ya que representa el producto de dos longitudes. Para confirmar esta intuición, tenemos los siguientes dos resultados:

Lema 6.2.1. *Sea $p \in M$ tal que $K(p) \neq 0$. Entonces para todo entorno $\Omega \subset M$ de p suficientemente pequeño, el área de $N(\Omega) \subset S^2$ se calcula como*

$$\mu(N(\Omega)) = \int_{\Omega} |K(p)| dp.$$

Demostración. Si $K(p) \neq 0$ entonces DN_p es inversible, y como M es C^3 , es inversible en todo un abierto W alrededor de p , y vamos a suponer, achicando Ω si es necesario, que $W = \Omega$. Por el teorema de la función inversa, $N|_{\Omega} : \Omega \rightarrow N(\Omega)$ es un difeomorfismo, y en particular si $\varphi : D \rightarrow \Omega \subset M$ es una parametrización local de M , entonces $\phi = N \circ \varphi : D \rightarrow N(\Omega) \subset S^2$ es una parametrización local de S^2 .

Ahora razonamos como en la prueba de la Proposición 4.2.13, pero con una variación: como $\phi = N \circ \varphi$, entonces $D\phi = DN_{\varphi}D\varphi$, transponiendo se tiene $D\varphi^t DN_{\varphi}^t = D\phi^t$, y multiplicando ambas expresiones, pero ahora al otro lado,

$$D\phi D\phi^t = DN_{\varphi}D\varphi D\varphi^t DN_{\varphi}^t = DN_{\varphi}D\varphi D\varphi^t DN_{\varphi}$$

puesto que DN_{φ} es simétrica. Notemos que tanto $D\phi D\phi^t, DN_{\varphi}, D\varphi D\varphi^t$ son transformaciones lineales de $T_{\varphi}M$ en $T_{\varphi}M$, con $\varphi = \varphi(u, v) \in M$; tomando determinante obtenemos

$$\det(D\phi D\phi^t) = \det(DN_{\varphi}) \det(D\varphi D\varphi^t) \det(DN_{\varphi}^t),$$

o equivalentemente

$$\det(D\phi^t D\phi) = \det(DN_{\varphi})^2 \det(D\varphi^t D\varphi) = (K \circ \varphi)^2 \det(D\varphi^t D\varphi).$$

Por el Lema 4.2.12, se deduce que

$$\|\phi_u \times \phi_v\| = |K \circ \varphi| \|\varphi_u \times \varphi_v\|.$$

Luego

$$\begin{aligned} \mu(N(\Omega)) &= \iint_{N(\Omega)} 1 = \iint_D \|\phi_u \times \phi_v\| \, du \, dv \\ &= \iint_D |K \circ \varphi| \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, du \, dv = \int_{\Omega} |K(p)| \, dp. \quad \square \end{aligned}$$

Corolario 6.2.2. Si $p \in M$ con $K(p) \neq 0$ y $\Omega \subset M$ indica una región que contiene a p , entonces

$$|K(p)| = \lim_{\Omega \rightarrow p} \frac{\mu(N(\Omega))}{\mu(\Omega)}.$$

Demostración. Por el lema previo y el teorema del valor medio integral, existe para cada Ω que contenga a p un punto $q_{\Omega} \in \Omega$ tal que

$$\mu(N(\Omega)) = \int_{\Omega} |K(q)| \, dq = |K(q_{\Omega})| \mu(\Omega).$$

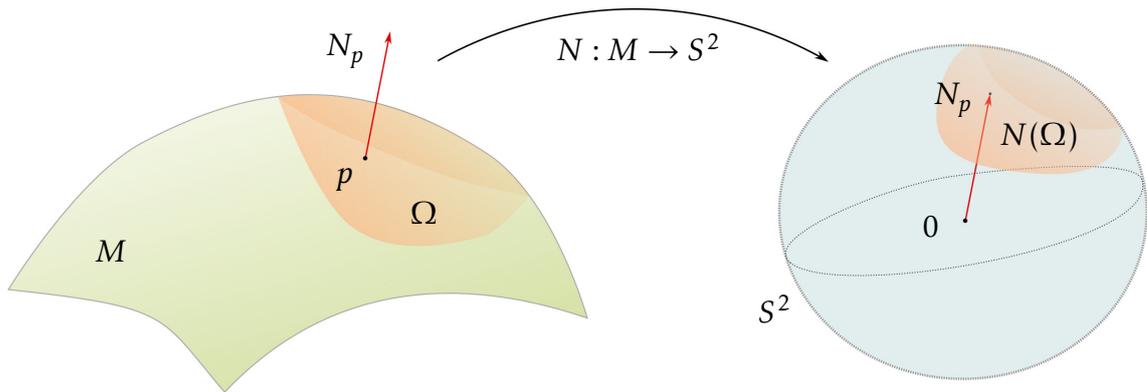


Figura 6.2: Área recorrida por p y por N_p

Luego

$$\frac{\mu(N(\Omega))}{\mu(\Omega)} = |K(q_\Omega)|,$$

y a medida que achicamos Ω alrededor de p , se tienen $q_\Omega \rightarrow p$ y por la continuidad de K se deduce el resultado enunciado. \square

Ejemplo 6.2.3. Vamos a ilustrar estas ideas con un ejemplo. Consideramos la superficie llamada *catenoide*, dada implícitamente por la ecuación

$$x^2 + y^2 = \cosh^2(z).$$

Observemos que

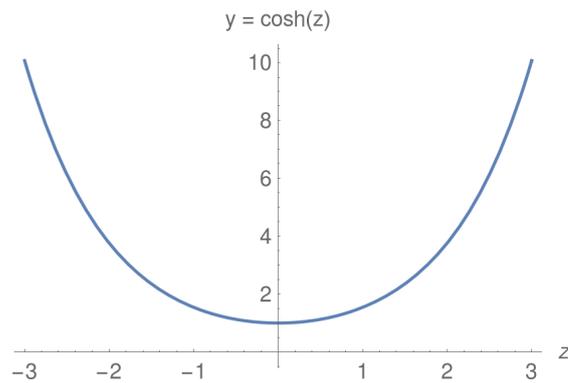
$$\sqrt{x^2 + y^2} = |\cosh(z)| = \cosh(z) \tag{6.4}$$

ya que $\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} > 0$ para todo $z \in \mathbb{R}$.

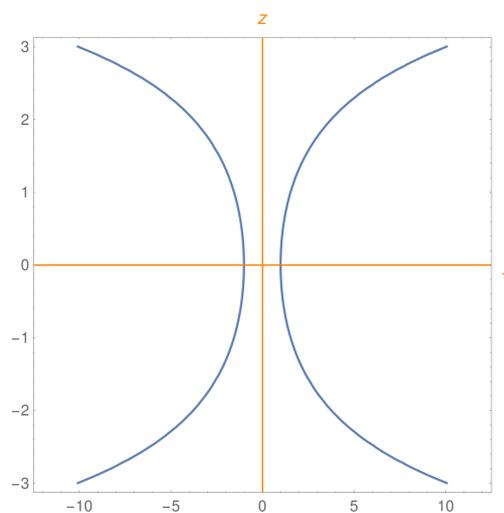
Consideremos ahora algunos cortes de la superficie determinada por (6.4). Por ejemplo, veamos que se obtiene si suponemos que $x = 0$:

$$\sqrt{0^2 + y^2} = \cosh(z) \implies |y| = \cosh(z) \implies y = \pm \cosh(z)$$

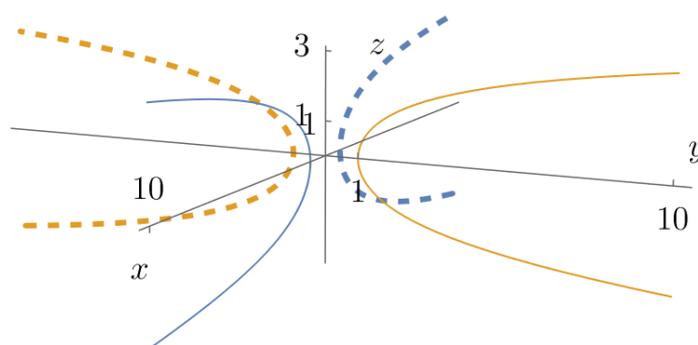
Recordamos que el gráfico de $y = \cosh(z)$ tiene la siguiente forma:



Entonces, a partir de la igualdad (6.4) podemos afirmar que en el plano $x = 0$ (o lo que es igual, el plano “ yz ” del espacio euclideo), la intersección de la superficie catenoide con este plano nos da las curvas ilustradas a la derecha. Algo similar se obtiene si intersecamos la superficie con el plano $y = 0$. Como es habitual, se trata ahora de ubicar estas curvas en el espacio de acuerdo a la posición de los planos $x = 0$, $y = 0$, en una perspectiva adecuada para visualizar la figura.

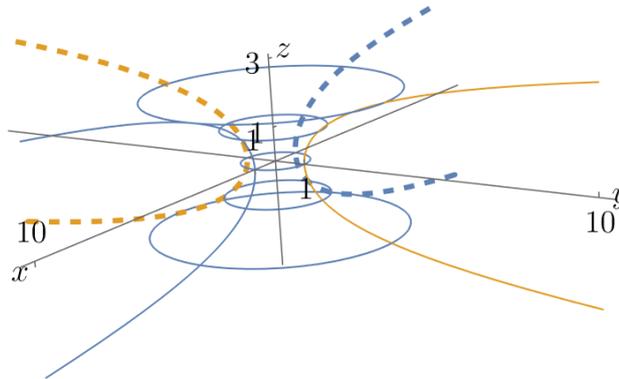


Luego al intersecar los planos $x = 0$ e $y = 0$ se obtienen las curvas



y esto da una primera idea de como sería la superficie. Si ahora consideramos $z = k$ (k constante), se obtienen circunferencias de radio $\cosh(z)$ en dichos pla-

nos. Si $z = k$, entonces: $x^2 + y^2 = \cosh(k)^2$. Por ejemplo, para $k = 0$, $k = \pm 1$ y $k = \pm 2$ se obtiene:



Agregando más casos con $z = k$ nos da una idea de cómo es la superficie, que consiste en una serie de circunferencias de distintos radios, con radio mínimo cuando $z = 0$:

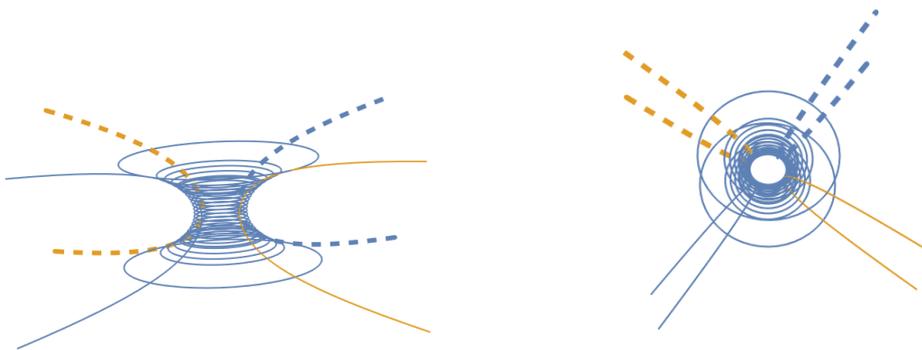


Figura 6.3: Superficie obtenida rotando $y = \cosh(z)$ alrededor del eje z .

Otro enfoque de esta misma superficie, que creemos útil para estudiar otras superficies, está dado por considerar la ecuación (6.4) en coordenadas cilíndricas,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \cosh(z) \implies r = \cosh(z)$$

donde r representa el radio en coordenadas cilíndricas, y consideramos las semirectas definidas por $\theta = \theta_0$ (constante), con r variable dadas por

$$r \mapsto (r \cos(\theta_0), r \sin(\theta_0))$$

en el plano “ xy ”, que definen semiplanos en \mathbb{R}^3 . Si intersecamos esos semiplanos con la superficie (como $r = \cosh(z)$) se obtiene que (x, y, z) pertenecerá a esa

ecuación si

$$(x, y, z) = (\cosh(z) \cos(\theta_0), \cosh(z) \sin(\theta_0), z).$$

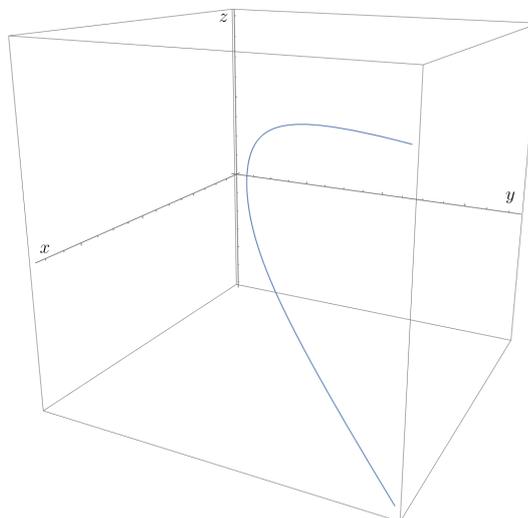
Por ejemplo, para $\theta_0 = \pi/4$, se tiene

$$(x, y, z) = (\cosh(z)\sqrt{2}/2, \cosh(z)\sqrt{2}/2, z)$$

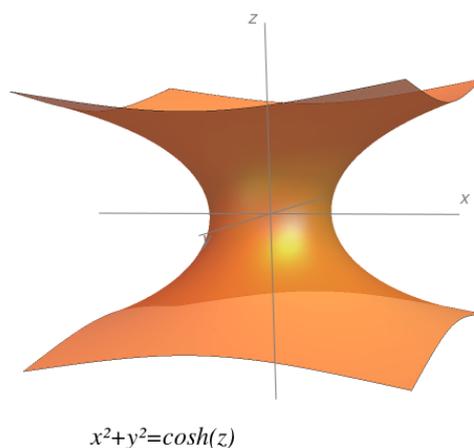
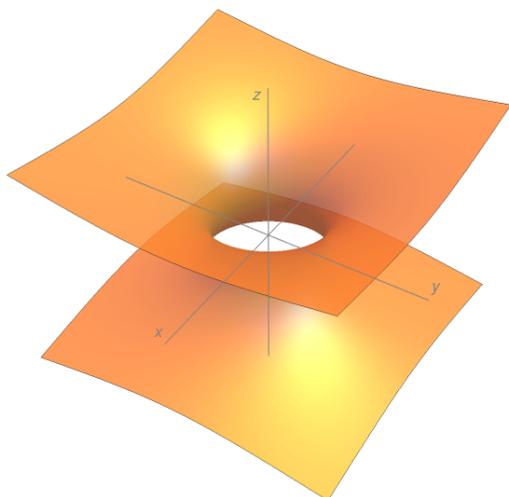
que se puede interpretar como

$$(x, y) = \cosh(z) \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 \right)$$

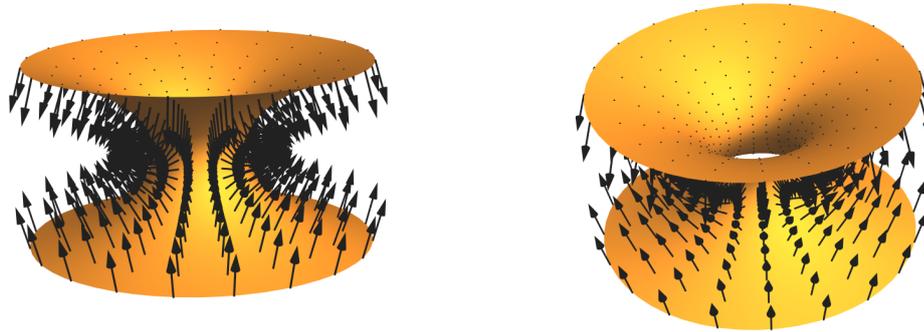
en el plano “ xy ” y el z correspondiente en el eje z . Esto representa en este semiplano (que coincide con parte del plano $y = x$) la curva ilustrada a la derecha (este proceso se puede repetir para distintos θ_0 , y en todos los casos el perfil es el de un coseno hiperbólico).



Con estas consideraciones es claro que una ilustración de la superficie resulta ser la que sigue, vista desde distintos ángulos:



De estas ilustraciones podemos observar cómo es la imagen del mapa de Gauss de esta superficie, en la esfera unitaria. En cualquiera de las 2 orientaciones posibles, se obtiene que dicha imagen es toda la esfera salvo 2 puntos -los polos Norte y Sur de la esfera-:



6.2.1. Ejercicios

6.2.1. Si H_p, K_p denotan la curvatura media y Gaussiana respectivamente, y $\kappa_1(p), \kappa_2(p)$ son las curvaturas principales, probar que

1. $H^2 - K = \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2}\right)^2 \geq 0$ con igualdad si y sólo si p es umbílico.
2. Probar que las curvaturas principales están dadas por

$$\kappa_1(p) = H_p - \sqrt{H_p^2 - K_p} \quad \kappa_2(p) = H_p + \sqrt{H_p^2 - K_p},$$

en particular son continuas, y son C^1 en un entorno de p si p no es umbílico.

6.2.2. Dada una superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por φ , el mapa de Gauss $N : M \rightarrow S^2$ es la aplicación normal $N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$. Probar que

$$N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

6.2.3. Describir gráficamente las regiones de S^2 cubiertas por la aplicación de Gauss para las siguientes superficies:

- a) Plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$.
- b) Esfera $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$

-
- c) Paraboloides de revolución: $z = x^2 + y^2$
- d) Hiperboloides de revolución: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
- e) Catenoide: $x^2 + y^2 = \cosh^2(z)$

6.3. Cálculo de la curvatura en una parametrización

Para calcular explícitamente la curvatura de Gauss de una superficie (y las curvaturas principales, así como las direcciones principales de curvatura), daremos una manera obtener la matriz de la diferencial del mapa de Gauss DN_p en términos de la base del espacio tangente $B = \{\varphi_u, \varphi_v\}$.

Para ello introducimos primero la *segunda forma fundamental* de la superficie M , a partir de las siguientes expresiones: si $N : M \rightarrow S^2$ denota el mapa de Gauss, y $\varphi : D \rightarrow M$ es una parametrización regular de M , consideramos (con un pequeño abuso de notación) la composición $N = N \circ \varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ y pensamos al vector normal como una función de dos variables (u, v) . Luego N_u, N_v, N_{uu} etc., denotarán las derivadas parciales de esta función. Notemos que, por ejemplo

$$N_u = \frac{\partial}{\partial u}(N \circ \varphi) = DN_\varphi \varphi_u$$

y similarmente $N_v = DN_\varphi \varphi_v$.

6.3.1. Segunda forma fundamental

Vamos a definir una matriz llamada matriz de la segunda forma de la superficie, sus entradas se conocen como coeficientes de la segunda forma.

Definición 6.3.1. Dada $M = \text{Im}(\varphi)$ y $p \in M$, los coeficientes de la segunda forma fundamental son

$$e = N \cdot \varphi_{uu}, \quad f = N \cdot \varphi_{uv} = N \cdot \varphi_{vu}, \quad g = N \cdot \varphi_{vv}$$

donde la igualdad del término central (las dos maneras de calcular f) se deben a las caracterizaciones alternativas (Ejercicio 6.3.6, ítem a))

$$e = N \cdot \varphi_{uu}, \quad f = N \cdot \varphi_{uv} = N \cdot \varphi_{vu}, \quad g = N \cdot \varphi_{vv}$$

donde usamos que M es (al menos) de clase C^2 .

También, usando la regla del triple producto y recordando que $N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\sqrt{EG-F^2}}$, se tienen las caracterizaciones más prácticas

$$e = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uu})}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad f = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uv})}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad g = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{vv})}{\sqrt{EG-F^2}}$$

resultado que queda para probar por el lector (Ejercicio 6.3.6, ítem b)).

La matriz de la segunda forma fundamental¹ es

$$\mathbf{II}_p = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Se define también, para cada $p \in M$, la matriz de Weingarten como

$$\mathbf{W}_p = -\mathbf{I}_p^{-1} \mathbf{II}_p. \quad (6.5)$$

Notemos ahora que dado que φ es una parametrización regular, $B = \{\varphi_u, \varphi_v\}$ forman una base de $T_p M$ (más precisamente, es una base B^p para cada $p \in \text{Im}(\varphi)$, y si $p = \varphi(u_0, v_0)$ entonces $B^p = \{\varphi_u(u_0, v_0), \varphi_v(u_0, v_0)\}$). Es relevante notar que la base $B = \{\varphi_u, \varphi_v\}$ de $T_p M$ no es necesariamente ortogonal. Recordemos también que la primera forma fundamental es siempre una matriz inversible (Observación 4.3.2).

Teorema 6.3.2. Dado $p \in \text{Im}(\varphi) \subset M$, la matriz de DN_p en la base $B = \{\varphi_u, \varphi_v\}$ es la matriz de Weingarten. Es decir

$$[DN_p]_{BB} = -\mathbf{I}_p^{-1} \mathbf{II}_p.$$

Demostración. Probaremos la identidad equivalente $\mathbf{I}_p [DN_p]_{BB} = -\mathbf{II}_p$. Para este fin, notemos que las columnas de $[DN_p]_{BB}$ son los vectores $DN_p(\varphi_u) = N_u$ y $DN_p(\varphi_v) = N_v$, pero escritos en la base B . Esto es, si

$$[DN_p]_{BB} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

entonces $N_u = a\varphi_u + b\varphi_v$ mientras que $N_v = c\varphi_u + d\varphi_v$. Multiplicando estas identidades por φ_u, φ_v y recordando las definiciones de e, f, g , obtenemos las cuatro ecuaciones

$$\begin{aligned} -e &= N_u \cdot \varphi_u = (a\varphi_u + b\varphi_v) \cdot \varphi_u = aE + bF, \\ -f &= N_v \cdot \varphi_u = (c\varphi_u + d\varphi_v) \cdot \varphi_u = cE + dF, \\ -f &= N_u \cdot \varphi_v = (a\varphi_u + b\varphi_v) \cdot \varphi_v = aF + bG, \\ -g &= N_v \cdot \varphi_v = (c\varphi_u + d\varphi_v) \cdot \varphi_v = cF + dG \end{aligned}$$

¹Hemos elegido un enfoque ligeramente distinto del clásico. Usualmente se define a la segunda forma fundamental como el operador cuadrático $\mathbf{II}_p(v) = -\langle DN_p v, v \rangle$ para $v \in T_p M$, y los coeficientes e, f, g resultan de calcular, para el operador bilineal asociado $\beta_p(v, w) = -\langle DN_p v, w \rangle$ las cantidades $e = \beta_p(\varphi_u, \varphi_u) = -\langle DN_p \varphi_u, \varphi_u \rangle = -N_u \cdot \varphi_u$, etc. Esta diferencia no será relevante para nuestros fines, que agotan el uso de la segunda forma en el cálculo de la curvatura de Gauss

respectivamente. Estas cuatro ecuaciones pueden condensarse, como puede el lector verificar, en la forma matricial

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

que es exactamente la identidad $\mathbf{I}_p[DN_p]_{BB} = -\mathbf{II}_p$ que es equivalente a lo que queríamos probar. \square

La fórmula anterior nos permite obtener una expresión para la curvatura de Gauss usando los coeficientes de las formas. Es decir, una fórmula en términos de la parametrización. Lo notable es que *estos coeficientes dependen de la parametrización elegida φ , pero la curvatura de Gauss, según la definimos, no.*

Corolario 6.3.3. Dado $p \in \text{Im}(\varphi) \subset M$, la curvatura de Gauss se calcula como

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

donde se sobreentiende que los coeficientes de las formas están evaluadas en (u_0, v_0) siempre que $p = \varphi(u_0, v_0)$.

Demostración. Como la curvatura de Gauss es el determinante de DN_p y este no depende de en qué base escribimos la matriz, se tiene

$$\begin{aligned} K(p) &= \det([DN_p]_{BB}) = \det(-\mathbf{I}_p^{-1} \mathbf{II}_p) = (-1)^2 \det(\mathbf{I}_p^{-1}) \det(\mathbf{II}_p) \\ &= \det(\mathbf{I}_p)^{-1} \det(\mathbf{II}_p) = \frac{\det(\mathbf{II}_p)}{\det(\mathbf{I}_p)} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Observación 6.3.4 (Curvatura media y principales). De la misma identidad matricial,

$$\begin{aligned} [DN_p]_{BB} = -\mathbf{I}_p^{-1} \mathbf{II}_p &= \frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ -Fe + Ef & Eg - Ff \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De aquí, la curvatura media se calcula inmediatamente como

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{Tr}(DN_p) = \frac{2fF - Eg - Ge}{2(EG - F^2)}.$$

También podemos usar la relación obtenida en el Ejercicio 6.2.1, para calcular las curvaturas principales usando los coeficientes de la primera y segunda forma,

$$\kappa_{1,2}(p) = H(p) \pm \sqrt{H(p)^2 - K(p)},$$

aunque no desarrollaremos aquí explícitamente esta fórmula general usando los coeficientes e, f, g, E, F, G .

Observación 6.3.5 (Cálculo de curvaturas y direcciones principales de curvatura). Recordemos que para cada $p \in M$, $DN_p : T_pM \rightarrow T_pM$ es una transformación lineal simétrica (Lema 6.1.6), y por ende diagonalizable con autovalores reales, esto es existe una base ortonormal $B' = \{V_1, V_2\}$ de T_pM tal que $DN_p V_i = \kappa_i(p) V_i$ donde $\kappa_1 \leq \kappa_2$ son las curvaturas principales de M en p y V_i son las direcciones principales de curvatura. Denotamos $D = [DN_p]_{B'B'}$ a la matriz 2×2 diagonal con estos autovalores κ_i , y consideramos $C = C_{BB'}$ a la matriz 2×2 de cambio de base de $B = \{\varphi_u, \varphi_v\}$ a $B' = \{V_1, V_2\}$ que tiene las direcciones principales respectivas V_1 y V_2 de M en p . Entonces

$$\mathbf{W}_p = [DN_p]_{BB} = C_{B'B}[DN_p]_{B'B'}C_{BB'} = C^{-1}DC.$$

La matriz de cambio de base C sólo es inversible, y no tiene por qué ser simétrica. Esto explica por qué la matriz de Weingarten \mathbf{W}_p no es necesariamente simétrica, ya que $\mathbf{W}_p^t = C^t D^t (C^t)^{-1} = C^t D (C^t)^{-1}$.

Sin embargo, sus autovalores *si* son los mismos que los del mapa de Gauss (¿por qué?), y por lo tanto son las curvaturas principales de M , así como su determinante es entonces la curvatura Gaussiana de M (6.3).

Una vez calculados los autovalores κ_1, κ_2 de $W = (w_{ij})$, procedemos a calcular los autovectores de W , triangulando la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} w_{11} - \kappa_i & w_{12} & 0 \\ w_{21} & w_{22} - \kappa_i & 0 \end{array} \right).$$

Obtenemos así dos soluciones (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , una para cada autovalor. Como los autovectores son inherentes a la transformación lineal DN_p , lo que hemos hallado en realidad *son las coordenadas de las direcciones principales en la base* $B = \{\varphi_u, \varphi_v\}$. Entonces las direcciones principales de M en p (sin normalizar) son

$$x_1 \varphi_u + y_1 \varphi_v, \quad x_2 \varphi_u + y_2 \varphi_v \in T_pM.$$

Si uno quiere las direcciones con norma unitaria, debe calcular la norma de cada vector, y luego dividir por ella. Se tiene entonces (notando que $\|V_i\|^2 = \langle V_i, V_i \rangle$) que las direcciones principales están dadas por

$$V_i = \frac{1}{\sqrt{x_i^2 E + 2x_i y_i F + y_i^2 G}} (x_i \varphi_u + y_i \varphi_v).$$

6.3.2. Ejercicios

6.3.4. Dada una superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por φ , el mapa de Gauss $N : M \rightarrow S^2$ es la aplicación normal $N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$. Probar que

$$N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

6.3.5. Describir gráficamente las regiones de S^2 cubiertas por la aplicación de Gauss para las siguientes superficies:

- Plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$.
- Esfera $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$
- Paraboloide de revolución: $z = x^2 + y^2$
- Hiperboloide de revolución: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
- Catenoide: $x^2 + y^2 = \cosh^2(z)$

6.3.6. Los coeficientes de la segunda forma fundamental de una superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por φ se pueden calcular como (recordar que $N_u = DN(\varphi_u)$):

$$e = -\varphi_u \cdot N_u, \quad f = -\varphi_u \cdot N_v = -\varphi_v \cdot N_u, \quad g = -\varphi_v \cdot N_v,$$

donde $N : M \rightarrow S^2$ es el mapa de Gauss.

- Usando que $\varphi_u, \varphi_v \perp N$, probar que $e = \varphi_{uu} \cdot N$, $f = \varphi_{uv} \cdot N$, $g = \varphi_{vv} \cdot N$.
- Usando la regla del producto $\langle A \times B, C \rangle = \det(A, B, C)$, probar que

$$e = \frac{\det(\varphi_{uu}, \varphi_u, \varphi_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad f = \frac{\det(\varphi_{uv}, \varphi_u, \varphi_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad g = \frac{\det(\varphi_{vv}, \varphi_u, \varphi_v)}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

6.3.7. Calcular los coeficientes e, f, g de la segunda forma fundamental, y la matriz de Weingarten ($W = [DN_p]_{BB} = -I_p^{-1}II_p = -(II_pI_p^{-1})^t$, donde $B = \{\varphi_u, \varphi_v\}$ es la base de T_pS dada por la parametrización) para los ejemplos que siguen:

- Un plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$.
- Una esfera de radio $R > 0$.
- La superficie que se obtiene al desplazar $y = x^2$ a lo largo del eje z .
- Un cilindro de cualquier radio.
- Un cono circular.

6.3.8. Calcular las curvaturas principales $\kappa_1(p) \leq \kappa_2(p)$ y las direcciones principales de curvatura $v_1(p), v_2(p) \in T_pM$ para los siguientes ejemplos:

- Un plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$.
- Una esfera de radio $R > 0$.
- La superficie que se obtiene al desplazar $y = x^2$ a lo largo del eje z .
- Un cilindro de radio $R > 0$.
- Un cono circular.

6.3.9. Comprobar que la curvatura Gaussiana K es constante y la indicada en cada caso.

- En un plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$, $K \equiv 0$.
- En la esfera de radio $R > 0$, $K \equiv 1/R^2$.
- En la superficie que se obtiene al desplazar $y = x^2$ a lo largo del eje z , $K \equiv 0$.
- En un cilindro de cualquier radio, $K \equiv 0$.
- En un cono circular, $K \equiv 0$.

6.3.10. Verificar que en los siguientes casos la curvatura Gaussiana $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ depende del punto (es decir, no es constante). Verificar que sin embargo el signo es constante como se indica.

- a) Una silla de montar, $z = x^2 - y^2$, $K < 0$.
- b) Un elipsoide de radios $a, b, c > 0$, $K > 0$.
- c) Un paraboloides de revolución, $K > 0$.

6.3.11. La superficie pseudoesfera.

- a) Por rotación de la tractriz (ver Guía de TP 1) alrededor del eje y se obtiene una superficie M denominada **pseudoesfera**. Hallar una parametrización de la pseudoesfera.
- b) Mostrar que la curvatura Gaussiana en todo punto de la pseudoesfera es -1 , es decir $K \equiv -1$.

6.4. Isometrías

Definición 6.4.1. Una función $f : M \rightarrow S$ es una isometría, si es de clase C^1 , es inyectiva y además $\|Df_p v\| = \|v\|$ para todo $p \in M$. Decimos que f es una *isometría local* si no pedimos que f sea inyectiva.

Las isometrías permiten vincular a las superficies M, S mediante sus primeras formas, de la siguiente forma, que suele mencionarse como “dos superficies isométricas tienen la misma primera forma fundamental”.

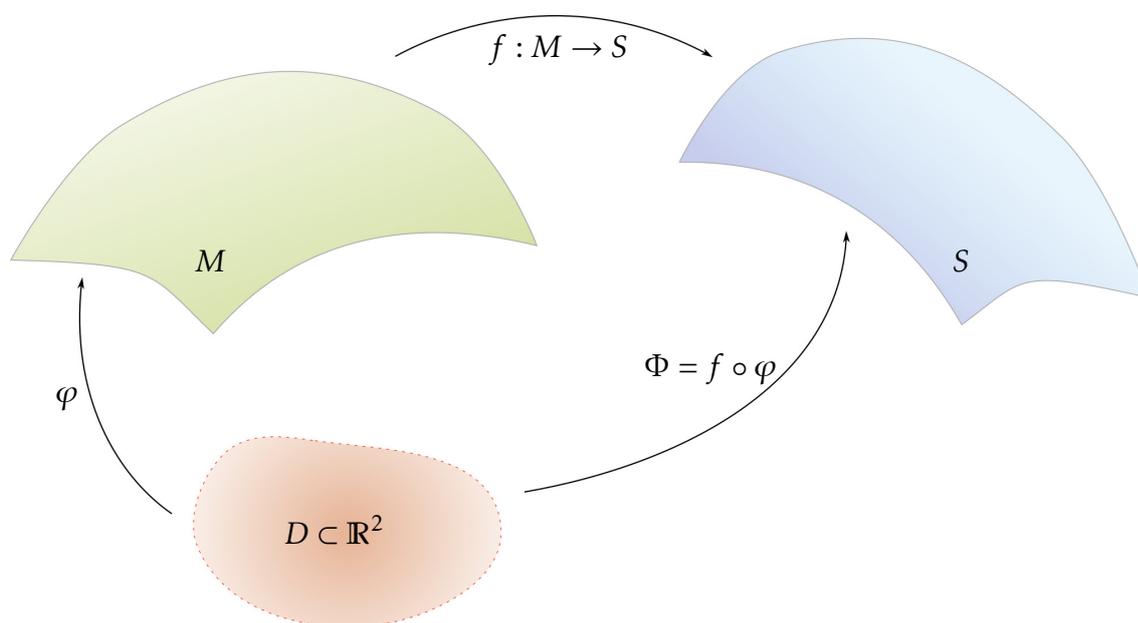


Figura 6.4: φ y $\Phi = f \circ \varphi$ tienen la misma primera forma

Proposición 6.4.2. Sea $f : M \rightarrow S$ una isometría local, y $p \in \text{Im}(\varphi) \subset M$ donde $\varphi : D \rightarrow M$ parametriza (de forma regular) un entorno de p . Entonces si $\Phi : D \rightarrow S$ se define como $\Phi = f \circ \varphi$, y se toma D suficientemente pequeño, se tiene que Φ es parametrización regular de S en un entorno de $f(p)$ y además

$$\mathbf{I}_p^M = \mathbf{I}_{f(p)}^S.$$

Demostración. Como f es isometría local, si D es suficientemente pequeño se tiene que la restricción $f|_{\text{Im}(\varphi)} : \text{Im}(\varphi) \rightarrow S$ es inyectiva, y como $\|Df_p v\| = \|v\|$ para todo $p \in \text{Im}(\varphi)$, y todo $v \in T_p M$, entonces la diferencial de f es inyectiva.

Como $f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} M$ y ambos son subespacios de dimensión 2, se concluye que Df_p es una transformación lineal inversible. Luego $\Phi = f \circ \varphi : D \rightarrow S$ es inyectiva, suave y además $D\Phi = Df_\varphi D\varphi$ lo que nos dice que $D\Phi$ es inyectiva por ser composición de dos transformaciones lineales inyectivas. Resumiendo, $\Phi = f \circ \varphi$ es regular. Por otra parte, si $p = \varphi(u, v)$, entonces $f(p) = f(\varphi(u, v)) = f \circ \varphi(u, v) = \Phi(u, v)$, y además

$$\begin{aligned} E^S(f(p)) &= E^S(\Phi(u, v)) = \langle \Phi_u, \Phi_u \rangle = \langle Df_\varphi \varphi_u, Df_\varphi \varphi_u \rangle \\ &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = E^M(\varphi(u, v)) = E^M(p), \end{aligned}$$

donde usamos que Df_p es una isometría y por ende preserva el producto interno (Ejercicio 3.2.10). Similarmente $F^S(f(p)) = F^M(p)$, $G^S(f(p)) = G^M(p)$. Como esto es cierto para todos los coeficientes, se concluye la relación para las primeras formas que enunciamos. \square

Notemos que esta igualdad es válida para la elección concreta de parametrización $\Phi = f \circ \varphi$, y la afirmación más general “si hay una isometría local entre M y S , entonces tienen la misma primera forma fundamental” no tiene sentido, pues las primeras formas dependen de la elección de la parametrización.

Recíprocamente, preservando los coeficientes de la primera forma, obtenemos una isometría:

Lema 6.4.3. Sean $\varphi : U \rightarrow M$, $\psi : U \rightarrow S$ parametrizaciones regulares con la misma primer forma fundamental en U . Entonces $f = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset M \rightarrow \psi(U) \subset S$ es una isometría local.

Demostración. Si $\alpha(t) = (u(t), v(t)) \in U$ es cualquier curva, entonces $\gamma = \varphi \circ \alpha$ es una curva genérica en $\varphi(U)$ y además

$$\dot{\gamma} = \varphi_u \dot{u} + \varphi_v \dot{v}$$

es un vector tangente genérico en $T_p M$ con $p = \varphi \circ \alpha(t) = \varphi(u, v)$. Como f es un difeomorfismo,

$$Df_p \dot{\gamma} = Df_\gamma \dot{\gamma} = \frac{d}{dt} f \circ \gamma = \frac{d}{dt} \psi \circ \alpha = \psi_u \dot{u} + \psi_v \dot{v}$$

es un vector tangente genérico en $f(p) \in S$.

Denotando $E_p = \|\varphi(u, v)\|^2$ el coeficiente dado por φ , y $\tilde{E}_{f(p)} = \|\psi_u(u, v)\|^2$ el dado por ψ (y similarmente para los demás), la hipótesis dice $E_p = \tilde{E}_{f(p)}$ etc. así que tenemos

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = E_p \dot{u}^2 + 2F_p \dot{u}\dot{v} + G_p \dot{v}^2 = \tilde{E}_{f(p)} \dot{u}^2 + 2\tilde{F}_{f(p)} \dot{u}\dot{v} + \tilde{G}_{f(p)} \dot{v}^2 = \|Df_p \dot{\gamma}\|^2.$$

Esto prueba que f es una isometría local. \square

Veamos ahora otras propiedades útiles de las isometrías, vinculadas con el mapa de Gauss, los ángulos, las áreas y las geodésicas.

Proposición 6.4.4. *Sea $f : M \rightarrow S$ una isometría, $Df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} S$ su diferencial en $p \in M$.*

1. Df_p preserva ángulos y distancias.
2. f preserva áreas.
3. Si $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ es una parametrización regular alrededor de p , entonces $\Phi = f \circ \varphi : D \rightarrow S$ es una parametrización regular de S alrededor de $f(p)$, y

$$N^S(f(p)) = \frac{Df_p \varphi_u \times Df_p \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

relaciona los mapas de Gauss de M y S .

4. Dado $W \in T_{f(p)} S$ de norma unitaria, si $V \in T_p M$ es el único vector tal que $W = Df_p V$, entonces la curvatura normal de S en la dirección de W está dada por

$$\kappa_W^S(f(p)) = \langle D(N^S \circ f)_p V, Df_p V \rangle.$$

5. f preserva longitudes de curvas: si $\alpha \subset M$ y $\beta = f \circ \alpha \subset S$, entonces $L(\alpha) = L(\beta)$.
6. Sea $\alpha \subset M$ y $\beta = f \circ \alpha \subset S$. Entonces β es geodésica de S si y sólo si α es geodésica de M .

Demostración. El primer ítem es consecuencia de que Df_p preserva normas, luego preserva ángulos y distancias (Ejercicio 3.2.14). Para probar el segundo ítem, notemos que si $\varphi : D \rightarrow M$ parametriza $\Omega \subset M$, entonces $\phi = f \circ \varphi : D \rightarrow S$ parametriza $\tilde{\Omega} = f(\Omega) \subset S$ y además

$$\begin{aligned} \|\phi_u \times \phi_v\| &= \|Df \varphi_u \times Df \varphi_v\| = \|Df \varphi_u\| \|Df \varphi_v\| \operatorname{sen} \Theta \\ &= \|\varphi_u\| \|\varphi_v\| \operatorname{sen} \Theta = \|\varphi_u \times \varphi_v\|. \end{aligned}$$

Luego

$$\mu(f(\Omega)) = \mu(\tilde{\Omega}) = \iint_D \|\phi_u \times \phi_v\| = \iint_D \|\varphi_u \times \varphi_v\| = \mu(\Omega),$$

es decir f preserva áreas.

Por otro lado, como $Df\varphi_u, Df\varphi_v$ son linealmente independientes, generan el subespacio $Df(T_pM) = T_{f(p)}S$, es decir son generadores del plano tangente a S en $f(p)$. En consecuencia, como Df_p es ortogonal,

$$N^S(f(p)) = \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|} = \frac{Df_p\varphi_u \times Df_p\varphi_v}{\|Df_p\varphi_u \times Df_p\varphi_v\|} = \frac{Df_p\varphi_u \times Df_p\varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}.$$

La afirmación sobre la curvatura normal se deduce escribiendo

$$\kappa_W^S(f(p)) = \langle DN_{f(p)}^S W, W \rangle = \langle DN_{f(p)}^S Df_p V, Df_p V \rangle = \langle D(N^S \circ f)_p V, Df_p V \rangle.$$

Como $\beta' = (f \circ \alpha)' = Df_\alpha \alpha'$, se tienen $\|\beta'\| = \|Df_\alpha \alpha'\| = \|\alpha'\|$ pues f es isometría. Integrando se deduce que f preserva longitudes.

Sea $\alpha \subset M$, $\beta = f \circ \alpha \subset N$. Notemos que como f es un difeomorfismo local entre M, S , a toda variación $\nu(s, t)$ de α le corresponde una variación $\tilde{\nu}(s, t) = f \circ \nu(s, t)$ de β y viceversa. Notemos también que $\dot{\tilde{\nu}}_s = Df_\nu \dot{\nu}_s$ por la regla de la cadena y entonces

$$\tilde{g}(s) = L(\tilde{\nu}_s) = \int_a^b \|\dot{\tilde{\nu}}_s\| dt = \int \|\dot{\nu}_s\| dt = L(\nu_s) = g(s)$$

pues Df_ν es ortogonal. Entonces, si $\alpha = \nu_0$ es geodésica de M , es punto crítico de g (Ejercicio 5.3.16), luego $\tilde{g}'(0) = g'(0) = 0$, lo que nos dice que $\beta = \tilde{\nu}_0$ es punto crítico de $\tilde{\nu}_s$ y por ende geodésica de S (mismo ejercicio). El mismo razonamiento nos dice que si β es geodésica, entonces α es geodésica. \square

§ Puede el lector observar de la demostración, que la última propiedad (preservar geodésicas) sigue siendo válida para isometrías *parciales*. También, que una demostración alternativa puede hacerse usando que una isometría preserva los coeficientes E, F, G de la primera forma, y entonces las ecuaciones de las geodésicas quedan prescriptas por las mismas ecuaciones (en los puntos correspondientes).

Observación 6.4.5. En general, es falso que una isometría preserve las curvaturas principales. Por ejemplo, consideremos las superficies $\Pi = \{z = 0\}$, $S = \{x^2 + z^2 = 1\}$ (un plano y un cilindro). Para $p = (x, y, 0) \in \Pi$, definimos

$$f(x, y) = (\cos(x), y, \sin(x))$$

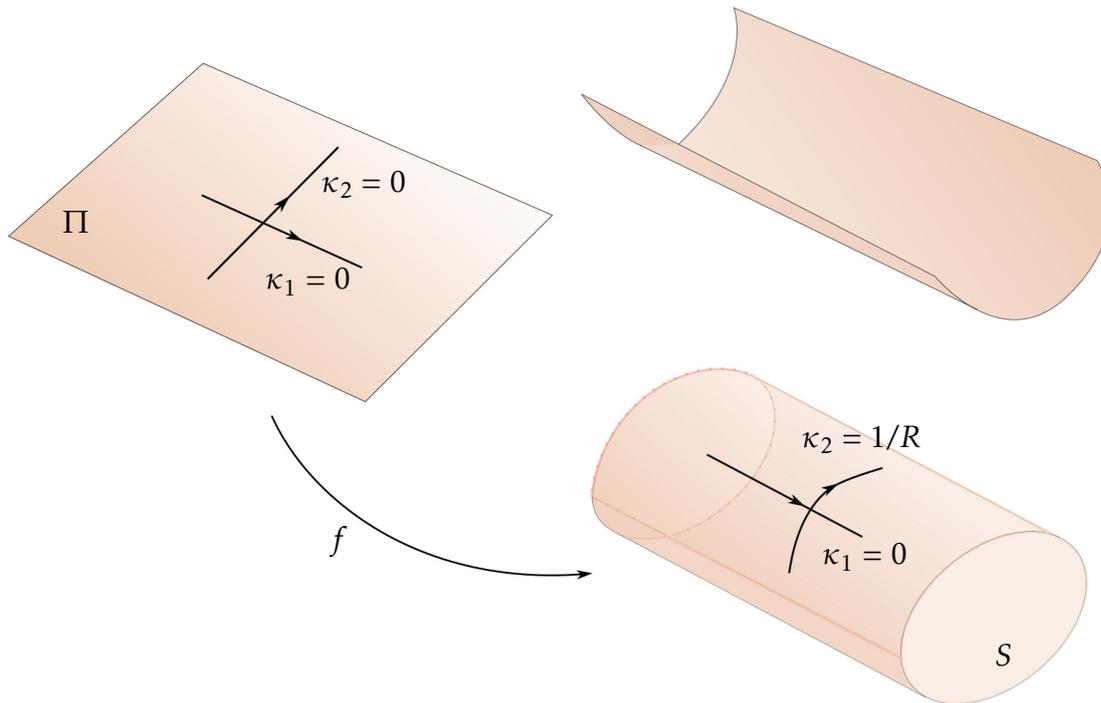


Figura 6.5: Isometría entre un plano y un cilindro de radio R

y notamos que $f : \Pi \rightarrow S$ es sobreyectiva (lo que f hace es “enrollar” el plano Π en la forma del cilindro, la variable que se enrolla es x , y el plano se enrolla alrededor del eje y). Además, si $\alpha(t) = (x(t), y(t), 0) \subset \Pi$ es una curva cualquiera con velocidad inicial $v = (\dot{x}, \dot{y}, 0) \in T_p\Pi$, entonces $\beta = f \circ \alpha$ es una curva en el cilindro S y además

$$\dot{\beta} = Df_p \dot{\alpha} = (\sin(x)\dot{x}, \dot{y}, -\cos(x)\dot{x}),$$

con lo cual $\|Df_p v\| = \|\sin(x)\dot{x}, \dot{y}, -\cos(x)\dot{x}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \|v\|$. Esto prueba que f es una isometría local.

Pero sabemos que en el plano $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, mientras que en el cilindro $\kappa_1 = 0$ mientras que $\kappa_2 = 1/R$ (pues es un cilindro de radio $R = 1$, Ejercicio 6.3.8). Luego f es isometría local, pero no preserva las curvaturas principales.

Observación 6.4.6. Sin embargo, si f es un *movimiento rígido*, es decir si f es la restricción a M de una transformación lineal ortogonal $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $f(p) = U \cdot p$, entonces *si es cierto* que f preserva los vectores normales, y por ende, el mapa de Gauss, y en consecuencia todas las curvaturas: por el segundo ítem de la

Proposición anterior, se tiene

$$N^S(f(p)) = \frac{U\varphi_u \times U\varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \pm U \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \pm UN^M(p),$$

donde el signo es según U preserve ($\det(U) = 1$) o invierta ($\det(U) = -1$) la orientación (Ejercicio 3.2.14). Luego $DN_{f(p)}^S Df_p = \pm U DN_p^M$ y tomando determinantes, $K^S(f(p)) = K^M(p)$.

Observación 6.4.7 (Isometrías entre mapas normales). Dada una isometría local $f : M \rightarrow S$, es razonable suponer que, al menos localmente, existe una isometría $F : W \rightarrow F(W)$ con W abierto de \mathbb{R}^3 abierto, entorno de $\Omega \subset M$ y $F(W)$ abierto en \mathbb{R}^3 , entorno de $f(\Omega) \subset S$. En ese caso, la tercer propiedad de la Proposición 6.4.4 se puede reescribir como

$$N^S(f(p)) = \frac{Df_p \varphi_u \times Df_p \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \pm DF_p(N^M(p)),$$

donde usamos la observación anterior para la transformación ortogonal $U = DF_p$.

Esta última observación *sugiere* que las isometrías locales preservan la curvatura de Gauss, y esto se conoce como el *Teorema Egregio* (teorema real o remarkable) de Gauss. Es decir, una isometría local puede no preservar las curvaturas normales, pero *si* preserva el *producto* de las dos curvaturas principales $K = \kappa_1 \kappa_2$.

La demostración del teorema egregio se basa en una cuenta extensa; la daremos a continuación en la Sección 6.5: esencialmente se trata de ver que la curvatura de Gauss K sólo depende de los coeficientes E, F, G de la primera forma fundamental y sus derivadas parciales. Luego se concluye la prueba del teorema observando que la primera forma es invariante por isometrías (Proposición 6.4.2).

6.5. El Teorema Egregio de Gauss

En esta última sección del texto, probamos el Teorema de Gauss que dice que la curvatura de Gauss es *intrínseca*, esto es, es invariante por isometrías locales.

Teorema 6.5.1. Si $M = \text{Im}(\varphi)$ es una superficie regular de clase C^3 , $K = K(p)$ es la curvatura de Gauss, $E = E(u, v)$, $F = F(u, v)$, $G = G(u, v)$ son coeficientes de la primera forma fundamental de M (donde $p = \varphi(u, v)$), entonces $K(p)(EG - F^2)^2$ es igual a

$$(EG - F^2)\left(F_{uv} - \frac{E_{vv}}{2} - \frac{G_{uu}}{2}\right) + \begin{vmatrix} 0 & \frac{E_u}{2} & F_u - \frac{E_v}{2} \\ F_v - \frac{G_u}{2} & E & F \\ \frac{G_v}{2} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & E & F \\ \frac{G_u}{2} & F & G \end{vmatrix},$$

donde las barras denotan determinante de las matrices.

Demostración. Notemos que

$$K(p)(EG - F^2)^2 = \det(\varphi_{uu}, \varphi_u, \varphi_v) \det(\varphi_{vv}, \varphi_u, \varphi_v) - \det(\varphi_{uv}, \varphi_u, \varphi_v)^2$$

directamente de la definición de K y el cálculo de e, f, g (Ejercicio 6.3.6). Luego

$$\begin{aligned} K(p)(EG - F^2)^2 &= \det \begin{pmatrix} -\varphi_{uu} \\ -\varphi_u \\ -\varphi_v \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ \varphi_{vv} & \varphi_u & \varphi_v \\ | & | & | \end{pmatrix} \\ &\quad - \det \begin{pmatrix} -\varphi_{uv} \\ -\varphi_u \\ -\varphi_v \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ \varphi_{uv} & \varphi_u & \varphi_v \\ | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \varphi_{vv} \cdot \varphi_{uu} & \varphi_{uu} \cdot \varphi_u & \varphi_{uu} \cdot \varphi_v \\ \varphi_{vv} \cdot \varphi_u & E & F \\ \varphi_{vv} \cdot \varphi_v & F & G \end{vmatrix} \\ &\quad - \begin{vmatrix} \varphi_{uv} \cdot \varphi_{uv} & \varphi_{uv} \cdot \varphi_u & \varphi_{uv} \cdot \varphi_v \\ \varphi_{uv} \cdot \varphi_u & E & F \\ \varphi_{uv} \cdot \varphi_v & F & G \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora usamos la propiedad de linealidad en la primer fila del determinante y escribimos, por ejemplo, la primer fila de la primera matriz como

$$(\varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv}, 0, 0) + (0, \varphi_{uu} \cdot \varphi_u, \varphi_{uu} \cdot \varphi_v) = V_1 + V_2.$$

Luego

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} \varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv} & \varphi_{uu} \cdot \varphi_u & \varphi_{uu} \cdot \varphi_v \\ \varphi_{vv} \cdot \varphi_u & E & F \\ \varphi_{vv} \cdot \varphi_v & F & G \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} V_1 & + & V_2 \\ \varphi_{vv} \cdot \varphi_u & E & F \\ \varphi_{vv} \cdot \varphi_v & F & G \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} - & V_1 & - \\ \varphi_{vv} \cdot \varphi_u & E & F \\ \varphi_{vv} \cdot \varphi_v & F & G \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} - & V_2 & - \\ \varphi_{vv} \cdot \varphi_u & E & F \\ \varphi_{vv} \cdot \varphi_v & F & G \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv} & 0 \\ \varphi_{vv} \cdot \varphi_u & E & F \\ \varphi_{vv} \cdot \varphi_v & F & G \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \varphi_{uu} \cdot \varphi_u & \varphi_{uu} \cdot \varphi_v \\ \varphi_{vv} \cdot \varphi_u & E & F \\ \varphi_{vv} \cdot \varphi_v & F & G \end{vmatrix} \\
 &= \varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv} (EG - F^2) + \begin{vmatrix} 0 & \varphi_{uu} \cdot \varphi_u & \varphi_{uu} \cdot \varphi_v \\ \varphi_{vv} \cdot \varphi_u & E & F \\ \varphi_{vv} \cdot \varphi_v & F & G \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{vmatrix} \varphi_{uv} \cdot \varphi_{uv} & \varphi_{uv} \cdot \varphi_u & \varphi_{uv} \cdot \varphi_v \\ \varphi_{uv} \cdot \varphi_u & E & F \\ \varphi_{uv} \cdot \varphi_v & F & G \end{vmatrix}$$

es igual a

$$= \varphi_{uv} \cdot \varphi_{uv} (EG - F^2) + \begin{vmatrix} 0 & \varphi_{uv} \cdot \varphi_u & \varphi_{uv} \cdot \varphi_v \\ \varphi_{uv} \cdot \varphi_u & E & F \\ \varphi_{uv} \cdot \varphi_v & F & G \end{vmatrix}$$

Restando ambos términos y usando las identidades probadas en (5.10) y (5.11), obtenemos que $K(p)(EG - F^2)^2$ es igual a

$$(EG - F^2)(\varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv} - \varphi_{uv} \cdot \varphi_{uv}) + \begin{vmatrix} 0 & \frac{E_u}{2} & F_u - \frac{E_v}{2} \\ F_v - \frac{G_u}{2} & E & F \\ \frac{G_v}{2} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & E & F \\ \frac{G_u}{2} & F & G \end{vmatrix}.$$

Notemos que $\varphi_{uu} \cdot \varphi_v = F_u - \frac{E_v}{2}$ y que $\varphi_{uv} \cdot \varphi_v = \frac{G_u}{2}$. Derivando respecto de v la primera identidad,

$$\varphi_{vuu} \cdot \varphi_v + \varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv} = F_{vu} - \frac{E_{vv}}{2}$$

respecto de u la segunda

$$\varphi_{uuv} \cdot \varphi_v + \varphi_{uv} \cdot \varphi_{uv} = \frac{G_{uu}}{2}$$

y restando, obtenemos

$$\varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv} - \varphi_{uv} \cdot \varphi_{uv} = F_{vu} - \frac{E_{vv}}{2} - \frac{G_{uu}}{2}$$

lo que termina la prueba de la fórmula enunciada. \square

Corolario 6.5.2 (Teorema Egregio de Gauss). *Si $f : M \rightarrow S$ es una isometría local de clase C^3 entre superficies regulares, entonces $K^M(p) = K^S(f(p))$ para todo $p \in M$.*

Demostración. Como f es una isometría local, podemos tomar $\Phi = f \circ \varphi$ que parametriza S alrededor de $f(p)$, y además los coeficientes de la primera forma coinciden en los puntos respectivos (Proposición 6.4.2), es decir $E^M(p) = E^S(f(p))$ etc., o más precisamente $E^S(u, v) = E^M(u, v)$ donde los coeficientes de M se calculan con φ y los de S con $\Phi = f \circ \varphi$. Si estos coinciden como funciones, entonces también coinciden sus derivadas parciales, y por el teorema anterior, coinciden las curvaturas en los puntos respectivos pues esta fórmula sólo depende de estos coeficientes y sus derivadas. \square

Observación 6.5.3 (Casos especiales). Suponiendo que podemos hallar una parametrización tal que $E = 1, F = 0$, la fórmula para la curvatura recién hallada se escribe como

$$K = \frac{G_u^2}{4G^2} - \frac{G_{uu}}{2G}$$

recordando que $G = \|\varphi_v\|^2$. Si consideramos la función $\sqrt{G} = \|\varphi_v\|$, entonces $(\sqrt{G})_u = \frac{G_u}{2\sqrt{G}}$ y también

$$(\sqrt{G})_{uu} = \frac{G_{uu}}{2\sqrt{G}} - \frac{G_u^2}{4G\sqrt{G}}.$$

Con esta observación a mano, es inmediato el corolario

Corolario 6.5.4. *Si $\varphi : U \rightarrow M$ es una parametrización regular con $E = 1, F = 0$ en U , y $\sqrt{G} = \|\varphi_v\|$, entonces*

$$(\sqrt{G})_{uu} + K\sqrt{G} = 0, \quad K = \frac{-(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}. \quad (6.6)$$

Esta relación permite no sólo calcular K en términos de G y sus derivadas, sino entender que una vez que K está prescrita, podemos intentar encontrar G de manera tal que la superficie tenga la curvatura deseada. Esto lo haremos en la próxima sección.

6.5.1. Ejercicios

6.5.12. Justificar por qué las siguientes superficies no son localmente isométricas:

a) La esfera

b) El cilindro

c) La silla de montar $\{z = x^2 - y^2\}$

d) La pseudeoesfera

6.5.13. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ la silla de montar con ecuación $z = xy$. Graficarla.

a) Calcular las curvaturas principales κ_1, κ_2 y las direcciones principales de curvatura v_1, v_2 de M en $P = (0, 0, 0)$.

b) Calcular la curvatura Gaussiana K de M y probar que es siempre negativa ¿En qué punto de M se alcanza el mínimo de K ?

6.5.14. Sea $N \subset \mathbb{R}^3$ la superficie dada por $z = \cosh(y)$.

a) Hallar geoméricamente dos rectas dentro de N .

b) Hallar la matriz de Weingarten y las curvaturas principales κ_1, κ_2 de N ¿Cuál es la curvatura principal máxima y en qué puntos se alcanza?

c) ¿Puede existir una isometría local entre N y un plano $\pi \subset \mathbb{R}^3$?

6.5.15. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva $y = z^3 + 1$ alrededor del eje z , con $z \in (-1, 1)$. Graficarla.

a) Parametrizarla y escribir las ecuaciones de Euler de las geodésicas.

b) Hallar dos geodésicas de S que pasen por $P = (0, 1, 0)$.

6.5.16. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ la superficie que se obtiene al desplazar $z = y^2$ a lo largo del eje x .

- a) Parametrizar M y escribir las ecuaciones de Euler de las geodésicas.
- b) Hallar rectas $L_1, L_2 \subset M$ y otra curva $C \subset M$ que no sea una recta pero si sea una geodésica, verificar con las ecuaciones.
- c) Hallar la matriz de Weingarten y las curvaturas principales κ_1, κ_2 de M ¿Cuál es la curvatura principal máxima y en qué puntos se alcanza?
- d) ¿Existe una isometría entre M y un plano?

6.5.17. Dado $k > 0$, considerar la superficie del elipsoide $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + \left(\frac{z}{k}\right)^2 = 1\}$.

- a) Calcular la curvatura de Gauss $K : E \rightarrow \mathbb{R}$.
- b) Probar que la curvatura calculada K no depende del ángulo θ (en coordenadas esféricas) e interpretar geoméricamente.
- c) ¿Existe una isometría entre E y la esfera unitaria para cualquier $k > 0$? ¿Para algún $k > 0$?
- d) Calcular las curvaturas principales κ_1, κ_2 , ver que las direcciones principales de curvatura v_1, v_2 son las direcciones de los ángulos θ, φ (en coordenadas esféricas), e interpretar geoméricamente qué ocurre cuando $k \rightarrow \infty$.

6.5.18. Sea $\varphi(u, v) = (f(v)\cos(u), f(v)\sin(u), g(v))$ la parametrización de una superficie de revolución con curvatura Gaussiana constante k . Para determinar f y g se elige v de modo que $(f')^2 + (g')^2 = 1$ (es decir que v es la longitud de arco de la curva generatriz). Mostrar que:

- a) f satisface $f'' + kf = 0$ y $g = \int \sqrt{1 - (f')^2} dv$. Se toma $0 < u < 2\pi$ y el dominio de v de modo que la última integral está definida.
- b) Todas las superficies de revolución con curvatura constante $k = 1$ que intersecan perpendicularmente el plano xy están dadas por

$$f(v) = C \cos(v) \quad y \quad g(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \sin^2(t)} dt$$

donde C es una constante. Determinar el dominio de v y hacer un gráfico de la curva cortada con el plano xz para los casos $C = 1$, $C > 1$ y $C < 1$ (notar que el plano xz se obtiene tomando $u = 0$). Observar que $C = 1$ representa la esfera unitaria S^2 .

c) Todas las superficies de revolución con curvatura constante $k = -1$ son de uno de los siguientes tipos:

$$\text{I.}) f(v) = C \cosh(v) \text{ y } g(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \sinh^2(t)} dt.$$

$$\text{II.}) f(v) = C \sinh(v) \text{ y } g(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \cosh^2(t)} dt.$$

$$\text{III.}) f(v) = e^v \text{ y } g(v) = \int_0^v \sqrt{1 - e^{2t}} dt.$$

Determinar el dominio de v y hacer un gráfico de cada superficie cortada con el plano xz .

d) La última superficie del ítem previo es la pseudoesfera del Ejercicio 6.3.11.

e) Las únicas superficies de revolución con $k = 0$ son el cilindro circular recto, y el cono circular recto.

6.5.19. Si $\varphi = \varphi(u, v)$ es una parametrización C^3 de M y denotamos, para cada campo X en M

$$\nabla_u X = \nabla_{\varphi_u} X = P_\varphi[(X \circ \varphi)_u] = (X \circ \varphi)_u + \langle DN \varphi_u, X \circ \varphi \rangle,$$

y similarmente $\nabla_v = \nabla_{\varphi_v}$. Probar que

1. Existe una función real $A = A(u, v)$ tal que

$$\nabla_u \nabla_v \varphi_v = \varphi_{v v u} + \langle DN_\varphi \varphi_v, \varphi_v \rangle DN_\varphi \varphi_u + AN_\varphi.$$

2. Hallar una fórmula análoga para $\nabla_v \nabla_u \varphi_v$ y probar que

$$\langle (\nabla_u \nabla_v - \nabla_v \nabla_u) \varphi_v, \varphi_u \rangle = eg - f^2 = K(EG - F^2).$$

6.5.20. Sean X, Y campos en M . Probar que

1. Si X, Y son C^2 , entonces existe una función real a tal que

$$D(\nabla_Y Y)(X) = D^2 X(X, Y) + DY(DY(X)) + \langle DN Y, Y \rangle DN X + aN$$

2. Existe b función real tal que

$$\nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y = DY([Y, X]) + \langle DN Y, Y \rangle DN X - \langle DN X, Y \rangle DN Y + bN$$

3. Si $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$, vale la fórmula

$$\langle R(X, Y)Y, X \rangle = \langle DN X, X \rangle \langle DN Y, Y \rangle - \langle DN X, Y \rangle^2.$$

4. Si X_p, Y_p forman una base ortonormal de $T_p M$ para cada $p \in M$, entonces la curvatura de Gauss se puede calcular como

$$K = \langle R(X, Y)Y, X \rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y - \nabla_{[X, Y]} Y, X \rangle,$$

5. Y en general (suponiendo X, Y l.i.), se tiene

$$K = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{A(X, Y)^2},$$

donde $A(X, Y) = \sqrt{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$ es el área del paralelogramo generado por X, Y .

6.6. Formas espaciales

Denominaremos *formas espaciales* a las superficies conexas modelo M_k con curvatura de Gauss constante, separadas en tres clases, $K = 0$, $K \equiv k > 0$, $K \equiv k < 0$ (plano, esfera, y pseudoesfera), que describiremos a continuación (rigurosamente, una forma espacial debe ser simplemente conexa, pero omitiremos esta condición aquí).

Para presentarlas y compararlas con otras superficies, será útil calcular sus primeras formas en términos de las *coordenadas polares*, dadas por tomar la parametrización exponencial en un punto $p \in M$, elegir una base $\{v_1, v_2\}$ de T_pM y considerar la composición de la parametrización exponencial con las coordenadas polares usuales de \mathbb{R}^2 , esto es

$$\varphi(r, \theta) = \text{Exp}_p(r \cos \theta v_1 + r \sen \theta v_2).$$

1. $K = 0$. Consideramos un plano, en particular $M = \Pi = \{z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Tomando $p = (0, 0, 0)$ se tiene $T_pM = M = \Pi$. Como las geodésicas de M son rectas, la parametrización exponencial es la identidad, es decir $\text{Exp}_p(v) = v$. Entonces podemos tomar la parametrización en coordenadas polares dada por $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sen \theta, 0)$. En este caso tenemos, para $0 \leq r$,

$$\varphi_r = (\cos \theta, \sen \theta, 0), \quad \varphi_\theta = (-r \sen \theta, r \cos \theta, 0),$$

luego

$$E = \|\varphi_r\|^2 = 1, \quad F = 0, \quad G = \|\varphi_\theta\|^2 = r^2.$$

Entonces $\sqrt{G} = r$ y mediante la ecuación (6.6), podemos concluir que $K = 0$ (por supuesto, esto lo sabemos también por otros motivos).

2. $K \equiv k > 0$. Consideramos $M = S_R$ una esfera de radio $R = 1/\sqrt{k} > 0$, y tomamos $p \in M$, entonces $T_pM = \{p\}^\perp$. Dado $v \in T_pM$ con $\|v\| = r$, consideramos la curva con posición inicial $\gamma(0) = p$ dada por

$$\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv) = \cos(tr/R)p + R \frac{\sen(tr/R)}{r} v.$$

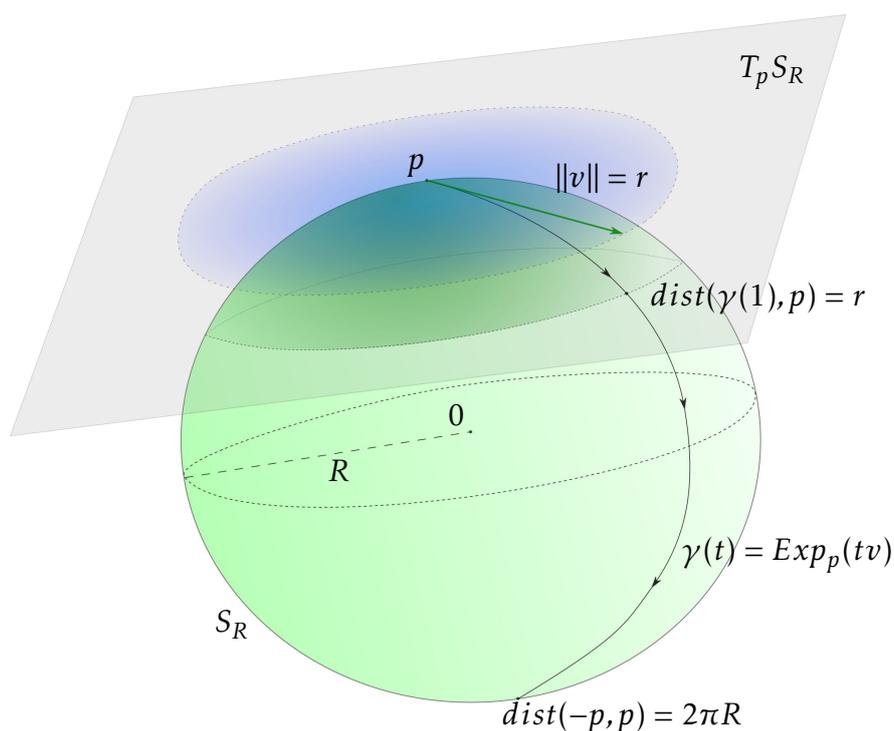


Figura 6.6: Parametrización exponencial de la esfera S_R de radio R

Es claro que, como $v \perp p$, $\|\gamma(t)\|^2 = R^2$ luego $\gamma \subset M$. Por otro lado,

$$\gamma'(t) = -r/R \operatorname{sen}(tr/R)p + \cos(tr/R)v,$$

entonces $\gamma'(0) = v$ y $\|\gamma'(t)\|^2 = r^2 = \|v\|^2 = L(\gamma)^2$. También

$$\gamma''(t) = -r^2/R^2 \cos(tr/R)p - r/R \operatorname{sen}(tr/R)v = -r^2/R^2 \gamma(t),$$

luego $\gamma''' = -r^2/R^2 \gamma$, así que γ es la única geodésica en M con $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Podemos afirmar que entonces,

$$\operatorname{Exp}_p(v) = \gamma(1) = \cos(r/R)p + R \frac{\operatorname{sen}(r/R)}{r} v.$$

En particular, si $p = (0, 0, R)$ es el polo norte de M y $v = (x, y, 0) \in T_p M$, entonces

$$\operatorname{Exp}_p(x, y, 0) = \left(R \frac{\operatorname{sen}(r/R)}{r} x, R \frac{\operatorname{sen}(r/R)}{r} y, \cos(r/R)R \right).$$

Luego, escribiendo $v = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, 0)$, una parametrización en coordenadas polares desde el polo norte está dada por

$$\varphi(r, \theta) = (R \operatorname{sen}(r/R) \cos \theta, R \operatorname{sen}(r/R) \operatorname{sen} \theta, R \cos(r/R)),$$

para $0 \leq r < R\pi$. Calculamos

$$\varphi_r = (\cos(r/R) \cos \theta, \cos(r/R) \sin \theta, -\sin(r/R)),$$

$$\varphi_\theta = (-R \sin(r/R) \sin \theta, R \sin(r/R) \cos \theta, 0),$$

de donde inmediatamente obtenemos

$$E = \|\varphi_r\|^2 = 1, \quad F = 0, \quad G = R^2 \sin^2(r/R) = \frac{1}{k} \sin^2(\sqrt{k}r),$$

luego $\sqrt{G} = R \sin(r/R)$ (estamos trabajando en el entorno de p dado por $0 \leq r < \pi R$, que es la esfera sin el polo sur, de manera que $\sin(r/R) > 0$ allí). Calculamos

$$(\sqrt{G})_r = \cos(r/R), \quad (\sqrt{G})_{rr} = -\frac{1}{R} \sin(r/R),$$

y nuevamente por la ecuación (6.6) obtenemos que la curvatura de Gauss es en efecto

$$K = \frac{-(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}} \equiv R^2 = k > 0.$$

3. $K \equiv k < 0$. Sea $R^2 = -1/k > 0$, consideramos la superficie de revolución dada por la *pseudoesfera invertida* de radio R . Daremos una parametrización que no es regular en el origen, pero tiene las propiedades deseadas de la primera forma. Fijamos $0 < A < 1$ y, para $0 \leq \theta \leq 2\pi A$ definimos la superficie de revolución

$$\varphi(r, \theta) = (AR \sinh(r/R) \cos(\theta/A), AR \sinh(r/R) \sin(\theta/A), g(r)),$$

donde

$$g(r) = \int_0^r \sqrt{1 - A^2 \cosh^2(t/R)} dt$$

está elegida para que los meridianos estén parametrizados por longitud de arco (ver el Ejercicio 6.5.18). Observemos que la parametrización es regular únicamente para $0 < r < R \cosh^{-1}(1/A)$, y en particular no es regular en $r = 0$. Calculamos

$$\varphi_r = (A \cosh(r/R) \cos(\theta/A), A \cosh(r/R) \sin(\theta/A), g'(r))$$

$$\varphi_\theta = (-R \sinh(r/R) \sin(\theta/A), R \sinh(r/R) \cos(\theta/A), 0),$$

de donde obtenemos

$$E = \|\varphi_r\|^2 = 1, \quad F = 0, \quad G = \|\varphi_\theta\|^2 = R^2 \operatorname{senh}^2(r/R) = \frac{-1}{k} \operatorname{senh}^2(\sqrt{-k} r).$$

Entonces $\sqrt{G} = R \operatorname{senh}(r/R)$, y por la ecuación (6.6) deducimos que

$$K = \frac{-(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}} \equiv -\frac{1}{R^2} = k < 0.$$

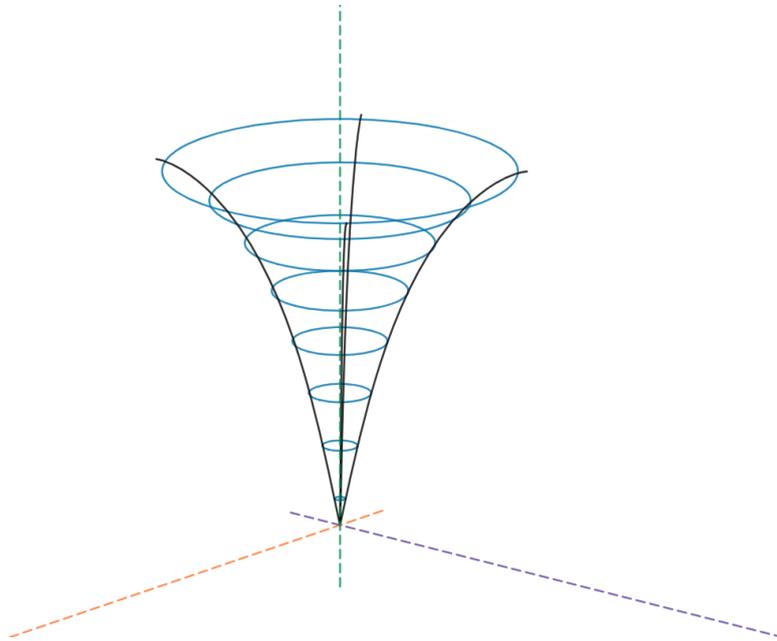


Figura 6.7: Pseudoesfera invertida, parametrizada desde $P = 0$

§ Como veremos a continuación, si bien es teóricamente posible dar una parametrización en coordenadas polares exponenciales de la pseudoesfera, en la práctica resulta extremadamente engorroso ya que las geodésicas de la pseudoesfera no tienen una descripción sencilla. Sin embargo, para nuestros propósitos que eran meramente ilustrativos, la parametrización φ recién presentada verifica $E = 1, F = 0$ (y de hecho los rayos con $\theta = cte$ son geodésicas que parten del vértice de la pseudoesfera invertida, como puede el lector verificar usando la parametrización dada).

Teorema 6.6.1 (Coordenadas polares exponenciales). Sea M regular de clase C^3 , $p \in M$ y $Exp_p : B_r(0_p) \subset T_p M \rightarrow M$ la parametrización exponencial en un entrono de p . Dada una base ortonormal $\{v_1, v_2\}$ de T_p , las coordenadas polares exponenciales están dadas por

$$\varphi(r, \theta) = Exp_p(r \cos \theta v_1 + r \operatorname{sen} \theta v_2),$$

y verifican

$$E = 1, \quad F = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} G = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} (\sqrt{G})_r = 1.$$

Demostración. Será conveniente denotar $u = v_1 \cos \theta + v_2 \operatorname{sen} \theta$, de manera que si $v = ru \in T_p M$, entonces $u_\theta = -v_1 \operatorname{sen} \theta + v_2 \cos \theta$ y $u_\theta \perp u$. Calculamos

$$\varphi_r = D(Exp_p)_{ru}(u), \quad \varphi_\theta = rD(Exp_p)_{ru}(u_\theta).$$

Entonces $E(r, \theta) = \|\varphi_r\|^2 = \|D(Exp_p)_{ru}(u)\|^2 = \|u\|^2 = 1$ por el lema de Gauss (Lema 7.6.1). Similarmente,

$$F(r, \theta) = \varphi_r \cdot \varphi_\theta = r \langle D(Exp_p)_{ru}(u), D(Exp_p)_{ru}(u_\theta) \rangle = r \langle u, u_\theta \rangle = 0$$

nuevamente por el lema de Gauss. Por último $G(r, \theta) = r^2 \|D(Exp_p)_{ru}(u_\theta)\|^2$, y la primer propiedad de G es obvia. Veamos la segunda propiedad, tenemos $\sqrt{G} = r \|D(Exp_p)_{ru}(u_\theta)\| = rg(r, \theta)$, pero entonces

$$(\sqrt{G})_r = g(r, \theta) + rg_r(r, \theta) \rightarrow g(0, \theta) = \|D(Exp_p)_0(u_\theta)\| = \|u_\theta\| = 1. \quad \square$$

Proposición 6.6.2. Sea $p \in M$ con curvatura de Gauss constante $K \equiv k$, sea φ parametrización en coordenadas polares exponenciales alrededor de p . Entonces $E = 1, F = 0$, mientras que

1. Si $k = 0$, entonces $G(r, \theta) = r^2$.
2. Si $k > 0$, entonces $G(r, \theta) = \frac{1}{k} \operatorname{sen}^2(r \sqrt{k})$
3. Si $k < 0$, entonces $G(r, \theta) = \frac{-1}{k} \operatorname{senh}^2(r \sqrt{-k})$.

En particular G no depende de θ .

Demostración. Si $k = 0$, por el Corolario 6.5.4 y el teorema previo, tenemos que resolver la ecuación diferencial $\sqrt{G}_{rr} = 0$ con las condiciones iniciales $\sqrt{G}(0, \theta) = 0$, $\sqrt{G}_r(0, \theta) = 1$. De la primera condición deducimos que $\sqrt{G}_r = f(\theta)$, y de la

última deducimos que $f(\theta) \equiv 1$, integrando una vez más obtenemos $\sqrt{G} = r + g(\theta)$, pero de la segunda condición obtenemos $g(\theta) \equiv 0$, luego $\sqrt{G} = r$ y así $G = r^2$.

Si $k > 0$, la solución general de $\sqrt{G}_{rr} + k\sqrt{G} = 0$ es

$$\sqrt{G} = a(\theta) \cos(\sqrt{k}r) + b(\theta) \sin(\sqrt{k}r).$$

A partir de la primer condición inicial es inmediato que $a(\theta) \equiv 0$, y derivando respecto de r obtenemos $\sqrt{G}_r = b(\theta) \cos(\sqrt{k}r) \sqrt{k} \rightarrow b(\theta) \sqrt{k} = 1$ por la segunda condición inicial, luego $\sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}r)$.

Si $k < 0$, la solución general de la ecuación diferencial de K es

$$\sqrt{G} = a(\theta) \cosh(\sqrt{-k}r) + b(\theta) \sinh(\sqrt{-k}r).$$

Aplicando el razonamiento anterior con las condiciones iniciales, arribamos a $\sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-k}r)$. \square

Con estas herramientas podemos probar que toda superficie con curvatura Gaussiana constante, es localmente isométrica a una de las formas espaciales.

Teorema 6.6.3 (Teorema de Minding). *Sea M de curvatura de Gauss constante $K \equiv k$. Entonces M es localmente isométrica a*

1. Un plano, si $k = 0$.
2. Una esfera de radio $R = 1/\sqrt{k}$, si $k > 0$.
3. Una pseudoesfera de radio $R = 1/\sqrt{-k}$, si $k < 0$.

Demostración. Dado $p \in M$, sea $B \subset \mathbb{R}^2$ una bola de radio pequeño, sea $\{w_1, w_2\}$ base ortonormal de $T_p M$, y $\varphi : B \rightarrow \varphi(B) = V \subset M$ la parametrización en coordenadas polares exponenciales alrededor de p . Fijado $k \in \mathbb{R}$ y para cada caso, tomamos un punto $q \in M_k$ (donde M_k es la correspondiente forma espacial), y consideramos la base ortonormal $\{v_1, v_2\}$ de $T_q M_k$, con su parametrización en coordenadas polares $\varphi_k : B \rightarrow \varphi_k(B) = V_k \subset M_k$. Sea $f : V \rightarrow V_k$ el difeomorfismo local de M a M_k dado por $f = \varphi_k \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow V_k$. Por la proposición anterior, φ, φ_k tienen la misma primera forma fundamental en B , y entonces por el Lema 6.4.3 resulta que f es una isometría. \square

Las dificultades para presentar la parametrización exponencial en coordenadas polares *expícita* para un modelo de curvatura negativa, son por un lado computacionales, y por otro lado están vinculadas con el siguiente teorema cuya demostración no daremos aquí (puede el lector notar que las pseudoesferas no son superficies completas):

Teorema 6.6.4 (Hilbert-Efimov). *No existe en \mathbb{R}^3 ninguna superficie completa de curvatura constante negativa.*

En la Sección 7.8 presentaremos el disco de Poincaré como variedad Riemanniana abstracta de dimensión 2, y veremos que es completa y tiene curvatura negativa constante.

El mejor resultado que se conoce en términos de superficies en \mathbb{R}^n con la métrica del ambiente, fue obtenido por Blanusa en 1955, donde exhibió una parametrización regular explícita de una superficie *completa y simplemente conexa* en \mathbb{R}^6 con curvatura constante $K \equiv -1$ (de hecho la superficie es de clase C^∞). Si uno permite auto-intersecciones (es decir, si no pedimos que la parametrización sea inyectiva), entonces el resultado de Blanusa puede mejorarse para obtener una superficie en \mathbb{R}^5 . Si existe alguna superficie completa de curvatura negativa constante en \mathbb{R}^4 es, sorprendentemente, al día de hoy un problema abierto. Para una presentación muy clara del Teorema de Hilbert, la parametrización de Blanusa, y referencias a los resultados aquí mencionados, ver [13], Secciones 2.6 y 2.8.3.

Observación 6.6.5. Una hipótesis relevante sobre las superficies regulares con las que tratamos en este texto es que son (al menos) de clase C^3 . Esto es para que tengan suficiente regularidad como para poder *definir* las cantidades vinculadas con las curvaturas, y que estas cantidades sean de clase C^1 (esto se usa por ejemplo, en el Ejercicio 6.6.28).

Para la mayor parte de la teoría sin embargo, es suficiente con pedir que las superficies sean C^2 , para que las curvaturas sean funciones continuas. Un corolario del teorema de Kuiper-Nash (1955-1956) nos dice que toda superficie regular orientable $M \subset \mathbb{R}^3$ admite, para todo $\varepsilon > 0$, una isometría $f : M \rightarrow f(M) \subset \varepsilon B \subset \mathbb{R}^3$ con B la bola unitaria. Esta f es un homeomorfismo con la imagen y es de clase C^1 . Notemos que esto es altamente contraintuitivo ya que puede probarse que en un punto extremo de $f(M)$ la curvatura de Gauss debe ser mayor o igual a $1/\varepsilon^2$ (Ejercicio 6.6.31), lo que contradice el teorema egregio de Gauss que dice que la curvatura es invariante por isometrías. El punto aquí

es que la isometría es sólo de clase C^1 , y entonces no transfiere la información concerniente a las derivadas segundas de M , y en particular, olvida su curvatura original. El teorema egregio de Gauss nos dice que no puede existir, en general, una tal f de clase C^2 .

Nota bibliográfica 4. Además del texto de Do Carmo [3] la presentación de este capítulo le debe bastante a los textos de O'Neill [12] y Lee [8], con algunos agregados propios. Hemos omitido un teorema importante que relaciona la curvatura con las geodésicas y la topología de la superficie: el Teorema de Gauss-Bonnet. Una presentación relativamente accesible de seguir de este teorema y sus derivaciones, a partir de lo presentado en este capítulo, puede verse en el ya mencionado texto de O'Neill [12], Capítulo 6.

6.6.1. Ejercicios

6.6.21. Si S es una superficie regular parametrizada como $\varphi(u, v) = p(u) + vr(u)$ con p, r de clase C^2 y r de norma unitaria, decimos que S es una superficie reglada ¿Por qué? Hallar las expresiones para sus primera y segunda formas fundamentales, su curvatura y estudiar las direcciones principales.

6.6.22. Sea S una superficie regular. La *indicatriz de Dupin* de S en un punto p es el conjunto de vectores $w \in T_p S$ tales que $\langle \mathbf{II}_p w, w \rangle = \pm 1$. Probar que si p es un punto elíptico la indicatriz de Dupin en p es una elipse. ¿Qué ocurre si p es umbílico?

6.6.23. Mostrar que en un punto hiperbólico, las direcciones principales bisectan las direcciones asintóticas (sug: analizar la *indicatriz de Dupin*).

6.6.24. Mostrar que si una superficie es tangente a un plano sobre una curva, entonces los puntos de esta curva son planares o parabólicos.

6.6.25. Sean $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y α una curva en M con curvatura nunca nula.

1. Probar que α es una curva asintótica si y sólo si el plano osculador a la curva en $\alpha(t)$ coincide con el plano tangente a la superficie en $\alpha(t)$ (para todo t).

2. Probar que una geodésica es una curva asintótica si y sólo si es una recta.
- 6.6.26.** Determinar las curvas asintóticas y líneas de curvatura de $S = \{(x, y, z) : z = xy\}$.
- 6.6.27.** Suponiendo que el plano osculador de una línea de curvatura $C \subset S$, que nunca es tangente a una dirección asintótica, forma un ángulo constante con el plano tangente de S a lo largo de C , probar que C es una curva plana.
- 6.6.28.** Sea M superficie regular conexa, supongamos que todos los puntos de M son umbílicos. Si $\kappa_p(v)$ es la curvatura normal en p en la dirección de $v \in T_pM$, probar:
1. $\kappa_p(v) = \kappa$ es constante (no depende de la dirección ni del punto).
 2. $K(p)$ es constante (la curvatura de Gauss) e igual a κ^2 .
 3. Si $\kappa = 0$, M es una porción de un plano.
 4. Si $\kappa \neq 0$, M es una porción de una esfera de radio $R = 1/|\kappa|$ (*sug: tomar un punto $p \in M$ y $c = p + 1/\kappa N(p)$, probar que $\|q - c\| = R$ para todo $q \in M$).*
- 6.6.29.** Probar que si una geodésica de M es una curva plana, es una línea de curvatura (*sug: $\mathbf{n}(s) = \pm N \circ \alpha(s)$, y fórmulas de Frenet*).
- 6.6.30.** Probar que si todas las geodésicas de una superficie M son curvas planas, entonces M está contenida en un plano o en una esfera.
- 6.6.31.** Probar que si M es compacta existe un punto $p \in M$ donde $K(p) > 0$.
- 6.6.32.** Decimos que M es una *superficie mínima* si tiene curvatura media constantemente nula, es decir $\kappa_1(p) + \kappa_2(p) = 0$ para todo $p \in M$. Probar que no hay superficies mínimas compactas.
- 6.6.33.** Sea M compacta, conexa y orientable, con curvatura de Gauss $K \equiv 1$.
1. Probar que $N : M \rightarrow S^2$ es difeomorfismo local y es sobreyectiva.
 2. Probar que es un revestimiento, y que si M es simplemente conexa, es biyectiva (luego M es difeomorfa a la esfera).

6.6.34. Sea μ campo C^2 a lo largo de la geodésica $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$ con $\mu(0) = 0$, $\dot{\mu}(0) = w \in T_pM$. Consideramos $f(t) = \|\mu(t)\| - t\|w\|$, probar que, donde $\mu(t) \neq 0$,

$$1. f'(t) = \frac{1}{|\mu|} \langle \mu, \dot{\mu} \rangle - \|w\| = \frac{1}{|\mu|} \langle \mu, \nabla_{\dot{\gamma}} \mu \rangle - \|w\|, f'(0) = 0.$$

2.

$$f''(t) = \frac{1}{|\mu|^3} \{ |\mu|^2 |\dot{\mu}|^2 - \langle \mu, \dot{\mu} \rangle^2 \} + \frac{1}{|\mu|} \langle \mu, \ddot{\mu} \rangle \geq \frac{1}{|\mu|} \langle \mu, \ddot{\mu} \rangle = \frac{1}{|\mu|} \langle \mu, \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} \mu \rangle.$$

6.6.35. Sea $\nu(s, t) = \text{Exp}_p(t(v + sw))$ con $\{v, w\}$ base de T_pM , una variación de $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$ por geodésicas. Sea $\mu(t) = \nu'_0(t)$ el campo variacional. Probar que

$$1. [\nu', \dot{\nu}] = (\nu') \cdot - \dot{\nu}' = 0.$$

$$2. \nabla_{\dot{\nu}} \nu' = \dot{\nu}' + \langle DN_{\nu} \nu', \dot{\nu} \rangle N_{\nu} = \nabla_{\nu'} \dot{\nu}.$$

3. Si pensamos ν como una parametrización, ν es regular y $E(t, 0) = |\nu'(t, 0)| = |tw|^2$, $F(0, t) = t^2 \langle v, w \rangle^2$, $G(0, t) = |\dot{\nu}(0, t)|^2 = |v|^2$ (usar el Lema de Gauss).

4. Usando el Ejercicio 6.5.19, probar

$$\begin{aligned} -t^2(|w|^2|v|^2 - \langle v, w \rangle^2)K(0, t) &= \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\mu} \dot{\gamma} - \nabla_{\mu} \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, \mu \rangle \\ &= \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\mu} \dot{\gamma}, \mu \rangle = \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} \mu, \mu \rangle. \end{aligned}$$

6.6.36. Sea f como en el ejercicio 6.6.34, μ como en el ejercicio anterior. Si $K \leq 0$ en M , y M es completa, entonces $f'' \geq 0$ y f es creciente en $[0, +\infty)$. En particular μ no se anula fuera de $t = 0$ y

$$f(1) = |\mu(1)| - |w| = |D(\text{Exp}_p)_{*v}(w)| - |w| \geq f(0) = 0,$$

luego la diferencial de la exponencial aumenta distancias. Probar que para v, w suficientemente pequeños,

$$\text{dist}(\text{Exp}_p(v), \text{Exp}_p(w)) \geq |v - w|.$$

7 GEOMETRÍA RIEMANNIANA

Si Gauss no hubiera creado su geometría de superficies, que le sirvió a Riemann como base, es difícil concebir que alguien más lo podría haber hecho.

Albert Einstein

El objeto de este capítulo es dar una modesta presentación de los temas más abstractos de la geometría Riemanniana, vinculados a las geodésicas y la curvatura. Nos concentraremos en la geometría local, o más precisamente en aquellas variedades riemannianas que pueden presentarse como un abierto $D \subset \mathbb{R}^d$. Para una exposición de la geometría riemanniana de variedades diferenciales abstractas que se obtiene pegando la geometría de estos abiertos que parametrizan la variedad de manera adecuada, una primer lectura recomendable es el texto de Lee [8].

7.1. Métricas de Riemann

Dada una parametrización regular $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ que recorre una superficie $S = \varphi(D)$, sabemos que la primera forma fundamental relaciona las métricas de \mathbb{R}^3 con la de D , de la siguiente manera. Dado $x \in D$, y vectores $v, w \in \mathbb{R}^2$, podemos considerar sus imágenes por el isomorfismo $D\varphi_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{\varphi(x)}S \subset \mathbb{R}^3$, las que denotaremos $\tilde{v} = D\varphi_x(v), \tilde{w} = D\varphi_x(w) \in \mathbb{R}^3$. Entonces, como vimos en la Sección 4.3,

$$\langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle = \langle D\varphi_x(v), D\varphi_x(w) \rangle = \langle (D\varphi_x)^t D\varphi_x(v), w \rangle = \langle \mathbf{I}_x v, w \rangle, \quad (7.1)$$

puesto que, como vimos en la Observación 4.3.1,

$$(D\varphi_x)^t D\varphi_x = \mathbf{I}_x = \begin{pmatrix} E(x) & F(x) \\ F(x) & G(x) \end{pmatrix}.$$

En los textos de geometría Riemanniana clásica (y en muchos textos de física), es habitual usar la notación $g(x) = \mathbf{I}_x \in M_2(\mathbb{R})$, y se dice que g es la *métrica Riemanniana*.

Notemos que, para cada $x \in D$, la matriz $g(x)$ es simétrica (o Hermitiana), y además es *definida positiva*, puesto que $E(x) = \|\varphi_u\|^2 > 0$ y

$$\det(g(x)) = EG - F^2 = \|\varphi_u(x) \times \varphi_v(x)\|^2 > 0$$

(Observación 4.3.2). Esto motiva la definición que sigue:

Definición 7.1.1. Dado $D \subset \mathbb{R}^d$, sea $g : D \rightarrow M_d(\mathbb{R})$ una función de clase C^1 tal que para todo $x \in D$, la matriz $g(x)$ es definida positiva. Decimos que g es una *métrica Riemanniana* en D .

Lo que estamos haciendo es cambiar el punto de vista. En lugar de tener una superficie parametrizada $S \subset \mathbb{R}^3$ y usar la primera forma fundamental para estudiar la geometría de S , estamos dándole al abierto $D \subset \mathbb{R}^2$ una estructura geométrica, copiando la que tiene cuando hay una parametrización. Nos olvidamos de φ y de $S = \varphi(D)$, y nos concentramos en el par (D, g) , al cual denominamos *variedad Riemanniana*.

Observación 7.1.2. Como para cada x , la matriz $g(x)$ es definida positiva, existe un cambio de base ortogonal $U = U(x)$ que lo diagonaliza, esto es $g(x) = U(x)D(x)U(x)^*$ con $U^* = U^{-1}$, y la matriz $D(x)$ es diagonal, y como contiene a los autovalores $d_i(x)$, debe ser $d_i(x) > 0$. Consideramos la matriz \sqrt{D} dada por la raíz cuadrada de D -dada por tomar en la diagonal la raíz de los d_i -, y la raíz cuadrada de g , dada por $\sqrt{g} = U\sqrt{D}U^*$ o más precisamente

$$\sqrt{g}(x) = U(x) \begin{pmatrix} \sqrt{d_1(x)} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \sqrt{d_d(x)} \end{pmatrix} U^*(x).$$

Notamos que $\sqrt{g}^2 = U\sqrt{D}U^{-1}U\sqrt{D}U^* = UDU^* = g$, lo que justifica plenamente el nombre. Notamos también que \sqrt{g} es también, en cada x , una matriz $d \times d$ definida positiva.

Es usual también usar índices para denotar la métrica. Como $g(x)$ es una matriz de $d \times d$ simétrica, se suele usar $(g_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$ para denotarla, muchas veces omitiendo el punto $x = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ donde está evaluada.

Notar que en el caso de una métrica en $D \subset \mathbb{R}^2$ que viene de una parametrización de una superficie, se tiene $g_{11} = E, g_{12} = g_{21} = F, g_{22} = G$.

Definición 7.1.3 (Integrales y longitud de curvas). Para una función $F : D \rightarrow \mathbb{R}$, definimos su integral en (D, g) como

$$\iint_D F = \iint_D F(u, v) \sqrt{\det(g_{ij}(u, v))} du dv = \iint_D F \sqrt{\det g},$$

puesto que en el caso de superficies teníamos $\det(g(u, v)) = EG - F^2 = \|\varphi_u \times \varphi_v\|^2$, el cuadrado del elemento de superficie.

Si $\alpha : I \rightarrow D$ es una curva, definimos su *longitud* en (D, g) como

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \langle (g \circ \alpha) \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_a^b \|\dot{\alpha} \sqrt{g \circ \alpha}\| = \int_a^b \|\dot{\alpha} \sqrt{g_{ij}}\|,$$

también imitando lo que ocurre cuando tenemos una superficie parametrizada, ya que si $\gamma = \varphi \circ \beta \subset S$ es una curva, su longitud es $\int \|\dot{\gamma}\|$, pero $\dot{\gamma} = D\varphi_\beta \dot{\beta}$ y entonces por (7.1), tenemos

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = \langle \mathbf{I}_\beta \dot{\beta}, \dot{\beta} \rangle = \langle g(\beta) \dot{\beta}, \dot{\beta} \rangle.$$

Con la misma prueba que en el Capítulo 1, la longitud recién definida es invariante por reparametrizaciones de α .

Observamos que lo que estamos haciendo es pensar, para cada $x \in D$ al espacio afín \mathbb{R}^d con origen x , como una copia de \mathbb{R}^d pero con un producto interno especial (que cambia con x), dado por la métrica g y el producto interno usual de \mathbb{R}^d :

$$\langle v, w \rangle_x = \langle g(x)v, w \rangle. \quad (7.2)$$

Así, distinguimos los espacios tangentes $T_x D = (\mathbb{R}^d, \langle \cdot, \cdot \rangle_x)$, $T_p D$, para $p \neq x \in D$, pues son espacios isomorfos pero no isométricos, ya que (salvo que $g(x) = Id_{d \times d}$) tienen distintos productos internos.

§ Recíprocamente, si elegimos de manera suave un producto interno para cada punto $p \in D$, entonces por el Teorema de Riesz de representación de formas bilineales, existirá una matriz positiva $g(p)$ para cada $p \in D$, tal que vale la identidad (7.2). Así que *elegir una métrica Riemanniana g en D es elegir un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ para cada $p \in D$* . En ocasiones, y en diferentes textos, esta ecuación se denota de las siguientes formas alternativas, según sea conveniente:

$$g(v, w) = \langle v, w \rangle_g = \langle gv, w \rangle.$$

Asimismo, la longitud de un vector $v \in T_x D = \mathbb{R}^d$ la denotaremos como

$$|v|_x = \sqrt{\langle v, v \rangle_x} = \sqrt{\langle g(x)v, v \rangle} = \|\sqrt{g}(x)v\|.$$

Observación 7.1.4. Como asumimos que $x \mapsto g(x)$ es suave, en particular es continua, y fijando un entorno *compacto* K de $p \in D$ (cerrado y acotado), deben existir constantes tales que

$$C_1 \|v\| \leq |v|_x \leq C_2 \|v\|$$

para todo $x \in K$. Luego la métrica Riemanniana siempre es equivalente a la usual, al menos localmente.

Una vez definida la longitud de curvas, es válido hacerse la pregunta de cómo definir la distancia entre $p, q \in D$. Para ello, usamos la noción intuitiva de que la distancia debe ser el camino más corto entre dos puntos. Entonces, una vez más copiando la definición para superficies (Sección 5.3), definimos

$$\text{dist}(p, q) = \inf\{L_a^b(\gamma) : \gamma \subset D, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}.$$

Como ya mencionamos, reparametrizando podemos suponer que $a = 0, b = 1$ para toda curva en D .

7.1.1. Campos y derivada covariante

Lo que queremos hacer ahora es dar alguna descripción analítica de las curvas minimales para la métrica. Es decir, queremos hallar el camino más corto entre dos puntos, para esta distancia inducida por la métrica $g : D \rightarrow M_d(\mathbb{R})$. Obtendremos así la *geometría Riemanniana* de la variedad Riemanniana (D, g) .

El primer punto es que ahora no tenemos la noción de proyección sobre el espacio tangente de $S \subset \mathbb{R}^3$, ya que todo ocurre en un abierto de \mathbb{R}^d . Veamos cómo generalizar entonces la noción de derivada de Levi-Civita de campos (o campos a lo largo de curvas) que consistía en derivar y proyectar sobre el tangente (Definición 5.1.2 y párrafos siguientes). Esto requerirá introducir cierta maquinaria ligada al álgebra lineal o multilineal.

Corchete de Lie y operaciones con campos

Las definiciones de campo X en D , flujo de un campo, campo a lo largo de una curva, si son idénticas a las ya dadas (Sección 4.2.1), y denotamos $\mathfrak{X}(D)$ a los campos de clase C^1 en D (que ahora son simplemente funciones $X : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ de clase C^1). Denotamos $C^k(D)$ a las funciones $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k . Recordemos que denotamos $Y(f)(p) = Df_p(Y_p)$ para $p \in D$, y definimos el *corchete de Lie de dos campos*, como el nuevo campo en D dado por

$$[X, Y]_p = DX_p(Y_p) - DY_p(X_p) \quad \forall p \in D.$$

Lema 7.1.5 (Difeomorfismos y campos f -relacionados). *Si $f : D \rightarrow M$ es un difeomorfismo, todo campo de M se obtiene como un campo f -relacionado de D de la siguiente forma: sea X campo en D , entonces*

$$f_*X(f(p)) = Df_p(X_p)$$

*es un campo en M y todo campo en M es de esta forma. Además, para toda función suave $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene $g(f_*X) = f_*(g \circ f^{-1}X)$, y si f es C^2 ,*

$$f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y].$$

para todo par de campos X, Y en D .

Demostración. Que la expresión f_*X define un campo en M es evidente, y por otro lado si Z es un campo en M entonces tomando $X(p) = Df_p^{-1}X(f^{-1}(p))$ obtenemos un campo en X , que verifica $f_*X = Z$. Ahora supongamos que $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ es suave y calculamos $f_*(hX)(f(p)) = Df_p(h(p)X_p) = h(p)Df_p(X_p)$ luego $f_*(hX) = (h \circ f)f_*X$ de donde se deduce la identidad para funciones reales. Por último, notamos que ϕ es el flujo de X si y sólo si $f \circ \phi$ es el flujo de f_*X ya que $\frac{d}{dt}(f \circ \phi) = Df_\phi \dot{\phi} = Df_\phi X_\phi = f_*X(f \circ \phi)$. Entonces

$$\begin{aligned} D(f_*Y)_{f(p)}(f_*X(f(p))) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_*Y(\phi^{f_*X}(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_*Y(f \circ \phi^X(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Df_{\phi^X(t)}(Y_{\phi^X(t)}) = D^2f_p(X_p, Y_p) + Df_p(DY_p(X_p)). \end{aligned}$$

Con el mismo argumento,

$$D(f_*X)_{f(p)}(f_*Y(f(p))) = D^2f_p(Y_p, X_p) + Df_p(DX_p(Y_p)).$$

Si f es C^2 , los términos que involucran D^2f son idénticos, luego

$$\begin{aligned} [f_*X, f_*Y](f(p)) &= D(f_*Y)_{f(p)}(f_*X(f(p))) - D(f_*X)_{f(p)}(f_*Y(f(p))) \\ &= Df_p(DY_p(X_p)) - Df_p(DX_p(Y_p)) \\ &= Df_p([X, Y](p)) = f_*[X, Y](f(p)). \quad \square \end{aligned}$$

El lector reconocerá, en las propiedades enunciadas a continuación y cuya demostración queda como ejercicio, aquellas propiedades que tenía la derivada covariante en superficies $S \subset \mathbb{R}^3$ (Problema 5.1.2):

Teorema 7.1.6 (Derivada de Levi-Civita). *Dada una variedad Riemanniana (D, g) , existe una única función \mathbb{R} -bilineal $\nabla : \mathfrak{X}(D) \times \mathfrak{X}(D) \rightarrow \mathfrak{X}(D)$ que llamaremos derivada métrica o derivada de Levi-Civita, que verifica las siguientes condiciones. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(D)$, $f \in C^1(D)$, entonces denotando $\nabla_Y X = \nabla(X, Y)$,*

1. $\nabla_{fY} X = f\nabla_Y X$ (f -lineal en la dirección Y)
2. $\nabla_Y(fX) = Y(f)X + f\nabla_Y X$ (derivación en la dirección X)
3. $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$ (torsión nula)
4. $Z(\langle X, Y \rangle_g) = \langle \nabla_Z X, Y \rangle_g + \langle X, \nabla_Z Y \rangle_g$ (compatibilidad con la métrica). Debe entenderse de acuerdo a (7.2) como

$$D(\langle gX, Y \rangle)_p(Z_p) = \langle g(p)(\nabla_Z X)_p, Y_p \rangle + \langle g(p)X_p, (\nabla_Z Y)_p \rangle \quad \forall p \in D.$$

Observación 7.1.7 (Campos a lo largo de curvas y derivada covariante). Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto y $\gamma : I \rightarrow D$ es regular, un *campo a lo largo de γ* es simplemente una curva $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^d$. Si μ es de clase C^1 , podemos extender μ a un campo C^1 en un entorno tubular $U \subset D$ que contiene a la traza de γ de la siguiente forma: (nos limitamos a describir aquí el caso $d = 2$) Para cada $t \in I$, escribimos $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ y consideramos $n(t) = (y'(t), -x'(t)) / \|\gamma'(t)\|^{-1}$ el vector normal unitario de γ . Entonces

$$X(\gamma(t) + sn(t)) = \mu(t) + sn(t)$$

para $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, extiende μ a un entorno de γ como dijimos. Similarmente,

$$Y(\gamma(t) + sn(t)) = \dot{\gamma}(t) + sn(t)$$

extiende el campo de velocidades de γ . Notemos que tomando $s = 0$, y por la independencia lineal de $\dot{\gamma}, n$, se tiene $Y(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$ luego γ es el flujo del campo Y .

La *derivada covariante* de μ a lo largo de γ , está dada por pensar en γ como el flujo de su propio campo de velocidades, y aplicar la derivada covariante a las extensiones, esto es

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \mu(t) = \nabla_Y X(\gamma(t)).$$

Observación 7.1.8 (Unicidad de la derivada de Levi-Civita). Veamos por qué la derivada métrica es única. Para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(D)$, usamos que ∇ es compatible con la métrica y escribimos de manera cíclica

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\ Y\langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\ Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \end{aligned}$$

Sumamos las dos primeras y restamos la tercera, y usando que ∇ no tiene torsión, obtenemos

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle.$$

Ahora bien en la expresión de la derecha de la igualdad, interviene sólo la métrica y el corchete de Lie. Esto dice que si $\tilde{\nabla}$ es otra derivada covariante que cumple las condiciones, debe ser

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle$$

para todo X, Y, Z ; de aquí es inmediato que $\tilde{\nabla} = \nabla$.

§ Lo que sigue de esta sección es un tanto técnico y puede saltarse; en general uno obtiene la derivada métrica de manera más directa a partir del ejemplo en particular que se quiere estudiar. Entonces la prueba de que existe ∇ puede omitirse y pasar directamente al Corolario 7.1.15 o la Sección 7.2.

Definición 7.1.9. Como $g(p)$ es una matriz 2 simétrica, y las matrices simétricas forman un \mathbb{R} -espacio vectorial, entonces para todo $p \in D$, $v \in \mathbb{R}^d$, la derivada direccional

$$Dg_p(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} g(p + tz) - g(p)$$

también es una matriz simétrica $d \times d$. La diferencial de la métrica Dg_p es entonces una aplicación lineal $\mathbb{R}^d \rightarrow M_d(\mathbb{R})_{sim}$ conocida como *derivada de g* , que tiene la propiedad de simetría

$$\langle Dg_p(z)v, w \rangle = \langle v, Dg_p(z)w \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^d. \quad (7.3)$$

Definimos la función auxiliar $f_p : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_p(v, w)z = \langle Dg_p(g(p)^{-1}z)v, w \rangle. \quad (7.4)$$

Notamos que para $p \in D$ fijo, la función f_p es lineal en cada variable v, w, z por separado, es decir es *trilineal*. En particular para cada par $(v, w) \in \mathbb{R}^d$ fijo, obtenemos una funcional lineal de $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, luego está representada por un único vector $L_p(v, w) \in \mathbb{R}^d$, de manera tal que

$$\langle L_p(v, w), z \rangle = f_p(v, w)z = \langle Dg_p(g(p)^{-1}z)v, w \rangle. \quad (7.5)$$

Es inmediato que la asignación $L_p : (v, w) \mapsto L_p(v, w) \in \mathbb{R}^d$ es bilineal y simétrica, ya que $Dg_p(g(p)^{-1}z)$ es una matriz simétrica para todo $p \in D$, $z \in \mathbb{R}^d$ por (7.3). Esto es, mediante (7.5) hemos definido una transformación bilineal $L_p : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ que es simétrica-

Demostración. (del Teorema 7.1.6 de existencia de la derivada métrica). La última condición requerida en el enunciado del teorema, da la clave de cómo definir la derivada covariante ∇ , y también la unicidad de la misma. Definimos ∇ usando la derivada direccional de X en la dirección de Y , la transformación bilineal L obtenida en (7.5) y la derivada Dg :

$$(\nabla_Y X)_p = DX_p(Y_p) + \frac{1}{2} \left\{ -L_p(X_p, Y_p) + g(p)^{-1} Dg_p(X_p)Y_p + g(p)^{-1} Dg_p(Y_p)X_p \right\}. \quad (7.6)$$

O bien, un poco más legiblemente,

$$2g(p)(\nabla_Y X)_p = 2g(p)DX_p(Y_p) - g(p)L_p(X_p, Y_p) + Dg_p(X_p)Y_p + Dg_p(Y_p)X_p.$$

Es inmediato que ∇ es \mathbb{R} bilineal y f lineal en la variable Y , veamos que es una derivación: si cambiamos X por $Z = fX$, se tiene $DZ_p(Y_p) = Df_p(Y_p)X_p + f(p)DX_p(Y_p)$ por la regla de derivación del producto. El resto de los términos saca $f(p)$ linealmente. Entonces tenemos

$$\nabla_Y(fX)(p) = Y(f)(p)X_p + f(p)(\nabla_Y X)_p$$

que es lo que queríamos probar.

Veamos ahora la propiedad de la torsión nula: de la definición es evidente que

$$2g(p)(\nabla_X Y)_p - 2g(p)(\nabla_Y X)_p = 2g(p)DX_p(Y_p) - 2g(p)DY_p(X_p) = 2g(p)[X, Y](p).$$

Veamos por último que la derivada covariante es compatible con la métrica: reescribimos el lado izquierdo, usando la regla de diferenciación de un (triple) producto y la simetría de $g(p)$:

$$D(\langle gX, Y \rangle)_p(Z_p) = \langle Dg_p(Z_p)X_p, Y_p \rangle + \langle g(p)DX_p(Z_p), Y_p \rangle + \langle g(p)DY_p(Z_p), X_p \rangle. \quad (7.7)$$

Por otro lado, $\langle g(p)(\nabla_Z X)_p, Y_p \rangle$ es igual a

$$\begin{aligned} & \left\langle \left\{ g(p)DX_p(Z_p) - \frac{1}{2}g(p)L_p(X_p, Z_p) + \frac{1}{2}Dg_p(X_p)Z_p + \frac{1}{2}Dg_p(Z_p)X_p \right\}, Y_p \right\rangle \\ &= \langle g(p)DX_p(Z_p), Y_p \rangle - \frac{1}{2}\langle g(p)L_p(X_p, Z_p), Y_p \rangle \\ & \quad + \frac{1}{2}\langle g(p)L_p(Z_p, Y_p), X_p \rangle + \frac{1}{2}\langle Dg_p(Z_p)X_p, Y_p \rangle, \end{aligned}$$

y similarmente $\langle g(p)(\nabla_Z Y)_p, X_p \rangle$ es igual a

$$\begin{aligned} & \langle g(p)DY_p(Z_p), X_p \rangle - \frac{1}{2}\langle g(p)L_p(Y_p, Z_p), X_p \rangle \\ & \quad + \frac{1}{2}\langle g(p)L_p(Z_p, X_p), Y_p \rangle + \frac{1}{2}\langle Dg_p(Z_p)Y_p, X_p \rangle. \end{aligned}$$

Sumando estos dos términos, recordando que $L(X_p, Y_p) = L(Y_p, X_p)$ y que también $Dg_p(Z_p)$ es una matriz simétrica, obtenemos (7.7). \square

Observación 7.1.10 (El operador bilineal y el operador cuadrático de la conexión). Observamos en la ecuación 7.6 que define la derivada de Levi-Civita en (D, g) , que el primer término $DX_p Y_p$ depende tanto de los valores de X, Y en $p \in D$ como de los valores de X en un entorno de p ; lo mismo es entonces cierto para la derivada covariante. Sin embargo, la expresión que sigue entre llaves, antecedida por el factor $1/2$, sólo depende de los valores de X, Y en el punto p . Este es el *operador bilineal* asociado a la métrica, $\Gamma_p : T_p D \times T_p D \rightarrow T_p D$ dado por

$$2\Gamma_p(v, w) = -L_p(v, w) + g(p)^{-1} Dg_p(v)w + g(p)^{-1} Dg_p(w)v, \quad (7.8)$$

luego

$$(\nabla_Y X)_p = DX_p(Y_p) + \Gamma_p(X_p, Y_p), \quad (7.9)$$

y entonces Γ determina completamente la conexión.

Notemos también que a partir de la definición de L_p , si tenemos un operador cuadrático que depende suavemente de p , $F_p : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ de manera tal que, para el producto interno usual de \mathbb{R}^d y la métrica riemanniana g se verifica

$$\langle F_p(v), g(p)z \rangle = \langle Dg_p(v)v, z \rangle - \frac{1}{2} \langle Dg_p(z)v, v \rangle \quad (7.10)$$

para todo $v, z \in \mathbb{R}^d$, entonces polarizando F_p obtenemos que verifica la ecuación (7.8) y por ende

$$\Gamma_p(v, w) = \frac{1}{2} (F_p(v+w) - F_p(v) - F_p(w))$$

debe ser el operador bilineal de la conexión de Levi-Civita de la métrica.

Definición 7.1.11 (Derivada a lo largo de curvas). Volviendo a la Observación 7.1.7, si $\mu : I \rightarrow D$ es un campo de clase C^1 a lo largo de la curva $\gamma : I \rightarrow D$, entonces notamos que debe ser

$$(\nabla_{\dot{\gamma}} \mu)(t) = \dot{\mu}(t) + \Gamma_{\gamma(t)}(\mu(t), \dot{\gamma}(t))$$

para cada $t \in I$, ya que, como γ es el flujo del campo engordado Y de aquella observación, entonces $(X \circ \gamma)(t) = \mu(t)$, luego $\dot{\mu}(t) = DX_{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t) = DX_{\gamma(t)}(Y_{\gamma(t)})$. Resumiendo, definimos

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\mu = \dot{\mu} + \Gamma_{\gamma}(\mu, \dot{\gamma}) \quad (7.11)$$

§ Cuando no hay posibilidad de confusión, y la curva γ a lo largo de la cual vamos a derivar está prescripta, es usual denotar

$$D_t\mu = \nabla_{\dot{\gamma}}\mu = \dot{\mu} + \Gamma(\mu, \dot{\gamma})$$

a la derivada covariante del campo μ a lo largo de γ .

Problema 7.1.12. Invitamos al lector probar que si, para cada $p \in D$, damos Γ_p cualquier operador bilineal simétrico, que depende suavemente de p , y usamos la fórmula (7.9) para definir ∇ , será una derivada covariante, en el sentido de que cumple las tres primeras propiedades de la derivada de Levi-Civita. Lo que hace especial a esta Γ particular que dimos en (7.8), es que hace a ∇ compatible con la métrica.

En general, y por la definición de L_p , se tiene

$$2\langle g(p)\Gamma_p(v, w), z \rangle = \langle -Dg_p(z)v, w \rangle + \langle Dg_p(v)w, z \rangle + \langle Dg_p(w)v, z \rangle \quad (7.12)$$

para todo $v, w, z \in \mathbb{R}^d = T_pD$.

Observación 7.1.13. En el caso de una métrica que proviene de una superficie parametrizada $S \subset \mathbb{R}^3$, si N es la normal del espacio tangente, hacemos notar al lector que $2\Gamma(v, w)$ no es otra cosa que $\langle DNv, w \rangle N$, más precisamente

$$2\Gamma_p(v, w) = \langle DN_p v, w \rangle N_p$$

(debido a la ecuación (5.6)).

Observación 7.1.14. Si $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^d , entonces en la notación clásica (la que utilizan algunos libros de geometría Riemanniana, y sobre todo, la que utilizan los físicos), estos objetos en general se expresan en coordenadas de esta base. Veamos aquí algunos de los más relevantes. Es importante observar que en todos los casos, el punto $p \in D$ donde están calculados se omite -aunque hay que tener claro que dependen del punto-.

- Dado un vector $v \in \mathbb{R}^d$, denotamos $(v)_k$ a la coordenada k -ésima de v ,

$$(v)_k = \langle v, e_k \rangle$$

- Dada una matriz A denotamos $(A)_{ij}$ al lugar ij de la matriz (columna i , fila j),

$$(A)_{ij} = \langle Ae_i, e_j \rangle$$

1. El *tensor métrico* es g_{ij} : como $g(p)$ es una matriz $d \times d$, se denota,

$$g_{ij} = \langle g(p)e_i, e_j \rangle$$

y para la matriz inversa $g(p)^{-1}$ se suben los índices

$$g^{ij} = \langle g(p)^{-1}e_i, e_j \rangle.$$

Notamos que como ambas matrices son simétricas, hay simetría en los índices: $g_{ij} = g_{ji}$, $g^{ij} = g^{ji}$.

2. Las derivadas de la métrica: como $Dg_p(v)$ es una matriz $d \times d$ simétrica para cada $v \in \mathbb{R}^d$, se denotan sus entradas

$$g_{ij,k} = \langle Dg_p(e_k)e_i, e_j \rangle$$

Notemos también que si derivamos el lugar ij de la matriz $g(p)$ en la dirección e_k obtenemos -por la regla de la cadena- el mismo número, es decir

$$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}.$$

3. Los *símbolos de Christoffel de primera clase* Γ_{ijk} : como el operador Γ definido arriba devuelve un vector para cada par de vectores, se define $\Gamma_{ijk} = (g\Gamma(e_i, e_j))_k$, es decir

$$\Gamma_{ijk} = \langle g(p)\Gamma_p(e_i, e_j), e_k \rangle$$

Observamos que como Γ es simétrico, entonces Γ_{ijk} es simétrico respecto de los dos primeros índices.

4. Los símbolos de Christoffel de segunda clase Γ_{ij}^l : devuelven las entradas del vector $(\Gamma_p(e_i, e_j))_l$ sin el tensor métrico, es decir

$$\Gamma_{ij}^l = \langle \Gamma_p(e_i, e_j), e_l \rangle.$$

También es simétrico en los índices inferiores por la simetría de Γ .

5. Como además estos están relacionados -uno se obtiene multiplicando al otro por $g(p)^{-1}$ -, se tiene

$$\Gamma_{ij}^l = \sum_k (g(p)^{-1})_{lk} (\Gamma_p(e_i, e_j))_k = \sum_k g^{lk} \Gamma_{ijk},$$

y similarmente

$$\Gamma_{ijk} = \sum_l g_{kl} \Gamma_{ij}^l.$$

6. La convención de suma: permite omitir las sumas en estas operaciones entre matrices y vectores, las sumas se deducen del contexto. Así por ejemplo las relaciones entre coeficientes de Christoffel de ambas clases recién mencionadas, se escriben

$$\Gamma_{ij}^l = g^{lk} \Gamma_{ijk}, \quad \Gamma_{ijk} = g_{kl} \Gamma_{ij}^l.$$

Como hay simetría en muchos índices (de Γ y g), pueden reescribirse de varias maneras.

7. La relación entre g y Γ dada por la ecuación (7.12), se reescribe entonces como

$$\Gamma_{ijk} = 1/2 \{-g_{ij,k} + g_{jk,i} + g_{ik,j}\},$$

expresión que a veces se utiliza para definir los coeficientes Γ de primera clase.

8. Como ∇ es f -lineal en la dirección de derivación $\nabla_{fY}X = f\nabla YX$, basta definir $\nabla_{e_i}X$ para cada i, X . Esto se puede hacer mediante la fórmula (7.9):

$$(\nabla_{e_i}X)_p = DX_p(e_i) + \Gamma_p(X_p, e_i).$$

Pero entonces, escribiendo $X = \sum X_k e_k$, con $X_k : D \rightarrow \mathbb{R}$, tenemos

$$(\nabla_i X)_l = \frac{\partial X_l}{\partial x_i} + \sum_k X_k (\Gamma(e_k, e_i))_l,$$

con lo cual, usando las definiciones y la convención de suma, obtenemos la fórmula clásica de la derivada covariante en término de los coeficientes de Christoffel de segunda clase:

$$(\nabla_i X)_l = \frac{\partial X_l}{\partial x_i} + X_k \Gamma_{ki}^l.$$

Resumimos todas estas observaciones en el siguiente corolario:

Corolario 7.1.15. Sea g_{ij} es una métrica Riemanniana de D , denotamos g^{ij} su inversa y $g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}$. Definimos los coeficientes de Christoffel de primera y segunda clase

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \{-g_{ij,k} + g_{jk,i} + g_{ki,j}\}, \quad \Gamma_{ij}^l = \sum_k g^{lk} \Gamma_{ijk}.$$

Entonces para un campo $X = \sum_k X_k e_k$ en D , la derivada de Levi-Civita $\nabla_i X$ de X en la dirección de e_i está dada por

$$(\nabla_i X)_j = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} + \sum_k X_k \Gamma_{ki}^j.$$

7.2. Geodésicas

Definimos las curvas *geodésicas* de (D, g) como las soluciones de la ecuación diferencial de Euler, $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$, que en el caso de superficies inmersas en el espacio Euclideo, correspondía a pedir que la aceleración fuera nula, vista desde

el espacio tangente. Por la ecuación (7.11), buscamos soluciones de la ecuación diferencial $\ddot{\gamma} = -\Gamma_\gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$. Llamando $\beta = \dot{\gamma}$, podemos nuevamente escribir esto como el sistema de primer orden

$$\begin{cases} \dot{\beta} &= -\Gamma_\gamma(\beta, \beta) \\ \dot{\gamma} &= \beta \end{cases}.$$

El problema tiene única solución dadas las condiciones iniciales $p \in D$, $v \in T_p D = \mathbb{R}^d$, solución que denotaremos $\gamma_{p,v} : I_{p,v} \rightarrow D$, con $0 \in I_{p,v} \subset \mathbb{R}$ el intervalo abierto maximal definición de γ . Para los detalles, ver la Observación 5.1.7.

Definición 7.2.1 (Exponencial Riemanniana). Si $t = 1 \in I_{p,v}$, definimos $\exp_p(v) = \gamma_{p,v}(1)$ la función exponencial en p , y denotamos $Dom(\exp_p) \subset T_p D = \mathbb{R}^d$ el dominio exponencial.

Como para $v = 0$ la solución constante $\gamma = p$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos $0 \in (D \exp_p)$ para todo $p \in D$ y $\exp_p(0) = p$.

Como las soluciones dependen de manera suave de las condiciones iniciales, el conjunto $Dom(\exp_p)$ es un abierto que contiene al vector nulo, y la función $\exp_p : Dom(\exp_p) \subset T_p D \rightarrow D$ es suave.

Denotamos $TD = D \times \mathbb{R}^d$ y lo llamamos *fibrado tangente de D* , decimos que $\mathbf{0} = \{(p, 0) : p \in D\} \subset TD$ es el cero del fibrado. Denotamos $Dom(\exp)$ al conjunto de los v tales que $v \in Dom(\exp_p)$ para todo $p \in D$, y definimos $\exp(p, v) = \exp_p(v)$ la función exponencial global de TD . El cero del fibrado está en el dominio y $\exp(p, 0) = p$ para todo $p \in D$, nuevamente por la dependencia suave de las condiciones iniciales, $Dom(\exp)$ tiene que ser un abierto que contiene al cero del fibrado, y además $\exp : Dom(\exp) \subset TD \rightarrow D$ es suave.

El lector puede notar que el Teorema 5.1.10 es un caso particular del siguiente teorema:

Teorema 7.2.2. Si \exp es la exponencial Riemanniana de (D, g) , entonces

1. Las geodésicas tienen velocidad constante: $|\dot{\gamma}_{p,v}(t)|_{\gamma(t)} = cte$.
2. $(p, tv) \in Dom(\exp)$ si y sólo si $t \in I_{p,v} = Dom(\gamma_{p,v})$ y además

$$\gamma_{p,v}(t) = \exp_p(tv) = \exp(p, tv).$$

3. $|D(\exp_p)_v v|_{\exp_p(v)} = |v|_p$ para todo $p \in D$, $v \in \mathbb{R}^d$.

4. Para cada $p \in D$ existe $r = r(p) > 0$ tal que si $B_r = \{v \in T_p D = \mathbb{R}^d : |v|_p < r\}$, entonces $\exp_p : B_r \rightarrow V_r$ es un difeomorfismo, donde $V_r = \exp_p(B_r)$.
5. Existe $\mathbf{0} \in B \subset \text{Dom}(\exp)$ abierto, entorno del cero del fibrado, tal que $E : V \rightarrow D \times D$ dada por $E(p, v) = (p, \exp(p, v))$ es un difeomorfismo con su imagen, que es un entorno de la diagonal en $D \times D$.

Demostración. La prueba del primer punto se debe a la compatibilidad de la derivada con la métrica:

$$\frac{d}{dt} |\dot{\gamma}(t)|_{\gamma(t)}^2 = 2 \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle_{\gamma(t)} = 0$$

pues γ es geodésica. Para probar el segundo punto, observamos que $\gamma_{p,tv}(s)$ y $\gamma_{p,v}(ts)$ son ambas soluciones de la misma ecuación de Euler y cumplen las mismas condiciones iniciales, así que tienen que ser la misma curva. Evaluando en $s = 1$ deducimos que

$$\exp(p, tv) = \exp_p(tv) = \gamma_{p,tv}(1) = \gamma_{p,v}(t).$$

Eso prueba el segundo punto. Combinando los dos primeros, evaluando en $t = 1$, se obtiene el tercer punto. Derivando la identidad recién probada en $t = 0$, obtenemos

$$D(\exp_p)_0(v) = \dot{\gamma}_{p,v}(0) = v,$$

luego $D(\exp_p)_0 = id_{\mathbb{R}^d}$ así que \exp_p es un isomorfismo local por el teorema de la función inversa. Achicando el dominio, podemos suponer que es una bola en la métrica Riemanniana (Observación 7.1.4), lo que prueba el cuarto punto.

Ahora consideramos $E(p, v) = (p, \exp_p(v))$, su diferencial en cualquier $(p, 0) \in \mathbf{0}$ se calcula como la matriz

$$DE_{(p,0)} = \begin{pmatrix} Id_{T_p D} & 0 \\ * & D(\exp_p)_0 \end{pmatrix} = DE_{(p,0)} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ * & Id \end{pmatrix}.$$

Esto nos dice que es una transformación lineal inversible, así que una vez más por el teorema de la función inversa (y como $E(p, 0) = (p, p)$), E tiene que ser un difeomorfismo local entre un entorno de $\mathbf{0} \in TD$ y un entorno de la diagonal en $D \times D$. \square

Corolario 7.2.3 (Entornos uniformemente normales). *Para todo $p \in D$ existe un entorno W de p y $\delta > 0$ tales que*

1. para todo $q \in W$ la exponencial \exp_q está definida en (al menos) $B_\delta(0_q)$, y $W \subset B_\delta(q)$ para todo $q \in W$.
2. si $q_1, q_2 \in W$, existe una única geodésica en W (parametrizada en $[0, 1]$) que los une.
3. $F : (t, q_1, q_2) \mapsto \gamma_{q_1, q_2}(t)$, visto como función $(-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \times W \times W \rightarrow W$, es de clase C^1 .

Demostración. Tomamos W entorno de p tal que $W \times W \subset V$, donde $V \subset D \times D$ es como en el último item del teorema previo. El resto de la demostración sigue las líneas del resultado para superficies (Ejercicio 5.5.27). \square

7.2.1. Fórmula de la primer variación

Dada $\alpha : [a, b] \rightarrow D$ una curva dos veces derivable, una *variación de α* es una función $\nu : J \times [a, b] \rightarrow D$ dos veces diferenciable con $0 \in J \subset \mathbb{R}$, de manera que $\nu(0, t) = \alpha(t)$ para todo $t \in [a, b]$.

Es usual denotar $\alpha_s(t) = \nu(s, t)$ para pensar en la familia de curvas $\{\alpha_s\}_{s \in J}$ definidas en $[a, b]$ con $\alpha_0 = \alpha$. Si α_s son geodésicas para todo $s \in J$, diremos que ν es una *variación por geodésicas*. Si $\alpha_s(a) = \alpha(a)$ y $\alpha_s(b) = \alpha(b)$ para todo $s \in J$, diremos que ν es una *variación de extremos fijos*.

Con una demostración similar al caso de las superficies $M \subset \mathbb{R}^3$, obtenemos una fórmula de la primer variación:

Teorema 7.2.4. *Sea (D, g) Riemanniana, $\alpha : [0, 1] \rightarrow D$ regular a trozos con rapidez constante, μ campo a lo largo de α , regular a trozos. Tomemos la variación de α dada por la colección de geodésicas*

$$\nu(s, t) = \gamma_{\alpha(t), \mu(t)}(s) = \exp_{\alpha(t)}(s\mu(t)).$$

Entonces

$$\begin{aligned} L(\alpha) \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\nu_s) &= - \int_0^1 \langle \nabla_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}, \mu \rangle dt + \sum_{i=1}^n \langle \mu(t_i), \dot{\alpha}(t_i^-) - \dot{\alpha}(t_i^+) \rangle \\ &\quad + \langle \mu(1), \dot{\alpha}(1^-) \rangle - \langle \mu(0), \dot{\alpha}(0^+) \rangle. \end{aligned}$$

Ver el Teorema 5.3.8, y los Ejercicios 5.3.15, 5.3.15 para las demostraciones. Como corolario, se deduce una caracterización de curvas minimales de la funcional longitud.

Corolario 7.2.5. Sea (D, g) Riemanniana, $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$. Probar que

1. Si γ es geodésica, entonces es punto crítico de L para toda variación propia.
2. Si γ es C^2 y punto crítico de L (en particular minimal), entonces es geodésica.
3. Si γ es regular a trozos y punto crítico de L (en particular minimal), entonces γ es una reparametrización de una geodésica, en particular es suave en $[0, 1]$.

7.3. Transporte paralelo e isometrías

Definición 7.3.1 (Campos paralelos). Diremos que el campo μ a lo largo de la curva $\gamma \subset D$ es *paralelo* si $\nabla_{\dot{\gamma}}\mu = 0$, y denotaremos con $Par(\gamma)$ al conjunto de los campos paralelos a lo largo de γ . Invitamos al lector a probar que se trata de un espacio vectorial.

En el siguiente teorema, damos la definición del *transporte paralelo* en la variedad Riemanniana D . Sea $\alpha : J \rightarrow D$ de clase C^1 .

Teorema 7.3.2 (Transporte paralelo). Sea $a \in J$. Dado $v \in T_{\alpha(a)}M$ existe una única $\beta_v \in Par(\alpha)$ tal que $\mu_v(a) = v$. Si $b \in J$ y $P = P_a^b(\alpha) : T_{\alpha(a)}M \rightarrow T_{\alpha(b)}M$ denota la aplicación $v \mapsto \mu_v(b)$, entonces P es un isomorfismo isométrico, que denominamos transporte paralelo a lo largo de α . Además, para todo $c \in J$, $P_c^b \circ P_a^c = P_a^b$.

Demostración. Consideramos la ecuación del transporte paralelo, dada por $\nabla_{\dot{\gamma}}\mu = 0$ o equivalentemente $\dot{\mu} = -\Gamma_{\alpha}(\dot{\alpha}, \mu)$. Como Γ_{α} es bilineal, es esencialmente una ecuación del tipo $\dot{\mu}(t) = A(t)\mu(t)$ con el operador

$$A(t) = -\Gamma_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t), \cdot)$$

lineal para cada $t \in J$ fijo. Por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones ordinarias, la curva solución μ_v con $\mu_v(a) = v$ es única y nos da la curva β_v requerida, que está definida en todo J porque la ecuación es lineal, con lo cual es globalmente Lipschitz. Considerando que el flujo de la ecuación diferencial está definido en J , entonces $P_a^b = P_c^b \circ P_a^c$ para todo $a, b, c \in J$ por propiedades generales del flujo. En particular, la aplicación $P_a^b(\alpha)$ es biyectiva entre los tangentes porque tiene una inversa que se construye de manera análoga (intercambiando a con b). Las relaciones

$$P(\lambda v) = \lambda P(v), \quad P(v + w) = P(v) + P(w)$$

se deducen de la unicidad de la solución reemplazando en la ecuación diferencial lineal. Por último, que P es una isometría se deduce de la compatibilidad de la derivada de Levi-Civita con la métrica:

$$\frac{d}{dt}|P_a^t v|_{\alpha(t)}^2 = 2\langle \mu_v(t), \nabla_{\dot{\gamma}} \mu_v(t) \rangle_{\alpha(t)} = 0,$$

luego esta norma es constante a lo largo de α , y en particular

$$|P_a^b v|_{\alpha(b)} = |P_a^a v|_{\alpha(a)} = |\mu_v(a)|_{\alpha} = |v|_{\alpha(a)}.$$

□

Observación 7.3.3. Si $\alpha(t) = \exp_p(tv)$, entonces es fácil ver que el transporte paralelo a lo largo de α del vector $v \in T_p D$ está dado sencillamente por

$$P_0^t(\alpha)(v) = \dot{\alpha}(t) = D(\exp_p)_{tv} v,$$

pues esta curva es paralela a lo largo de α por ser α geodésica, luego verifica la ecuación diferencial del transporte, con la condición inicial requerida.

Observación 7.3.4. Si X, Y son campos en D y usamos α para denotar el flujo de X , entonces el transporte paralelo a lo largo de α nos permite calcular de manera natural la derivada covariante, de la siguiente manera:

$$\nabla_X Y(p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} P_t^0(\alpha)(Y_{\alpha(t)})$$

donde $\alpha(0) = p \in D$. La verificación de esta fórmula queda a cargo del lector.

7.3.1. Isometrías

Si $(D, g), (M, \tilde{g})$ son dos variedades riemannianas de la misma dimensión, diremos que $f : D \rightarrow M$ es una *isometría local* si f es de clase C^1 y preserva las métricas, es decir que para todo $p \in M$,

$$|Df_p v|_{f(p)} = |v|_p \quad \forall v \in T_p D.$$

Notemos que en particular f es un difeomorfismo local por el teorema de la función inversa. Si además f es inyectiva diremos que f es una isometría (aunque a veces se pide que sea también biyectiva).

Polarizando la identidad de arriba, f es una isometría local si y sólo si para todo $p \in M$, $v, w \in T_p M$ se tiene

$$\langle \tilde{g}(f(p))Df_p v, Df_p w \rangle = \langle g(p)v, w \rangle.$$

Recordemos que dado X campo en D , y una función suave e inyectiva $f : D \rightarrow M$, el campo $f_* X$ en $F(M) \subset D$ se define como $f_* X(f(p)) = Df_p(X_p)$.

Teorema 7.3.5 (Invariancia de la conexión por isometrías). *Si $f : (D, g) \rightarrow (M, \tilde{g})$ es una isometría global, y $f_* X, f_* Y$ son campos en M , entonces las derivadas covariantes están f -relacionadas: para todo $p \in M$,*

$$\nabla_{f_* X}^M f_* Y(f(p)) = Df_p(\nabla_X^D Y(p)).$$

Demostración. A partir del Lema 7.1.5 está claro que todo par de campos en M es de la forma $f_* X, f_* Y$ para campos X, Y en D . También es claro que el operador

$$\nabla_{f_* X} f_* Y = Df(\nabla_X^D Y)$$

es \mathbb{R} -bilineal y h -lineal en la variable $f_* X$, para toda $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave. A partir del Lema 7.1.5, también podemos ver que es una derivación en la segunda variable, y no tiene torsión. Por último, para todo campo Z en D se tiene

$$f_* Z \langle f_* X, f_* Y \rangle(f(p)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle f_* X(\Phi(t)), f_* Y(\Phi(t)) \rangle_{\Phi(t)}$$

donde Φ es el flujo de $f_* Z$, que por el mismo lema, es $f \circ \phi$ con ϕ el flujo de Z . Luego

$$\begin{aligned} f_* Z \langle f_* X, f_* Y \rangle(f(p)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle f_* X(f \circ \phi(t)), f_* Y(f \circ \phi(t)) \rangle_{f \circ \Phi(t)} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle Df_{\phi(t)}(X_{\phi(t)}), Df_{\phi(t)}(Y_{\phi(t)}) \rangle_{f \circ \Phi(t)} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle X_{\phi(t)}, Y_{\phi(t)} \rangle_{\phi(t)} = Z \langle X, Y \rangle(p) \\ &= \langle \nabla_Z^D X(p), Y_p \rangle_p + \langle X_p, \nabla_Z^D Y(p) \rangle_p \\ &= \langle Df_p(\nabla_Z^D X(p)), Df_p(Y_p) \rangle_p + \langle Df_p(X_p), Df_p(\nabla_Z^D Y(p)) \rangle_{f(p)} \\ &= \langle \nabla_{f_* Z} f_* X(f(p)), f_* Y(f(p)) \rangle_{f(p)} \\ &\quad + \langle f_* X(f(p)), \nabla_{f_* Z} f_* Y(f(p)) \rangle_{f(p)} \\ &= \langle \nabla_{f_* Z} f_* X, f_* Y \rangle_{f(p)} + \langle f_* X, \nabla_{f_* Z} f_* Y \rangle_{f(p)}, \end{aligned}$$

lo que prueba que ∇ así definido en M es compatible con la métrica. Por la unicidad de la derivada de Levi-Civita, queda probado el teorema. \square

En particular el teorema nos dice que si γ es una curva en D y μ es un campo a lo largo de γ , entonces $Df_\gamma\mu$ es un campo a lo largo de $f \circ \gamma$ y

$$\nabla_{(f \circ \gamma)'}(Df_\gamma\mu) = \nabla_{Df_\gamma\gamma'}Df_\gamma\mu = Df_\gamma(\nabla_{\gamma'}\mu).$$

Corolario 7.3.6 (Invariancia del transporte paralelo por isometrías). Si $f : D \rightarrow M$ es una isometría riemanniana, transforma geodésicas de D en geodésicas de M . Además, si $\gamma \subset D$, $p = \gamma(a)$, y $\mu(t) = P(\gamma)_a^t v$ es el transporte paralelo de $v \in T_p D$ a lo largo de γ , entonces

$$\eta = Df_\gamma\mu$$

es el transporte paralelo de $Df_p v$ a lo largo de $f \circ \gamma$.

7.4. El tensor de curvatura y campos de Jacobi

Introducimos aquí el tensor de curvatura R de la variedad riemanniana (D, g) , junto con algunas nociones vinculadas, y estudiamos sus propiedades.

Sean $X, Y, Z : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ campos de clase C^2 . Si ∇ es la derivada de Levi-Civita de la métrica g , definimos el *tensor de curvatura*

$$\mathfrak{R}(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

donde $[X, Y] = \mathcal{L}_X Y$ denota la derivada de Lie de Y en la dirección de X . Observemos que la expresión $\mathfrak{R}(X, Y, Z)$ es un campo en D .

La *transformación de curvatura* $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ está dada por

$$R(X, Y)Z = \mathfrak{R}(X, Y, Z).$$

Se tiene, directamente de la definición:

- $R(X, Y) = -R(Y, X)$.
- $\mathfrak{R}(X, Y, Z) + \mathfrak{R}(Y, Z, X) + \mathfrak{R}(Z, X, Y) = 0$.

Esta última es conocida como *identidad algebraica de Bianchi*.

Un cálculo muy fastidioso que dejamos como ejercicio para el lector nos devuelve

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(X, Y, Z)(p) = & \Gamma_p(X_p, \Gamma_p(Y_p, Z_p)) - \Gamma_p(Y_p, \Gamma_p(X_p, Z_p)) \\ & + D\Gamma_p(X_p)(Y_p, Z_p) - D\Gamma_p(Y_p)(X_p, Z_p), \end{aligned}$$

donde los últimos términos involucran la derivada de la forma Γ respecto del punto base. Esta expresión nos dice que R sólo depende del valor de los campos en el punto p . Luego se puede pensar a \mathfrak{R} como una aplicación trilineal en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Es decir, dados $x, y, z \in T_p D$, definimos

$$\mathfrak{R}_p(x, y, z) = R_p(x, y)z = \Gamma_p(x, \Gamma_p(y, z)) - \Gamma_p(y, \Gamma_p(x, z)) + D\Gamma_p(x)(y, z) - D\Gamma_p(y)(x, z). \quad (7.13)$$

Aunque está dada en coordenadas locales, la definición intrínseca se puede dar tomando tres campos X, Y, Z en D tales que $X_p = x$, $Y_p = y$, $Z_p = z$ y entonces $\mathfrak{R}_p(x, y, z) = \mathfrak{R}(X, Y, Z)(p) \in T_p D$.

Lema 7.4.1. Sean $p \in D$, $x, y, z \in T_p D$. Entonces

1. $\langle R_p(x, y)z, z \rangle_g = 0$,
2. $\langle R_p(x, y)x, z \rangle_g = \langle R_p(x, z)x, y \rangle_g$.

Demostración. Para la primera identidad, probaremos que

$$\langle R(X, Y)Z, Z \rangle_g = 0$$

para toda terna de campos X, Y, Z en M , de donde se deduce la propiedad pues R sólo depende del valor de los campos en el punto p . A partir de la compatibilidad de la métrica con la derivada de Levi-Civita, se deduce que $X\langle Z, Z \rangle = 2\langle \nabla_X Z, Z \rangle$. Luego

$$Y(X\langle Z, Z \rangle) = 2\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle + 2\langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle.$$

Intercambiando X con Y y restando se deduce que

$$[Y, X]\langle Z, Z \rangle = 2\langle (\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y)Z, Z \rangle.$$

Pero usando nuevamente la compatibilidad con la métrica al lado izquierdo se deduce que

$$[Y, X]\langle Z, Z \rangle = 2\langle \nabla_{[Y, X]}Z, Z \rangle.$$

Comparando los lados derechos de las últimas ecuaciones, se tiene la propiedad al revisar la definición de R . Respecto de la segunda identidad, tiene una prueba análoga que omitimos. \square

Definición 7.4.2 (Tensor y curvatura de Ricci). Será útil también pensar, para $x, y \in T_p D$, en el operador lineal $R_p(x, y) \in \mathcal{B}(T_p D)$. También vamos a considerar la transformación lineal $A_p(y, z) : x \mapsto R_p(x, y)z$, cuya “traza” se conoce como *tensor de Ricci*, y se denota $Ric_p(y, z)$. Esto es

$$Ric_p(y, z) = \sum_i (A_p(y, z)e_i)_i = \sum_i (R_p(e_i, y)z)_i = \sum_i \langle R_p(e_i, y)z, e_i \rangle_p,$$

donde $\{e_1, \dots, e_d\}$ es una base ortonormal de $T_p D \simeq \mathbb{R}^d$ (con el producto interno de la métrica Riemanniana en p). Por las simetrías de R , se tiene $Ric_p(y, z) = Ric_p(z, y)$, y entonces está completamente determinado por los valores de la función

$$r_p(y) = \frac{Ric_p(y, y)}{g_p(y, y)} = \frac{Ric_p(y, y)}{|y|_p^2}$$

(donde g es la métrica), conocida como función de **curvatura de Ricci**.

Definición 7.4.3 (Curvatura seccional). Dado $p \in D$ y un plano bi-dimensional $\pi \subset T_p D$, queremos definir una cantidad que sólo depende del plano, que puede pensarse, ya que la exponencial en p es un difeomorfismo local $\exp_p : B \rightarrow U_p$, como la curvatura de Gauss de la superficie bi-dimensional

$$M_\pi = \exp_p(B \cap \pi) \subset D.$$

Si $v, w \in \pi$, el *área* del paralelogramo generado por v, w está dada por

$$A(v, w) = \sqrt{|v|_p^2 |w|_p^2 - \langle v, w \rangle_p^2}.$$

Esta cantidad es positiva y no nula si v, w son linealmente independientes por la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Definimos

$$sec_p : \{\pi \subset T_p D \text{ con } \pi \text{ un 2-plano}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

de la siguiente manera. Sean $v, w \in \pi$ linealmente independientes. Entonces

$$sec_p(\pi) = \frac{\langle R_p(v, w)w, v \rangle_p}{A(v, w)^2}.$$

Observación 7.4.4. De acuerdo al Ejercicio 6.5.20, cuando la métrica en D proviene de una parametrización regular de una superficie $M \subset \mathbb{R}^3$, la curvatura seccional no es otra cosa que la curvatura de Gauss de la superficie M .

Lema 7.4.5. La cantidad $\text{sec}_p(\pi)$ no depende de la base de π . En particular podemos suponer que v, w son ortonormales y en ese caso

$$\text{sec}_p(\pi) = \langle R_p(v, w)w, v \rangle_p.$$

Demostración. Si $v_1, v_2 \in \pi$ son linealmente independientes y $x, y \in \pi$ también son linealmente independientes, entonces existen $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$x = a_1 v_1 + a_2 v_2, \quad y = b_1 v_1 + b_2 v_2.$$

Identificamos $(\pi, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con \mathbb{R}^2 con el producto interno usual. Entonces

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \|(a_1 v_1 + a_2 v_2) \times (b_1 v_1 + b_2 v_2)\| \\ &= |a_1 b_2 - b_1 a_2| \|v_1 \times v_2\| = |a_1 b_2 - b_1 a_2| A(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\langle R(x, y)y, x \rangle = \sum_{i, j, k, l=1}^2 a_i a_k b_j b_l \langle R(v_i, v_j)v_k, v_l \rangle.$$

Por el Lema 7.4.1, la última expresión se anula si $k = l$, luego debe ser $k \neq l$. Por otra parte, como $R(w, z) = -R(z, w)$, también se anula si $i = j$, luego debe ser $i \neq j$. Por último, la identidad de Bianchi nos permite deshacernos de los términos cíclicos y entonces se arriba a

$$\langle R(x, y)y, x \rangle = |a_1 b_2 - b_1 a_2|^2 \langle R(v, w)w, v \rangle. \quad \square$$

En consecuencia usaremos la notación sec_π para denotar la curvatura seccional de la subvariedad generada por el plano $\pi \subset T_p D$.

Teorema 7.4.6 (Invariancia de la curvatura por isometrías). Si $f : D \rightarrow M$ es una isometría local riemanniana, entonces Df preserva las curvaturas. Explícitamente, para todo $p \in D$, $x, y, z \in T_p D$ se tiene

$$1. \quad Df_p R_p^D(x, y)z = R_{f(p)}^M(Df_p x, Df_p y)Df_p z.$$

$$2. \quad \text{Si } \pi' = Df_p(\pi) \text{ con } \pi \subset T_p D \text{ un 2-plano, entonces } \text{sec}^D(\pi) = \text{sec}^M(\pi').$$

Demostración. La primera propiedad es inmediata de la definición del tensor de curvatura y el Teorema 7.3.5, la segunda entonces se deduce directamente de la definición de curvatura seccional. \square

Observación 7.4.7. La curvatura de Ricci se puede calcular, observando las definiciones, de la siguiente manera: si $v \in T_p D$ y $\{v_1, \dots, v_{d-1}\}$ es una base ortonormal de $\{v\}^\perp$, entonces

$$r_p(v) = \sum_{i=1}^{d-1} \text{sec}_p(v, v_i).$$

Definición 7.4.8 (Curvatura escalar). La *curvatura escalar* se define como la traza del tensor de Ricci con respecto a la métrica, esto es

$$S(p) = \sum_j r_p(e_j) = \sum_j \sum_i \langle R_p(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle_p.$$

Cuando la dimensión de D es 2, este número es simplemente el doble de la curvatura Gaussiana de D .

Observación 7.4.9 (Expresión en una base y símbolos de Christoffel). Si usamos la notación de índices para denotar las componentes del campo $X = \sum_i X^i E_i$ y similarmente para Y, Z , entonces

$$R(X, Y)Z = \sum_l \sum_{i,j,k} R^l_{ijk} Z^i X^j Y^k e_l$$

donde

$$R^l_{i,j,k} = (R(E_j, E_k)E_i)_l$$

y E_i, E_j, E_k denotan los campos vectoriales en las direcciones coordenadas respectivas, por ejemplo $E_1(x, y) = (x, 0), E_2(x, y) = (0, y)$. Entonces la expresión para R en términos de Γ y sus derivadas parciales se escribe

$$R^l_{ijk} = \sum_s \Gamma^l_{js} \Gamma^s_{ik} - \sum_s \Gamma^l_{ks} \Gamma^s_{ij} - \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j}$$

donde hemos usado los coeficientes de Christoffel de segunda clase (Observación 7.1.14 y el corolario que le sigue).

Bajando los índices (contrayendo con la métrica), obtenemos los coeficientes

$$R_{lijk} = \sum_s g_{ls} R_{ijks}^s,$$

que tienen propiedades de simetría cíclica (por la primera identidad de Bianchi).

7.4.1. Campos de Jacobi

A partir de aquí será conveniente dejar de lado D para denotar el abierto en \mathbb{R}^d dotado de la métrica riemanniana g , y llamarlo $M \subset \mathbb{R}^d$, reservando el símbolo D para la derivada covariante de Levi-Civita en (M, g) (también usaremos ocasionalmente D para denotar la diferencial de funciones $F : M \rightarrow M'$ etc.)

Dada α una geodésica de (M, g) Riemanniana, diremos que γ campo a lo largo de α es una *levantada de Jacobi* o *campo de Jacobi* si verifica la ecuación diferencial

$$D_{\alpha'}^2 \gamma = -R(\gamma, \alpha') \alpha'.$$

Esta es una ecuación de segundo orden lineal: en coordenadas, llamando $\gamma = (\alpha, \eta)$, iterando (7.11) y comparando con la ecuación de \mathcal{R} en (7.13) obtenemos

$$\dot{\eta} = -D\Gamma_{\alpha}(\eta)(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) - 2\Gamma_{\alpha}(\dot{\eta}, \dot{\alpha}) - \Gamma_{\alpha}(\eta, \ddot{\alpha}) - \Gamma_{\alpha}(\eta, \Gamma_{\alpha}(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})).$$

Recordando que α es una geodésica, sabemos que $\ddot{\alpha} = \Gamma_{\alpha}(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})$ lo que cancela los últimos dos términos, y obtenemos

$$\dot{\eta} = -D\Gamma_{\alpha}(\eta)(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) - 2\Gamma_{\alpha}(\dot{\eta}, \dot{\alpha}), \quad (7.14)$$

que es una genuina ecuación diferencial lineal de segundo orden en η .

Denotemos $p = \alpha(0)$, $z = \dot{\alpha}(0)$. Entonces para cada $v, w \in T_p D$, existe una única curva solución $\eta_{v,w}$ en \mathbb{R}^d tal que

$$\eta_{v,w}(0) = v, \quad D\eta(0) = \dot{\eta}_{v,w}(0) + \Gamma_p(v, z) = w.$$

Observación 7.4.10. En el caso particular en el que $v = 0$, denotaremos $\eta_w = \eta_{0,w}$. Entonces las condiciones iniciales se reescriben así

$$\eta_w(0) = 0, \quad \dot{\eta}_w(0) = w.$$

Mayormente usaremos estos campos de Jacobi con $v = 0$. Si además $w = \dot{\alpha}(0)$, entonces es fácil ver usando (7.14) que $\eta_w(t) = t\dot{\alpha}(t)$.

La relevancia de los campos de Jacobi es evidente a partir del próximo teorema, que establece que todo campo de Jacobi se obtiene derivando una variación por geodésicas y viceversa.

Teorema 7.4.11. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ una geodésica.

1. Si $v : J \times [a, b] \rightarrow M$ es una variación por geodésicas de α , entonces $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ dada por

$$\eta(t) = \frac{d}{ds} v(0, t) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \alpha_s(t)$$

es un campo de Jacobi a lo largo de α .

2. Si α está parametrizada por longitud de arco y η es un campo de Jacobi a lo largo de α , entonces existe $\epsilon > 0$ y una variación de α por geodésicas $v : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ tal que

$$\eta(t) = \frac{d}{ds} v(0, t).$$

Demostración. Supongamos que $v = v(s, t)$ es una variación de geodésicas, y como siempre denotemos con $'$ a la derivación d/ds , y con $\dot{}$ a la derivación d/dt . Pongamos $\eta = v'$. Luego $\dot{\eta} = \dot{v}'$, con lo cual

$$D_{\dot{v}} \eta = \dot{v}' + \Gamma(\dot{v}, v') = D_{v'} \eta,$$

mientras que

$$\dot{\eta} = \dot{v}' = -\frac{d}{ds} \Gamma(\dot{v}, v) = -D\Gamma_\alpha(\eta)(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) - 2\Gamma_\alpha(\dot{\eta}, \dot{\alpha}),$$

pues para cada s fijo, $v(s, t)$ es una geodésica. Se deduce directamente de la expresión local (7.14) que η es un campo de Jacobi.

Recíprocamente, si η es un campo de Jacobi a lo largo de la geodésica α , ponemos $p = \alpha(0)$, $v = \dot{\alpha}(0)$, $w = D_{\alpha'}\eta(0)$. Sea $\beta = \beta(s)$ la única geodésica del spray con $\beta(0) = p$, $\beta'(0) = \eta(0)$. Tomamos

$$\xi(s) = P_0^s(\beta)(v + sw).$$

Luego $\xi(0) = v$ y $w = D_{\beta'}\xi = \xi' + \Gamma_{\beta}(\beta', \xi)$. Como $\xi(s) \in T_{\beta(s)}M \simeq \mathbb{R}^d$, entonces

$$\alpha_s(t) = \nu(s, t) = \exp_{\beta(s)}(t\xi(s))$$

es una variación de geodésicas, y además $\alpha_0(t) = \exp_p(tv) = \alpha(t)$, luego α_s es una variación de α . Por el ítem previo,

$$\mu(t) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \alpha_s(t)$$

es un campo de Jacobi a lo largo de α . Resta ver que coincide con η , y por unicidad alcanza ver que verifica las mismas condiciones iniciales. Claramente $\mu(0) = \beta'(0) = \eta(0)$. Por otra parte como

$$\dot{\alpha}_s(0) = D(\exp_{\beta(s)})_0(\xi(s)) = \xi(s),$$

entonces

$$D_{\alpha'}\mu(0) = \dot{\mu}(0) + \Gamma_p(\eta(0), v) = \xi'(0) + \Gamma_p(\eta(0), v) = w = D_{\alpha'}\eta(0).$$

□

Campos de Jacobi versus exponencial

La relación entre campos de Jacobi y la exponencial se hace explícita en el siguiente teorema:

Teorema 7.4.12. Sean $p \in D$, $w \in T_pD$ y $\alpha(t) = \exp_p(tv)$. Sea η_w el único campo de Jacobi a lo largo de α tal que $\eta(0) = 0$, $\dot{\eta}(0) = D_{\alpha'}\eta(0) = w$. Entonces para todo $t > 0$ en el dominio de α , se tiene

$$1/t \eta(t) = D(\exp_p)_{tv}w.$$

En particular, $w \in \ker(D \exp_p)_{tv}$ si y sólo si $\eta(t) = 0$.

Demostración. Consideramos la variación de α por geodésicas dada por

$$v(s, t) = \exp_p(t(v + sw)),$$

y $\mu = \alpha'_0$ el campo de Jacobi inducido; afirmamos que $\mu = \eta$. Nuevamente por unicidad sólo hay que chequear las condiciones iniciales: se tiene

$$\mu(t) = D(\exp_p)_{tv}(tw),$$

fórmula que prueba todas las afirmaciones pues $\mu(0) = 0$ y además

$$\dot{\mu}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mu(t)/t = w. \quad \square$$

7.5. Automorfismos de la geometría y campos de Killing

En esta sección presentamos la noción de campo de Killing junto con una serie de equivalencias útiles para reconocerlos. Los campos de Killing son versiones globales de los campos de Jacobi, y en general existen en variedades riemannianas que presentan muchas simetrías (es decir, muchas isometrías para la métrica) como los espacios homogéneos. Nuestra presentación de automorfismos (llamados también transformaciones afines de (M, ∇) donde ∇ es la derivada de Levi-Civita de la métrica riemanniana en M) es ligeramente distinta de la clásica, ya que estudiamos primero los automorfismos que preservan la conexión (y puede haber distintas métricas con la misma conexión), y luego presentamos los automorfismos métricos que son un subconjunto de los primeros.

Definición 7.5.1 (Automorfismos de la derivada covariante). Sea (M, g) riemanniana, ∇ la derivada de Levi-Civita. Sea $\varphi : U \rightarrow M$ con $U \subset M$ abierto, diremos que φ es un *automorfismo de la conexión* si para cualquier par de campos X, Y en M se verifica $\nabla_{\varphi_* X} \varphi_* Y = \varphi_*(\nabla_X Y)$ en el abierto TU .

Observemos que en particular, si φ es una isometría riemanniana, entonces es un automorfismo de la conexión por el Teorema 7.3.5. Un automorfismo de la conexión también se denomina a veces *transformación afín*, y la noción puede extenderse de la manera evidente a funciones suaves entre dos variedades con sus respectivas conexiones.

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo (todos los campos serán de clase C^2), recordemos que el flujo de X , denotado $\rho(t, p) = \rho_t(p)$ verifica $\rho'_t(p) = X(\rho_t(p))$ para todo (t, p) en el dominio de definición del flujo (que es un entorno abierto de $\{0\} \times M$ en $\mathbb{R} \times M$), y además $\rho_0(p) = p$, $\rho'_0(p) = X(p)$. También recordemos que el flujo es un grupo a un parámetro,

$$\rho_{t+s}(p) = \rho_t(\rho_s(p)) = \rho_s(\rho_t(p))$$

donde estén definidos.

Definición 7.5.2 (Pull-back de campos). Sea $f : M \rightarrow M$ difeomorfismo local de clase C^1 , sea X campo en M , definimos

$$f^*X(p) = Df_p^{-1}X(f(p)),$$

que es un nuevo campo en M denotado f^*X .

Un ejercicio de manipulación de los objetos nos permite reescribir la condición de ser automorfismo de la conexión en términos del pull-back, que resulta más conveniente para otras consideraciones que siguen:

Teorema 7.5.3. Sea $f : U \rightarrow V$ difeomorfismo de clase C^2 , entonces $(f^{-1})^*Y = f_*Y$ en V para todo campo Y en U . Luego

$$\nabla_{f_*Y}(f_*Z) = \nabla_{(f^{-1})^*Y}(f^{-1})^*Z$$

en V para todo par de campos en U . En particular f es automorfismo de la conexión ∇ de la variedad riemanniana (M, ∇) si y sólo si f es difeomorfismo local y para todo par de campos Y, Z en U se tiene

$$\nabla_{f_*Y}(f^*Z) = f^*(\nabla_Y Z).$$

Demostración. Notemos primero que de la definición $f_*Z(f(p)) = Df_p(Z_p)$ podemos reescribir $f_*Z(q) = Df_{f^{-1}(q)}(Z_{f^{-1}(q)})$ si $q = f(p) \in \text{im}(f)$. Por otro lado

$$(f^{-1})^*Z(q) = Df_{f^{-1}(q)}Z \circ f^{-1}(q) = Df_{f^{-1}(q)}Z_{f^{-1}(q)},$$

lo que muestra que vale la primera afirmación. El resto de las afirmaciones es consecuencia inmediata de esta. \square

Lema 7.5.4 (El pull-back vs. el corchete de Lie). Si X, Y son campos en M , y φ_t es el flujo de X , entonces para todo t en el dominio del flujo

1. $[X, Y] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho_t^* Y$
2. $\frac{d}{dt} \rho_t^* Y = \rho_t^* [X, Y]$
3. $\rho_t^* X = X$
4. $\rho_t^* [X, Y] = [X, \rho_t^* Y]$

Demostración. Como $\rho_{-t} = \rho_t^{-1}$, escribimos $\rho_t^* Y(q) = D\rho_t^{-1}(Y \circ \rho_t)(q) = D\rho_{-t}(Y \circ \rho_t(q)) = A_t v_t$ y lo derivamos respecto de t en $t = 0$ obteniendo $\dot{A}_0 v_0 + A_0 \dot{v}_0$. Por un lado observamos que por ser ρ el flujo de X tenemos $\frac{d}{dt} \rho_{-t}(q) = -X(\rho_{-t}(q))$ y en particular como $\rho_0 = id$, intercambiando derivadas se tiene

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A_t v_0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} D\rho_{-t} v_0 = D(-X)_q v_0 = -DX_q Y_q.$$

Por otro lado

$$A_0 \dot{v}_0 = \dot{v}_0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Y \circ \rho_t(q) = DY_q X_q,$$

y esto prueba la primera identidad enunciada. Para probar la segunda identidad, usamos la propiedad del flujo $\rho_{t+s} = \rho_t \circ \rho_s$ para reescribir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_t^* Y &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \rho_{t+s}^* Y = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} D\rho_{-t} D\rho_{-s} Y \circ \rho_s \circ \rho_t \\ &= \rho_t^* \left\{ \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} D\rho_{-s} Y \circ \rho_s \right\} = \rho_t^* \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \rho_s^* Y = \rho_t^* [X, Y] \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos lo probado anteriormente. La tercer identidad se deduce tomando $X = Y$ de manera que la derivada en el segundo ítem es nula. Esto prueba que $\rho_t^* X$ debe ser constante y como $\rho_0 = id$ tenemos la conclusión. Por último,

$$\begin{aligned} \rho_t^* [X, Y](p) &= D\rho_{-t} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \rho_s^* Y(\rho_t(p)) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} D\rho_{-s} D\rho_{-t} Y \circ \rho_t \circ \rho_s(p) \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} D\rho_{-s} \rho_t^* Y(\rho_s(p)) = [X, \rho_t^* Y](p) \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos lo probado en la primer identidad, pero ahora aplicado al campo $\rho_t^* Y$. \square

Dada una métrica riemanniana en M , recordemos que ∇ denota la derivada de Levi-Civita de la métrica y Γ el operador bilineal de la conexión. Utilizaremos Q para denotar la forma cuadrática asociada, esto es $Q_p(v) = \Gamma_p(v, v)$. Con $D_p\rho$ denotamos la diferencial de ρ en $p \in M$ y con $D_p^2\rho$ denotaremos el Hessiano de una función $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ (su diferencial segunda).

Teorema 7.5.5 (Campos de Killing). *Sea (M, g) riemanniana. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, sea ρ_t el flujo de X . Son equivalentes:*

1. ρ_t es automorfismo de la conexión para todo t
2. $Q_{\rho_t(p)}(D_p\rho_t v) = -D_p^2\rho_t(v, v) + D_p\rho_t(Q_p(v))$ para todo t y todo $p \in M, v \in T_pM$.
3. Para toda geodésica $\gamma \subset M$, el campo X es Jacobi a lo largo de γ .
4. Para todo par de campos Y, Z se tiene $[X, \nabla_Y Z] = \nabla_{[X, Y]}Z + \nabla_Y[X, Z]$.

Un campo X que verifica estas condiciones es un campo de Killing en (M, g) , y denotamos $\text{Kll}(M, \nabla)$ al conjunto de todos los campos de Killing.

Demostración. Supongamos que ρ_t es automorfismo de la conexión para todo t , tomemos la geodésica γ que pasa por p con velocidad inicial v y consideremos $v_t(s) = \rho_t(\gamma(s))$. Denotemos $\frac{d}{ds} = '$, luego $v' = (\rho_t)_*\gamma'$. Entonces si calculamos, con t fijo, la derivada covariante a lo largo de v_t , tenemos

$$D_{v'}v' = \nabla_{(\rho_t)_*\gamma'}(\rho_t)_*\gamma' = (\rho_t)_*D_{\gamma'}\gamma' = (\rho_t)_*(0) = 0$$

puesto que γ es una geodésica y ρ_t es un automorfismo de la conexión. Entonces v_t es una geodésica para cada t fijo, y la identidad del segundo ítem se obtiene escribiendo explícitamente la ecuación de Euler de las derivadas $v_t'' = -Q_{v_t}(v_t')$ y evaluando luego en $s = 0$. Si vale la segunda identidad, y γ es una geodésica, tomamos de nuevo la variación $v_t = \rho_t \circ \gamma$ y observamos que para cada s fijo,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}v_t(s) = \frac{d\rho}{dt}\Big|_{t=0}(\gamma(s)) = X(\gamma(s))$$

ya que ρ_t es el flujo de X . Poniendo $p = \gamma(s)$, $v = \gamma'(s)$ en la identidad arribamos a la ecuación de Euler $v_t''(s) = -Q_{v_t(s)}(v_t'(s))$. Esto prueba que v_t es una geodésica para todo t , y entonces X es un campo de Jacobi a lo largo de γ por el Teorema 7.4.11, lo que prueba que vale la tercer afirmación. Supongamos ahora que X es campo de Jacobi a lo largo de cualquier geodésica γ . Entonces

$$D_{\gamma'}^2(X \circ \gamma) = -R(X \circ \gamma, \gamma')\gamma',$$

que en términos de Γ se escribe $(X \circ \gamma)'' = -D\Gamma(X \circ \Gamma)(\gamma', \gamma') - 2\Gamma((X \circ \gamma)', \gamma')$ por la ecuación (7.14). Como $(X \circ \Gamma)' = DX_\gamma(\gamma')$, derivando nuevamente tenemos $(X \circ \gamma)'' = D_\gamma^2 X(\gamma', \gamma') + DX_\gamma(\gamma'')$. Dado un campo Y tomamos γ geodésica que pasa por p y tal que $\gamma'(0) = Y_p$, entonces notando que como γ es geodésica se tiene $\gamma'' = -Q_\gamma(\gamma')$, la ecuación de Jacobi se escribo (omitiendo el punto genérico p de evaluación)

$$D^2X(Y, Y) - DX(QY) = -D\Gamma(X)(Y, Y) + 2\Gamma(DX(Y), Y).$$

Estamos suponiendo que todas las funciones son de clase C^2 luego D^2X es un operador bilineal simétrico; cambiando Y por $Y + Z$ polarizamos esta identidad para obtener

$$D^2X(Y, Z) - DX(\Gamma(Y, Z)) = -D\Gamma(X)(Y, Z) + \Gamma(DX(Y), Z) + \Gamma(DX(Z), Y). \quad (7.15)$$

Por otro lado calculamos

$$\begin{aligned} [X, \nabla_Y Z] &= D(\nabla_Y Z)(X) - DX(\nabla_Y Z) = D^2Z(X, Y) + DZ(DY(X)) + D\Gamma(X)(Y, Z) \\ &\quad + \Gamma(DY(X), Z) + \Gamma(Y, DZ(X)) - DX(DZ(Y)) - DX(\Gamma(Y, Z)) \\ &= D^2Z(X, Y) + DZ(DY(X)) + \Gamma(DY(X), Z) + \Gamma(Y, DZ(X)) - DX(DZ(Y)) \\ &\quad + \Gamma(DX(Y), Z) + \Gamma(DX(Z), Y) - D^2X(Y, Z) \end{aligned}$$

donde en la última igualdad utilizamos la identidad (7.15) que proviene de la hipótesis de que X es Jacobi a lo largo de cualquier geodésica. Ahora calculamos

$$\begin{aligned} \nabla_Y[X, Z] &= D^2Z(X, Y) - D^2X(Y, Z) + DZ(DX(Y)) - DX(DZ(Y)) \\ &\quad + \Gamma(Y, DZ(X)) - \Gamma(Y, DX(Z)) \end{aligned}$$

y también

$$\nabla_{[X, Y]}Z = DZ(DY(X)) - DZ(DX(Y)) - \Gamma(Z, DX(Y)) + \Gamma(Z, DY(X)).$$

Sumando estas dos últimas obtenemos la igualdad de la cuarta afirmación del teorema. Ahora supongamos que vale esta última igualdad, fijamos $p \in M$ y sea

$$\beta(t) = D\rho_t \nabla_{\rho_t^* Y} \rho_t^* Z(\rho_{-t}(p)) = \rho_{-t}^* W_t(p) \in T_p M.$$

donde $W_t = \nabla_{\rho_t^* Y} \rho_t^* Z$. Notamos que $W_{t+s}(p) = W_t(p) + sW_t'(p) + o(s^2)$, y entonces

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \rho_{-t-s}^* W_{t+s}(p) = \rho_{-t}^* \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \rho_{-s}^* W_{t+s}(p) \\ &= \rho_{-t}^* \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \{\rho_{-s}^* W_t + s\rho_{-s}^* W_t' + o(s^2)\}(p) \\ &= \rho_{-t}^* \{-[X, W_t] + \rho_0^* W_t' + 0\}(p) = \rho_{-t}^* \{-[X, W_t] + W_t'\}(p), \end{aligned}$$

por la primera identidad del Lema 7.5.4. Para derivar W_t notamos que como $\nabla_Y Z$ es un operador \mathbb{R} -bilineal en Y, Z , tenemos

$$W_t' = \nabla_{(\rho_t^* Y)} \rho_t^* Z + \nabla_{\rho_t^* Y} (\rho_t^* Z)' = \nabla_{[X, \rho_t^* Y]} \rho_t^* Z + \nabla_{\rho_t^* Y} [X, \rho_t^* Z],$$

nuevamente por el Lema 7.5.4. Como estamos asumiendo la propiedad de derivación (4) del enunciado, tenemos

$$W_t' = [X, W_t]$$

y con esto $\beta'(t) = 0$ lo que nos dice que debe ser constante e igual a $\beta(0)$, es decir $\rho_{-t}^* W_t(p) = W_0(p) = \nabla_Y Z(p)$. Como esto es cierto para todo $p \in M$, tenemos $\rho_{-t}^* W_t = \nabla_Y Z$ como campos y entonces

$$\nabla_{\rho_t^* Y} (\rho_t^* Z) = \rho_t^* (\nabla_Y Z).$$

Esto nos dice que ρ_t es un automorfismo de ∇ para todo t . \square

Observación 7.5.6 (Campos de Killing en términos del tensor de curvatura). La condición (4) del teorema anterior puede describirse usando el hecho de que la conexión no tiene torsión, con lo cual $\nabla_V W - \nabla_W V = [V, W]$ para todo par de campos V, W en M . Con esto la condición de Killing para X es equivalente a

$$-R(X, Y)Z = \nabla_{\nabla_Y Z} X - \nabla_Y \nabla_Z X$$

para todo par de campos Y, Z en M .

Teorema 7.5.7 (Campos de Killing como álgebra de Lie). *Los campos de Killing $\text{Kill}(M, \nabla)$ forman una subálgebra de Lie real del conjunto de todos los campos $\mathfrak{X}(M)$.*

Demostración. Supongamos que X, \bar{X} son campos de Killing en M . De la condición (4) del teorema anterior es evidente que cualquier combinación lineal de X, \bar{X} es también un campo de Killing. Para probar que es cerrado por el corchete de Lie, calculamos usando la identidad de Jacobi

$$[[X, \bar{X}], \nabla_Y Z] = [[X, \nabla_Y Z], \bar{X}] + [X, [\bar{X}, \nabla_Y Z]].$$

Ahora usamos la identidad (4) para X y para \bar{X} , luego de una nueva aplicación de Jacobi obtenemos

$$\nabla_{[[X, \bar{X}], Y]} Z + \nabla_Y [[X, \bar{X}], Z],$$

de donde concluimos nuevamente por la identidad (4) que $[X, \bar{X}]$ también es de Killing. \square

7.5.1. Campos de Killing métricos

Definición 7.5.8. Decimos que el campo X en la variedad riemanniana (M, g) es un campo de Killing métrico si el flujo ρ_t de X es una isometría para todo t , esto es

$$\|D\rho_t v\|_{\rho_t(p)} = \|v\|_p \quad \text{para todo } p \in M, v \in T_p M.$$

Denotamos $Kill(M, g)$ al conjunto de todos los campos de Killing de la métrica g .

Observación 7.5.9. El Teorema 7.3.5 nos dice que toda isometría es automorfismo de la conexión. Luego todo campo de Killing métrico es un campo de Killing de la conexión, esto es $Kill(M, g) \subset Kill(M, \nabla)$.

Teorema 7.5.10. Sea X campo en M , sea ρ_t su flujo. Son equivalentes:

1. $X \in Kill(M, g)$.
2. Para todo par de campos Y, Z en M , y todo t en el dominio del flujo, se tiene

$$\langle \rho_t^* Y, \rho_t^* Z \rangle = \langle Y, Z \rangle \circ \rho_t$$

como funciones en M .

3. Para todo par de campos Y, Z en M

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle = -\langle \nabla_Z X, Y \rangle.$$

4. Para todo campo Y en M , $\langle \nabla_Y X, Y \rangle = 0$.

Demostración. De la definición, cambiando t por $-t$ y polarizando sabemos que

$$\langle D\rho_{-t} v, D\rho_{-t} w \rangle_{\rho_{-t}(p)} = \langle v, w \rangle_p$$

para todo $p \in M$, para todo $v, w \in T_p M$. Tomamos $v = Y_p$, $W = Z_p$ y tomando $p = \rho_t(q)$ deducimos que

$$\langle D\rho_{-t} Y_{\rho_t(q)}, D\rho_{-t} Z_{\rho_t(q)} \rangle = \langle Y_{\rho_t(q)}, Z_{\rho_t(q)} \rangle_{\rho_t(q)}$$

que se reescribe como

$$\langle \rho_t^* Y, \rho_t^* Z \rangle(q) = \langle Y, Z \rangle(\rho_t(q)).$$

Esto prueba que vale la segunda afirmación; claramente podemos deshacer el razonamiento y en realidad las dos primeras afirmaciones son equivalentes. Ahora derivamos ambos lados de la segunda identidad respecto de t . Por el Lema 7.5.4 y la compatibilidad de la métrica con la conexión obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \rho_t^* Y, \rho_t^* Z \rangle_q &= \langle [X, \rho_t^* Y], \rho_t^* Z \rangle_q + \langle \rho_t^* Y, [X, \rho_t^* Z] \rangle_q = X(\langle Y, Z \rangle)|_{\rho_t(q)} \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle_{\rho_t(q)} + \langle Y, \nabla_X Z \rangle_{\rho_t(q)}. \end{aligned}$$

Ahora recordemos que la conexión tiene torsión nula para escribir $\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$ y similarmente $\nabla_X Z = \nabla_Z X + [X, Z]$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle [X, \rho_t^* Y], \rho_t^* Z \rangle_q + \langle \rho_t^* Y, [X, \rho_t^* Z] \rangle_q &= \langle \nabla_Y X, Z \rangle_{\rho_t(q)} + \langle [X, Y], Z \rangle_{\rho_t(q)} \\ &\quad + \langle Y, \nabla_Z X \rangle_{\rho_t(q)} + \langle Y, [X, Z] \rangle_{\rho_t(q)}. \end{aligned}$$

Podemos entonces aplicar la identidad (2) que estamos asumiendo para los campos $\bar{Y} = [X, Y], Z$ en el segundo producto interno a la derecha de la igualdad, e $Y, \bar{Z} = [X, Z]$ en el cuarto producto interno. Combinando con el Lema 7.5.4 obtenemos

$$\begin{aligned} \langle [X, \rho_t^* Y], \rho_t^* Z \rangle_q + \langle \rho_t^* Y, [X, \rho_t^* Z] \rangle_q &= \langle \nabla_Y X, Z \rangle_{\rho_t(q)} + \langle [X, \rho_t^* Y], \rho_t^* Z \rangle_q \\ &\quad + \langle Y, \nabla_Z X \rangle_{\rho_t(q)} + \langle \rho_t^* Y, [X, \rho_t^* Z] \rangle_q. \end{aligned}$$

Cancelando los términos iguales obtenemos

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle_{\rho_t(q)} = -\langle \nabla_Z X, Y \rangle_{\rho_t(q)},$$

y evaluando en $t = 0$ se deduce la tercer afirmación. La tercera afirmación es equivalente a la cuarta, polarizando. Acabamos de probar que en general (sin ninguna hipótesis sobre X) vale

$$\frac{d}{dt} \langle Y, Z \rangle(\rho_t(q)) = \langle \nabla_Y X, Z \rangle_{\rho_t(q)} + \langle [X, \rho_t^* Y], \rho_t^* Z \rangle_q + \langle Y, \nabla_Z X \rangle_{\rho_t(q)} + \langle \rho_t^* Y, [X, \rho_t^* Z] \rangle_q.$$

Supongamos que vale entonces la tercera afirmación, entonces tenemos

$$\frac{d}{dt} \langle Y, Z \rangle(\rho_t(q)) = \frac{d}{dt} \langle \rho_t^* Y, \rho_t^* Z \rangle_q$$

y esto dice que ambas funciones difieren en una constante. Evaluando en $t = 0$ vemos que en realidad son iguales, y esto prueba que la tercer afirmación implica la segunda. Esto concluye la prueba de las equivalencias. \square

Ya observamos que los campos de Killing métricos forman un subespacio del álgebra de Lie de campos de Killing de la conexión, dejamos como ejercicio para el lector probar el siguiente resultado:

Proposición 7.5.11. *Kill(M, g) es subálgebra de Lie de Kill(M, ∇).*

7.6. Minimalidad local y global de las geodésicas

En esta sección probaremos que las geodésicas son localmente minimizantes, y veremos los resultados que vinculan completitud geodésica con completitud métrica, así como la existencia de geodésicas minimizantes que unen puntos arbitrarios de M (Teoremas de Hopf-Rinow).

7.6.1. El lema de Gauss

Al igual que en las superficies, la diferencial de la exponencial a lo largo de una geodésica resulta una isometría entre espacios tangentes.

Teorema 7.6.1 (Lema de Gauss). *Sea (D, g) Riemanniana. Consideramos $\gamma : J \rightarrow D$, $\gamma(t) = \exp_p(tz)$ una geodésica, con $z \in T_p D$.*

1. *Dados $v, w \in T_p D$ sea η el único campo de Jacobi a lo largo de γ con $\eta(0) = v$, $D_t \eta(0) = w$. Entonces*

$$\langle \dot{\gamma}(t), \eta(t) \rangle_g = \langle z, v + tw \rangle_p.$$

2. *Para todo $w \in T_p D$ y todo $t \in J$ se tiene*

$$\langle D(\exp_p)_{tz} z, D(\exp_p)_{tz} w \rangle_g = \langle z, w \rangle_p.$$

3. *Si $v = 0$ y $w \perp z$, entonces $\dot{\gamma} \perp \eta$ para todo $t \in J$.*

Demostración. Sea $f(t) = \langle \dot{\gamma}(t), \eta(t) \rangle_g$. Se tiene $\frac{d}{dt} f(t) = \langle \dot{\gamma}, D_t \eta \rangle$ pues $D_t \dot{\gamma} = 0$. Derivando nuevamente respecto de t se tiene

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) = \langle \dot{\gamma}, D_t^2 \eta \rangle = \langle \dot{\gamma}, R(\dot{\gamma}, \eta) \dot{\gamma} \rangle = 0$$

para todo $t \in J$ por el Lema 7.4.1. Luego $f(t) = f(0) + tf'(0)$, lo que prueba el primer ítem. La segunda fórmula es un caso particular ($v = 0$) combinado con la expresión

$$\eta(t) = D(\exp_p)_{tz}tw$$

del Teorema 7.4.12, la tercera fórmula es evidente a partir de la segunda. \square

7.6.2. Coordenadas polares

Observación 7.6.2. Sean $p \in D$, $R > 0$ de manera que

$$\exp_p : B_R(0_p) \subset T_pD \rightarrow V_R(p) = \exp_p(B_R(0_p))$$

es un difeomorfismo. Si $\alpha : [a, b] \rightarrow V_R(p) \setminus \{p\}$ es regular a trozos, consideremos $\Gamma = \exp_p^{-1} \circ \alpha : [a, b] \rightarrow T_pD$. Sea $r : [a, b] \rightarrow (0, R)$ dada por $r(t) = |\Gamma(t)|_p$. Como $\Gamma \neq 0$, se deduce que r es suave a trozos y no nula. Sea $u : [0, 1] \rightarrow S = \{v : |v|_p = 1\} \subset T_pD$ dada por

$$u(t) = \frac{1}{r(t)}\Gamma(t).$$

Entonces u también es suave a trozos, y además $\Gamma = ru$. Como se verifica que $\alpha(t) = \exp_p(r(t)u(t))$, diremos que estas son las *coordenadas polares de γ* .

7.6.3. Minimalidad local de las geodésicas y el Teorema de Hopf-Rinow

Con la misma demostración que para superficies (Teorema 5.4.4), y mediante el Lema de Gauss recién probado, obtenemos la minimalidad local de las geodésicas en (D, g) .

Teorema 7.6.3 (Minimalidad local de las geodésicas). Sean $p \in D$ y $R > 0$ como en la observación previa. Dado $q \in V_R(p)$, sea $\gamma_{p,q}$ la geodésica que une p, q , $\gamma_{p,q}(t) = \exp_p(tv)$ con $v \in B_R(0_p) \subset T_pD$. Entonces

1. Sea $0 < c \leq R$. Entonces $L(\alpha) \geq c$ para toda curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow D$ regular que comienza en p , y se salga de $V_c(p) = \exp_p(B_c(0))$.
2. $L(\alpha) \geq L(\gamma_{p,q})$ para toda curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow D$ regular que una p con q , y en particular $d(p, q) = L(\gamma_{p,q}) = |v|_p$.

3. Vale la igualdad si y sólo si α es una reparametrización de $\gamma_{p,q}$.

Se tiene la siguiente consecuencia del resultado local de minimalidad de las geodésicas.

Proposición 7.6.4. Sean (D, g) Riemanniana y $p \in D$. Existe $c_p > 0$ tal que para todo $0 < r < c_p$ se tiene

$$\begin{aligned}\exp_p(B_r(0_p)) &= B_r(p), \\ \exp_p(S_r(0_p)) &= S_r(p).\end{aligned}$$

Además \exp_p es un difeomorfismo entre variedades en ambos casos.

El Lema de Gauss (Teorema 7.6.1) nos dice que los rayos geodésicos que emanan de p son ortogonales a las esferas $S_r(p)$.

Demostración. Tomando c_p para que la exponencial esté definida y sea un difeomorfismo en $B_{c_p}(0_p)$, se tiene que $B_r(0), S_r(0)$ son subvariedades de $T_p D \simeq \mathbb{R}^d$, y $\exp_p|_{B_r(0_p)}, \exp_p|_{S_r(0_p)}$ son difeomorfismos con su imagen, siempre que $0 < r < c_p$. Si vemos que \exp_p es una biyección en cada caso, resultará difeomorfismo. Si $|v|_p < r < c_p$, entonces tomando $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, $q = \exp_p(v)$ se verifica que γ es minimizante por el Teorema de minimalidad local, y

$$d(q, p) = L(\gamma) = |v|_p < r,$$

luego $\exp_p(B_r(0_p)) \subset B_r(p)$. Recíprocamente, si $d(p, q) < r$ entonces $q \in V_r(p)$ porque cualquier curva que se sale de $V_r(p)$ tiene longitud $\geq r$ por el teorema de minimalidad local. Existe entonces una única geodésica $\gamma \subset U_r(p)$ con velocidad inicial en $B_r(0_p)$ tal que $q = \exp_p(v)$, y $|v|_p = d(p, q) < r$, luego vale la otra inclusión.

La segunda afirmación para $S_r(p)$ tiene una prueba idéntica.

Respecto del Lema de Gauss, sean $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ y $q = \exp_p(v)$, con $d(p, q) = r$ y $w \in T_q S_r(p)$. Tomemos $\beta \subset S_r(p)$ tal que $\dot{\beta}(0) = w$, entonces se tiene $f(s) = d_g(\beta(s), p)^2 = r^2$ en un entorno de cero, y tomando para cada s el vector $v(s) = \exp_p^{-1} \beta(s)$, se verifica $|v(s)|_p = r$, $v(0) = v$. Derivando f en $s = 0$ se obtiene $0 = 2\langle v, v'(0) \rangle_p$. Pero $\beta(s) = \exp_p v(s)$, luego $w = \beta'(0) = (\exp_p)_* v'(0)$, y por el segundo ítem del Lema de Gauss,

$$\langle \dot{\gamma}(1), w \rangle = \langle D(\exp_p)_v v, D(\exp_p)_v v'(0) \rangle = \langle v, v'(0) \rangle = 0. \quad \square$$

Corolario 7.6.5 (Convexidad geodésica de las bolas riemannianas). Sea $p \in D$ y $S_r(p)$. Probar que si r es suficientemente pequeño, entonces

1. Si $\gamma(t) = \exp_q(tu)$ es una geodésica con $\gamma(0) = q \in S_r(p)$ y $\gamma'(0)$ es tangente a $S_r(p)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma|_{(-\varepsilon, \varepsilon)}$ permanece fuera de $\overline{B}_r(p)$
2. La bola $B_r(p)$ es geodésicamente convexa: dados $q_1, q_2 \in B_r(p)$, la única geodésica minimizante que une q_1, q_2 permanece dentro de $B_r(p)$ (sug: considerar $f(t) = \text{dist}(p, \gamma(t))^2$).

Demostración. La demostración sigue las líneas de la prueba del caso de superficies (Ejercicio 5.5.29), en este caso apoyada en el Corolario 7.2.3. \square

La distancia en (D, g) se define como el ínfimo de las longitudes de curvas que unen dos puntos dados. Decimos que D es *completa* si las geodésicas están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Con una demostración similar a la de las superficies (Teorema 5.5.8), se tiene la equivalencia entre completitud geodésica y completitud métrica.

Teorema 7.6.6 (Hopf-Rinow). *Si (D, g) es una variedad Riemanniana conexa, entonces son equivalentes:*

1. (D, dist) es un espacio métrico completo
2. D es geodésicamente completa
3. Existe $p \in D$ tal que $\text{Dom}(\exp_p) = T_p D$
4. Existe $p \in D$ tal que $\exp_p(\overline{B}_r(0_p)) = \overline{B}_r(p) = \{q \in D : \text{dist}(q, p) \leq r\}$ para todo $r \geq 0$,
5. Todo conjunto cerrado y acotado en (D, dist) es compacto.

En cualquiera de estos casos, para todo $x, y \in D$ existe una geodésica minimizante de D que los une.

En las secciones que siguen, presentamos algunos ejemplos centrales de variedades riemannianas definidas en abiertos de \mathbb{R}^d , en particular caracterizamos las variedades planas y presentamos un modelo de curvatura constante negativa, que resulta geodésicamente completo (el disco de Poincaré).

7.7. Variedades planas

Una variedad Riemanniana se dice *plana* cuando $\mathfrak{K}^D \equiv 0$. En ese caso es localmente isométrica al espacio Euclídeo, como muestra el siguiente resultado.

Teorema 7.7.1. *Sea (D, g) Riemanniana, con $\mathfrak{K} \equiv 0$. Entonces localmente la diferencial de la exponencial es el transporte paralelo y por ende $\exp_p : T_p D \rightarrow D$ es una isometría local, para todo $p \in D$.*

Demostración. Sea $\gamma \subset B_r(p)$ una geodésica (r pequeño) con $\gamma(0) = x$, $\dot{\gamma}(0) = v$. Si $\mathfrak{K} \equiv 0$, entonces el único campo de Jacobi η a lo largo de γ tal que $\eta(0) = 0$, $D_{\gamma'}\eta(0) = w \in T_x D$ está dado por $\eta(t) = tP(\gamma)_0^t w$ puesto que

$$D_t \eta = P(\gamma)_0^t w + 0$$

y entonces $D_t^2 \eta = D_t P(\gamma)_0^t w = 0 = R(\dot{\gamma}, \eta)\dot{\gamma}$. Por otra parte, por el Teorema 7.4.12, se tiene que $\eta(t) = D(\exp_p)_{tv} tw$ luego la diferencial de la exponencial coincide con el transporte paralelo y resulta así que \exp_p es una isometría local. \square

7.8. El espacio hiperbólico

Consideremos $D \subset \mathbb{R}^n$ el disco unitario abierto para la norma euclídea $D = \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| < 1\}$. Le damos a D la métrica Riemanniana definida, para $v, w \in T_p D \simeq \mathbb{R}^n$ como

$$\langle v, w \rangle_p = \frac{4\langle v, w \rangle}{(1 - \|p\|^2)^2}.$$

Esta es la *métrica de Poincaré*, y el disco con la geometría inducida por esta métrica se conoce como *disco de Poincaré*. Un cálculo directo arroja que el operador lineal L_p de (7.5) está dado por

$$L_p(v, w) = \frac{4}{1 - \|p\|^2} \langle v, w \rangle_p,$$

y a partir de él el operador bilineal Γ_p (7.8) está dado por

$$\Gamma_p(v, w) = \frac{2}{1 - \|p\|^2} (\langle p, v \rangle w + \langle p, w \rangle v - \langle v, w \rangle p). \quad (7.16)$$

En particular la ecuación de Euler de las geodésicas $\gamma'' = -\Gamma_\gamma(\gamma', \gamma')$ para esta métrica Riemanniana está dada por

$$\gamma'' = \frac{2}{1 - \|\gamma\|^2} (\|\gamma'\|^2 \gamma - 2\langle \gamma, \gamma' \rangle \gamma'). \quad (7.17)$$

7.8.1. Geodésicas e isometrías

Dado $v \in \mathbb{R}^n$, sea $k = \|v\|$ su longitud, y consideremos la función real

$$s(t) = \frac{1}{k} \frac{e^{2kt} - 1}{e^{2kt} + 1} = \frac{1}{k} \tanh(kt), \quad (7.18)$$

que verifica $s(0) = 0$, $s'(0) = 1$. Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la curva dada por $\gamma(t) = s(t)v$, que es en realidad una recta por el origen reparametrizada. Notemos que $\|\gamma(t)\| = s(t)\|v\| < 1$ luego $\gamma \subset D$; además $\gamma(0) = 0$ y $\gamma'(0) = v$.

Reemplazando en la ecuación diferencial de Euler (7.17), podemos ver que la verifica (dejamos este cálculo en manos del lector). Esto nos permite concluir que γ es la única geodésica de (D, g) con posición inicial $p = 0$ y velocidad inicial $\gamma'(0) = v$. Podemos notar que γ no está parametrizada con velocidad constante para la métrica usual de \mathbb{R}^n , ya que $\gamma'(t) = s'(t)v$, pero sin embargo al ser una geodésica tiene velocidad constante para la métrica Riemanniana (Teorema 7.2.2). En efecto un cómputo directo arroja

$$|\gamma'(t)|_{\gamma(t)}^2 = \frac{4\|\gamma'(t)\|^2}{(1 - \|\gamma(t)\|^2)^2} = 4k^2 = |\gamma'(0)|_{\gamma(0)}^2.$$

También es relevante notar que la geodésica se aproxima asintóticamente al borde del disco:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma(t) = \pm \frac{v}{\|v\|},$$

y de hecho al tratarse de (la reparametrización de) una recta por el origen, lo hace de forma ortogonal al borde del disco D .

Veamos ahora cómo son las geodésicas que pasan por puntos $p \neq 0$. Supongamos primero que $n = 2$. Identificando \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} y el punto p con un número complejo en el disco, consideramos la función holomorfa

$$f(z) = \frac{z - p}{\bar{p}z - 1} \quad (7.19)$$

que es de hecho un automorfismo del disco D , que verifica $f(f(z)) = z$. Este automorfismo intercambia 0 con p , y es sabido que que transforma rectas por

el origen en circunferencias por p , y de hecho estas circunferencias tienen la particularidad de que son perpendiculares al borde del disco. Dicho de otra manera, usando la parametrización de las geodésicas por el origen, si $\alpha(t) = s(t)v$, con $t \in \mathbb{R}$, entonces $\gamma(t) = f(\alpha(t))$ es un arco de circunferencia por p , con la particularidad de que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma'(t) = \lambda \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma(t).$$

La verificación de estos hechos es sencilla y queda a cargo del lector. Las geodésicas del disco están representadas en la Figura 7.1

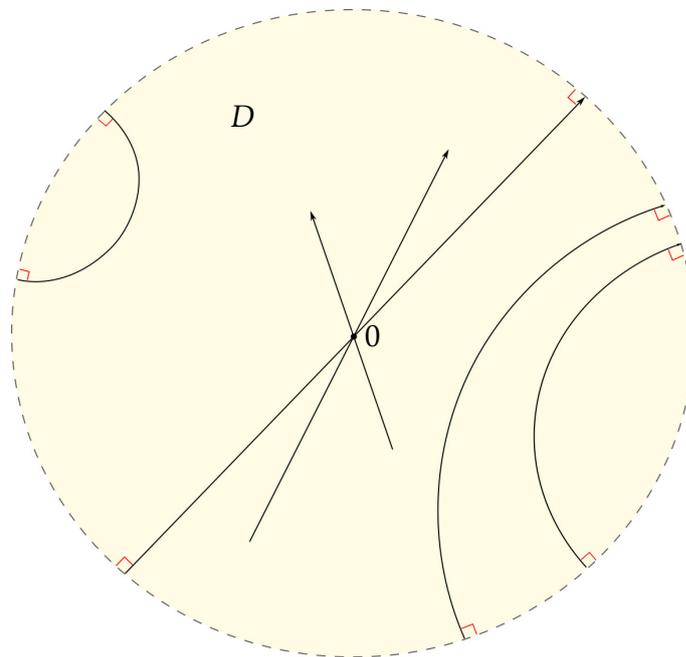


Figura 7.1: Geodésicas del disco de Poincaré

Afirmamos que f -o más bien f vista como función real- es una isometría para la métrica de Poincaré; esto probaría que las geodésicas por p son las circunferencias ortogonales al borde. Para probarlo, si identificamos f con un difeomorfismo real del disco, escribimos $f(z) = u(z) + iv(z)$, $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. La afirmación concreta es que

$$|DF_{(x,y)}(\dot{x}, \dot{y})|_{F(x,y)} = |(\dot{x}, \dot{y})|_{(x,y)}$$

para todo $(x, y) \in D$, $v = (\dot{x}, \dot{y}) \in \mathbb{R}^2$. Llamando $z = x + iy$, $\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y}$, por las

ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos que

$$DF_{(x,y)}(\dot{x}, \dot{y}) = f'(z)\dot{z} = -\frac{1 - \|p\|^2}{(\bar{p}z - 1)^2}\dot{z}.$$

Calculamos separadamente

$$1 - |f(z)|^2 = \frac{(1 - \|p\|^2)(1 - |z|^2)}{|\bar{p}z - 1|^2} \quad (7.20)$$

y entonces obtenemos la prueba de la afirmación:

$$\begin{aligned} |DF_{(x,y)}(\dot{x}, \dot{y})|_{F(x,y)}^2 &= |f'(z)\dot{z}|_{f(z)}^2 = \frac{|f'(z)|^2|\dot{z}|^2}{(1 - |f(z)|^2)^2} = \frac{(1 - \|p\|^2)^2}{|\bar{p}z - 1|^4(1 - |f(z)|^2)^2}|\dot{z}|^2 \\ &= \frac{4}{(1 - |z|^2)^2}|\dot{z}|^2 = |\dot{z}|_z^2 = |(\dot{x}, \dot{y})|_{(x,y)}^2. \end{aligned}$$

Teorema 7.8.1 (Geodésicas del disco de Poincaré). *Sea $p \in D, v \in T_p D$. La única geodésica que pasa por p y tiene velocidad inicial v , es un arco de circunferencia contenido en un plano por el origen y perpendicular a la superficie de la esfera. En particular (D, g) es completa y dados $p, q \in D \subset \mathbb{R}^n$, existe una única geodésica del disco que los une (dada por un tal arco de circunferencia).*

Demostración. Si $p = 0$ ya vimos que todas las geodésicas por p son rectas parametrizadas adecuadamente (con la función tangente hiperbólica que llamamos s en la ecuación (7.18) de más arriba). Sea entonces $0 \neq p \in D, v \in T_p D \simeq \mathbb{R}^n$. Si v es un múltiplo de p entonces la recta por el origen que pasa por p con velocidad inicial v es la única geodésica por p , por lo recién discutido. Podemos suponer entonces que v no está alineado con p , luego existe un único 2-plano Π en \mathbb{R}^n que contiene a p y a v . Como la métrica de Poincaré es invariante por transformaciones ortogonales, podemos suponer que este plano es el generado por e_1, e_2 , el cual identificamos con \mathbb{R}^2 como antes. Sea F la función de la discusión previa a este teorema (el automorfismo del disco unitario del plano), extendida como la identidad en el complemento ortogonal del plano Π . Tomamos $W = (\dot{x}, \dot{y}, 0) = -\frac{v}{1 - \|p\|^2}$, de manera tal que $DF_0(\dot{x}, \dot{y}, 0) = v$, y consideramos la geodésica por el origen $\alpha(t) = s(t)W$, que es una recta con velocidad inicial W . Tomamos entonces

$$\gamma(t) = F(\alpha(t)) = F(s(t)W)$$

que es un arco de circunferencia dentro del plano Π , ortogonal al borde, que verifica $\gamma(0) = F(0W) = F(0) = p$, y $\gamma'(0) = DF_0(s'(0)W) = DF_0(W) = v$. Como F es

una isometría, γ es la geodésica buscada. Las afirmaciones sobre la completitud de (D, g) y la existencia de geodésicas son consecuencia del teorema de Hopf-Rinow (Teorema 7.6.6), ya que las geodésicas están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. La unicidad es inmediata a partir del hecho de que hay una sola circunferencia que pasa por dos puntos distintos y tiene una velocidad dada en un tercero (el borde). \square

§ Atención que si bien F admite una extensión como difeomorfismo de la bola $D \subset \mathbb{R}^n$ para todo $n \geq 2$ (escribirlo), esta función no resulta una isometría para la métrica de Poincaré. Es decir F sólo es una isometría restringida en cada 2-plano por el origen cortado con el disco, y para obtener una isometría del disco si $n \geq 3$, debemos elegir un plano donde hacerla actuar y extenderla como la identidad en su complemento ortogonal.

Corolario 7.8.2 (Distancia hiperbólica en el disco de Poincaré). Si $p, q \in D$ entonces

$$\text{dist}(p, q) = 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\|p - q\|}{\sqrt{1 - \|p\|^2} \sqrt{1 - \|q\|^2}} \right).$$

Demostración. Como exist una única geodésica que une p, q , por el teorema de Hopf-Rinow su longitud debe coincidir con la distancia entre estos puntos. Comencemos calculando la distancia entre $p = 0$ y $q = z \in D$. Para ello tenemos la geodésica de la discusión previa al teorema anterior, que es la recta $\alpha(t) = s(t)v$ donde $s(t) = k^{-1} \tanh(kt)$ y $k = \|v\|$. Como $s(0) = 0$, esta geodésica une $p = 0$ con $z = \alpha(1) = s(1)v$. Entonces

$$\text{dist}(0, z) = L(\alpha) = \int_0^1 |\dot{\alpha}_t|_{\alpha_t} dt = |\dot{\alpha}_0|_{\alpha_0} = 2\|s'(0)v\| = 2k$$

puesto que las geodésicas tienen velocidad constante para la métrica. Por otro lado, si $q = z = \alpha(1) = s(1)v = k^{-1} \tanh(k)v$, deducimos tomando normas que $\|z\| = \tanh(k)$. Luego

$$\text{dist}(0, z) = 2k = 2 \tanh^{-1}(\|z\|) = 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\|z\|}{\sqrt{1 - \|z\|^2}} \right).$$

Tomamos ahora p, q genéricos y consideramos la isometría f de (7.19) -definida en el plano que contiene $0, p, q$ y extendida como la identidad en el complemento ortogonal-. Recordemos que f intercambia 0 con p , y denotamos $p = f(0), q =$

$f(z)$. Notamos que como f es su propia inversa, $z = f(q)$ y luego $\|z\| = \|f(q)\|$. Entonces

$$\text{dist}(p, q) = \text{dist}(f(0), f(z)) = \text{dist}(0, z) = 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\|f(q)\|}{\sqrt{1 - \|f(q)\|^2}} \right).$$

Utilizando la ecuación (7.20) manipulamos esta expresión hasta obtener la fórmula enunciada para la métrica. \square

Usando identidades trigonométricas, pueden obtenerse varias expresiones distintas para la métrica de Poincaré en el disco. También es digno de mención que en el caso $n = 2$, utilizando la identificación con el plano complejo, la prueba del corolario anterior muestra que

$$\text{dist}(p, q) = 2 \tanh^{-1} \left| \frac{p - q}{\bar{p}q - 1} \right|.$$

Observación 7.8.3 (Transporte paralelo en el disco). Dados $p \in D$, y una geodésica $\alpha \subset D$, queremos calcular $P_0^1(\alpha)z$ con $z \in T_p D$. Consideremos primero el caso especial $p = 0$, donde la geodésica es $\alpha(t) = s(t)v$ con $s(t) = k^{-1} \tanh(kt)v$ y $k = \|v\|$ es una recta. Afirmamos que el transporte paralelo de z a lo largo de α está dado por

$$P_0^t(\alpha)z = \mu(t) = (1 - s^2(t)k^2)z = \frac{1}{\cosh^2(kt)}z.$$

En efecto, μ verifica la condición inicial $\mu_0 = z$, y además verifica la ecuación diferencial

$$\dot{\mu} = \frac{-2s(t)s'(t)k^2}{1 - s^2(t)k^2} \mu(t),$$

que es la ecuación diferencial del transporte $\dot{\mu} = -\Gamma_\alpha(\dot{\alpha}, \mu)$ para el operador bilineal de la conexión Γ dado por (7.16). Luego $P_0^1(\alpha)z = \cosh^{-2}(\|v\|)z$.

Ahora si $p \in D$, es no nulo, estudiamos el caso $n = 2$ donde tenemos la identificación con el plano complejo. Nuevamente usamos la isometría f para escribir $p = f(0)$, $w = Df_0(z) = -(1 - \|p\|^2)z$, y para la geodésica β dada por $\beta(t) = f(\alpha(t)) = f(s(t)v)$ el Corolario 7.3.6 nos dice que $\eta = Df_\alpha \mu$ es el transporte paralelo de w a lo largo de β . Explícitamente

$$\eta(t) = Df_{\alpha(t)} \mu(t) = -\frac{1 - \|p\|^2}{(\bar{p}\alpha(t) - 1)^2} \mu(t),$$

y en particular

$$P_0^1(\beta)(w) = -\frac{(1 - \|p\|^2)z}{(\bar{p}\alpha(1) - 1)^2 \cosh^2(k)} = \frac{1}{\cosh^2(k)} \frac{1}{(s(1)\bar{p}v - 1)^2} w.$$

donde $v = -(1 - \|p\|^2)\beta'_0$ y $k = \|v\|$. El producto de números complejos que aquí aparece, puede reescribirse en términos de pares ordenados del plano.

Una advertencia: esta fórmula (y el razonamiento) sólo son válidos para el caso del disco plano ($n = 2$). Puede usarse también en el caso en el que la velocidad inicial de β y el vector w a trasladar estén en el mismo plano por el origen, ya que allí repetimos el razonamiento de las demostraciones anteriores, extendiendo f como la identidad en el complemento ortogonal de dicho plano.

Para $n \geq 3$, razonamos de la siguiente manera: dado $p \in D$, β geodésica que pasa por p con velocidad inicial β'_0 , sabemos que β está contenida en un plano π por el origen, y es entonces la imagen de una geodésica $\alpha(t) = s(t)v$ como antes (vamos a suponer, después de una transformación ortogonal conveniente, que este plano es el plano $(x, y, 0)$ como antes). Dado $w \in T_p D$, descomponemos $w = w_\parallel + w_\perp$ en sus componentes paralela (en el plano π) y su componente ortogonal. Notemos que, en particular $w_\perp \perp \beta$ y $w_\perp \perp \beta'$ para todo t . Sea z tal que $Df_0(z) = w_\parallel$ (recordemos que extendemos a f como la identidad de plano $(x, y, 0)$). Sea $a(t) = (1 - \|\beta_t\|^2)(1 - \|p\|^2)^{-1}$, que es la única solución de la ecuación diferencial

$$\dot{a}_t = \frac{-2}{1 - \|\beta_t\|^2} \langle \beta_t, \beta'_t \rangle a_t$$

con $a(0) = 1$. Definimos $\eta(t) = Df_{\alpha_t} \mu_t + a_t w_\perp$ con μ_t el transporte paralelo de z a lo largo de α . Claramente $\eta(0) = Df_0 \mu_0 + w_\perp = Df_0(z) + w_\perp = w_\parallel + w_\perp = w$, y por otro lado si D_t denota la derivada covariante a lo largo de $\beta = f \circ \alpha$ entonces

$$\begin{aligned} D_t \eta &= D_t(Df_{\alpha_t} \mu) + D_t(a w_\perp) = D_t(Df_{\alpha_t} \mu) + \dot{a} w_\perp + \Gamma_\beta(\beta', a w_\perp) \\ &= Df_{\alpha_t}(D_t \mu) + \dot{a} w_\perp + \frac{2a}{1 - \|\beta\|^2} \{ \langle \beta, \beta' \rangle w_\perp + \langle \beta, w_\perp \rangle \beta' - \langle \beta', w_\perp \rangle \beta \} \\ &= Df_{\alpha_t}(0) + \dot{a} w_\perp + \frac{2a}{1 - \|\beta\|^2} \{ \langle \beta, \beta' \rangle w_\perp + 0 \beta' - 0 \beta \} \\ &= \dot{a} w_\perp + \frac{2a}{1 - \|\beta\|^2} \langle \beta, \beta' \rangle w_\perp = 0. \end{aligned}$$

Esto prueba que η verifica la ecuación de transporte y por ende

$$P_0^1(\beta)w = Df_{\alpha(1)} \mu(1) + a(1)w_\perp.$$

Notemos que $1 - \|\beta\|^2 = 1 - \|f(\alpha)\|^2$ puede reescribirse en términos de α y su norma por la ecuación (7.20), y también que $1 - \|\alpha(t)\|^2 = \cosh^{-2}(kt)$. Esto nos permite escribir

$$P_0^1(\beta)(w) = \cosh^{-2}(k) \left\{ \frac{1}{(s(1)\bar{p}v - 1)^2} w_{\parallel} + \frac{1}{|s(1)\bar{p}v - 1|^2} w_{\perp} \right\}.$$

Resumiendo las observaciones y cuentas del apartado anterior, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 7.8.4 (Transporte paralelo en el disco de Poincaré de dimensión n). *Sea β una geodésica en D y sea $p = \beta_0$, sea π el 2-plano por el origen que contiene a β y sea U la transformación ortogonal de \mathbb{R}^n que transforma π en el plano $(x, y, 0) \simeq \mathbb{C}$. Sea $w = w_{\parallel} + w_{\perp} \in T_p D \simeq \pi \oplus \pi^{\perp} \simeq \mathbb{R}^n$. Sea $v = -(1 - \|p\|^2)^{-1} U \beta'_0$, sean $k = \|v\|$ y $s(t) = k^{-1} \tanh(kt)$. Entonces el transporte paralelo de w a lo largo de β está dado por*

$$P_0^t(\beta)(w) = \cosh^{-2}(kt) \left\{ U^{-1} \left(\frac{1}{(s(t)\bar{U}p v - 1)^2} U w_{\parallel} \right) + \frac{1}{|s(t)\bar{U}p v - 1|^2} w_{\perp} \right\},$$

donde el producto complejo dentro de $U^{-1}(\ast)$ se reescribe como un vector de $(x, y, 0)$.

7.8.2. El disco como modelo de curvatura negativa constante

Veremos en este apartado que el disco de Poincaré tiene curvatura seccional constante, igual a -1 en todos los puntos del mismo. A tal efecto calculamos primero la expresión para el tensor de curvatura, utilizando la fórmula

$$R_p(x, y)z = \Gamma_p(x, \Gamma_p(y, z)) - \Gamma_p(y, \Gamma_p(x, z)) + D\Gamma_p(x)(y, z) - D\Gamma_p(y)(x, z),$$

donde vemos que primero resulta necesario calcular la diferencial de Γ . Tomando una curva $p = p_t$ con $p_0 = p$, $\dot{p}(0) = \dot{p}$, derivamos la fórmula obtenida en (7.16) en $t = 0$. Será conveniente llamar $\alpha = \frac{2}{1 - \|p\|^2}$. Entonces

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Gamma_{p_t}(v, w) = \alpha^2 \{ \langle p, v \rangle w + \langle p, w \rangle v - \langle v, w \rangle p \} + \alpha \{ \langle \dot{p}, v \rangle w + \langle \dot{p}, w \rangle v - \langle v, w \rangle \dot{p} \}.$$

Un cálculo elemental (aunque largo) arroja

$$R_p(x, y)z = \alpha^2 (-\langle y, z \rangle \|p\|^2 x + \langle x, z \rangle \|p\|^2 y) + 2\alpha (\langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x)$$

(los términos que son coeficientes de z , así como los de p , se cancelan). Ahora agrupamos los términos que acompañan a los vectores con x y los términos con y , y notando que $\alpha\|p\|^2 + 2 = \alpha$, obtenemos el tensor de curvatura

$$R_p(x, y)z = \alpha^2(\langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x) = \langle x, z \rangle_p y - \langle y, z \rangle_p x.$$

Entonces

$$\langle R_p(x, y)y, x \rangle_p = \langle x, y \rangle_p^2 - \|x\|_p^2 \|y\|^2 = -A(x, y)^2.$$

donde A es el área del paralelogramo generado por x, y . Ahora recordamos que la fórmula de la curvatura seccional está dada, para cada 2-plano $\pi \subset T_p D \simeq \mathbb{R}^n$, por la fórmula $sec_\pi = \langle R_p(x, y)y, x \rangle_p / A^2(x, y)$. Esto prueba que la curvatura seccional del disco de Poincaré es constante e igual a -1 .

Observación 7.8.5 (Formas espaciales de curvatura negativa constante). Dado $R > 0$, tomamos $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < R\}$ la bola abierta de radio R y le damos la métrica

$$\langle v, w \rangle_p = 4R^4 \frac{\langle v, w \rangle}{(R^2 - \|p\|^2)^2}.$$

Dejamos como ejercicio para el lector probar que esta variedad Riemanniana tiene curvatura constante negativa, igual a $-R$. Notamos que a diferencia del modelo de la pseudoesfera (Sección 6.6), estos modelos son variedades *completas* y de hecho, en rigor, el nombre *forma espacial* se reserva para las variedades completas de curvatura constante. De acuerdo al Teorema de Hilbert-Efimov (Teorema 6.6.4 y el comentario que le sigue), no es posible obtener una forma espacial de curvatura negativa como superficie en \mathbb{R}^3 , y eso hace al disco de Poincaré un modelo esencial para estas geometrías.

Observación 7.8.6 (Otros modelos de curvatura negativa). Hay varios modelos distintos de variedades de curvatura negativa constante, todos ellos interesantes. Nos limitamos aquí a mencionar el *semiplano de Poincaré*, dado por el conjunto

$$\Pi^+ = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : t > 0\}$$

provisto con la métrica (para $v, w \in \mathbb{R}^n \simeq T_{(x,t)}\Pi^+$) dada por

$$\langle v, w \rangle_{(x,t)} = R^2 \frac{1}{t^2} \langle v, w \rangle,$$

donde $R > 0$. Por las consideraciones de esta sección, podemos concentrarnos en estudiar el caso $n = 2$, $R = 1$. Sea $T : D \rightarrow \Pi^+$ dada por la transformada de Cayley

$$T(z) = -i \frac{z+i}{z-i}$$

(nuevamente identificamos elementos del plano \mathbb{R}^2 con elementos del plano complejo \mathbb{C}). Dejamos como ejercicio para el lector probar que T es una isometría global entre el disco de Poincaré y el semiplano de Poincaré, y que las geodésicas de este último modelo son rectas verticales o bien semicircunferencias con centro en el eje x .

7.9. El espacio de matrices positivas

En esta sección presentamos una variedad Riemanniana de curvatura no positiva (y no constante), modelado por las matrices simétricas de autovalores estrictamente positivos. Este es otro modelo interesante y con mucha estructura geométrica que puede describirse en términos de la estructura algebraica del conjunto.

Consideramos $M_n = M_n(\mathbb{C})$ las matrices con entradas complejas de $n \times n$, y denotamos M_n^h a las matrices hermitianas o simétricas $\bar{A} = A^t$. Será conveniente denotar $A^* = \bar{A}^t$ con lo cual una matriz es hermitiana si y sólo si $A^* = A$. Notemos que $M_n^h \simeq \mathbb{R}^d$ donde $d = n(n-1) + n = n^2$.

Con $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ denotamos el conjunto de los autovalores de A . También notemos que toda matriz hermitiana tiene autovalores reales. Sea

$$P = \{A \in M_n^h : \sigma(A) \subset (0, +\infty)\} \subset M_n^h,$$

llamado *cono de matrices positivas inversibles*, o más brevemente el cono positivo abierto.

Observación 7.9.1 (El espacio P como cono abierto). El nombre obedece al hecho de que su clausura se puede caracterizar (ejercicio para el lector) como el conjunto

$$\bar{P} = \{X \in M_n^h : \langle X\xi, \xi \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{C}^n\},$$

y es fácil verificar que este se trata de un cono en el siguiente sentido: si $X, Y \in \bar{P}$, entonces $sX + tY \in \bar{P}$ para todo $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Afirmamos que P es un conjunto abierto en M_n^h : para ello basta observar que el polinomio característico de dos matrices cercanas tiene coeficientes cercanos, y por ende tendrá raíces cercanas. Luego si todos los autovalores de $A \in P$ son estrictamente positivos, lo mismo es cierto para toda matriz hermitiana cercana a A .

Observación 7.9.2 (Logaritmos). También es necesario mencionar aquí que toda matriz $A \in P$ tiene un único logaritmo hermitiano: para calcularlo podemos diagonalizar $P = UDU^*$, con U matriz unitaria y D la matriz diagonal de los autovalores de P . Como todos los autovalores de D son estrictamente positivos definimos $\ln(D)$ como la matriz diagonal con entradas dadas por los logaritmos de los autovalores de P , y entonces $\ln(P) = U\ln(D)U^*$ es hermitiana y verifica $\exp(\ln(P)) = P$. De la misma manera podemos definir potencias positivas o negativas de A , en particular será de utilidad la raíz cuadrada de A como veremos luego.

Con estas observaciones tenemos $T_A P \simeq M_n^h$ para toda $A \in P$. Definimos

$$\langle V, W \rangle_A = \text{Tr}(A^{-1}VA^{-1}W). \quad (7.21)$$

Esto define una métrica riemanniana en el abierto P de matrices positivas e inversibles, como veremos a continuación.

Si A hermitiana, podemos diagonalizarla, es decir escribimos $A = CDC^{-1}$ donde C es una matriz inversible y D es una matriz diagonal, de hecho $C^* = C^{-1}$ es una matriz unitaria y $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ es la matriz que tiene a los autovalores de A en la diagonal. Como son todos números positivos, podemos definir $D^{-1/2} = \text{diag}(\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_n^{-1/2})$, y con esto definimos $A^{-1/2} = CD^{-1/2}C^*$. Notemos que $A^{-1/2} \in P$ y además $(A^{-1/2})^2 = A$, esta es la *única raíz cuadrada positiva* de $A \in P$. Entonces

$$\begin{aligned} \|V\|_A^2 &= \text{Tr}(A^{-1}VA^{-1}V) = \text{Tr}(A^{-1/2}A^{-1/2}VA^{-1}V) = \text{Tr}(A^{-1/2}VA^{-1}VA^{-1/2}) \\ &= \text{Tr}((A^{-1/2}VA^{-1/2})^2) = \text{Tr}(X^2), \end{aligned}$$

para $X = A^{-1/2}VA^{-1/2}$ donde usamos la propiedad cíclica de la traza, $\text{Tr}(BC) = \text{Tr}(CB)$. Como $X^* = X$, también la podemos diagonalizar $X = TDT^*$ con $T^* = T^{-1}$ y además $D = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ la matriz diagonal con los autovalores (reales) de X . Luego $X^2 = TD^2T^*$ y entonces

$$\|V\|_A^2 = \text{Tr}(X^2) = \text{Tr}(TD^2T^*) = \text{Tr}(T^*TD^2) = \text{Tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0,$$

y de hecho $\|V\|_A^2 = 0$ si y solo si $x_i = 0$ para todo i , y esto es equivalente a $X = 0$, que a su vez es equivalente a $V = 0$. Hemos probado que para cada $A \in P$, la forma bilineal (7.21) es un producto interno y por ende define una métrica Riemanniana en el conjunto P .

Observación 7.9.3 (Norma de Frobenius). Usualmente, la norma que proviene de este producto interno se denota $\|X\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(X^2)}$ se denomina *norma de Frobenius* o *norma de Hilbert-Schmidt* (también conocida como norma 2 de las matrices). Por este motivo abreviamos $\langle X, Y \rangle_2 = \text{Tr}(XY)$, y este es el producto interno que usaremos en el espacio ambiente $\mathbb{R}^d \simeq M_n(\mathbb{C})_{sim}$. Dejamos como ejercicio para el lector hallar una base ortonormal para este producto interno y también probar que

$$\|X\|_2^2 = \sum_{i,j} |x_{ij}|^2$$

donde $(x_{ij})_{j=1,\dots,n}$ son las entradas de X (esta expresión es invariante por cambios de base). Recordemos que en este caso el espacio euclideo modelo es el de las matrices hermitianas con coeficientes complejos de tamaño $n \times n$, pensado como espacio vectorial real, al cual podemos identificar con \mathbb{R}^d con $d = n(n-1) + n = n^2$. La norma definida por la métrica riemanniana es entonces

$$\begin{aligned} |X|_A^2 &= \langle X, X \rangle_A = \text{Tr}(A^{-1}XA^{-1}X) = \text{Tr}(A^{-1/2}A^{-1/2}XA^{-1/2}A^{-1/2}X) \\ &= \text{Tr}(A^{-1/2}XA^{-1/2}A^{-1/2}XA^{-1/2}) = \|A^{-1/2}XA^{-1/2}\|_2^2 \end{aligned}$$

por la propiedad tracial $\text{Tr}(XY) = \text{Tr}(YX)$. Esto es

$$|X|_A = \|A^{-1/2}XA^{-1/2}\|_2. \quad (7.22)$$

Pasando a la notación de minúsculas para los puntos $p \in P$, podemos reescribir la métrica como

$$\langle V, W \rangle_p = \text{Tr}(p^{-1}Vp^{-1}W) = \langle g(p)V, W \rangle_2,$$

donde la métrica g está dada por

$$g(p)V = p^{-1}Vp^{-1}.$$

A partir de $pp^{-1} = 1$ (la matriz identidad de M_n), tomando una curva $p = p_t$ y derivando notamos que $\dot{p}p^{-1} + p(p^{-1})\dot{} = 0$, luego $(p^{-1})\dot{} = -p^{-1}\dot{p}p^{-1}$. Entonces

$$Dg_p(\dot{p})V = -p^{-1}\dot{p}p^{-1}Vp^{-1} - p^{-1}Vp^{-1}\dot{p}p^{-1} = -p^{-1}(\dot{p}p^{-1}V + Vp^{-1}\dot{p})p^{-1}.$$

Aquí $V, \dot{p} \in T_p D = M_n^h \simeq \mathbb{R}^d$. De aquí tenemos

$$\langle Dg_p(v)v, z \rangle = -2\text{Tr}(p^{-1}vp^{-1}vp^{-1}z)$$

y también

$$-\frac{1}{2}\langle Dg_p(z)v, v \rangle = \frac{1}{2}\text{Tr}(p^{-1}zp^{-1}vp^{-1}v + p^{-1}vp^{-1}zp^{-1}v) = \text{Tr}(p^{-1}vp^{-1}vp^{-1}z)$$

usando la propiedad cíclica de la traza $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. Entonces el operador cuadrático (7.10) verifica

$$\text{Tr}(p^{-1}F_p(v)p^{-1}z) = \langle g(p)F_p(v), z \rangle = -\text{Tr}(p^{-1}v^2p^{-1}z).$$

Como esto debe ser cierto para todo z , resulta $p^{-1}F_p(v)p^{-1} = -p^{-1}vp^{-1}vp^{-1}$, es decir $F_p(v) = -vp^{-1}v$. Polarizando (Observación 7.1.10) recuperamos el operador bilineal Γ de la conexión de Levi-Civita:

$$\Gamma_p(v, w) = -vp^{-1}w - wp^{-1}v.$$

7.9.1. Geodésicas y distancia

El primer punto es obtener las geodésicas de la conexión, para ello recordamos que deben verificar la ecuación de Euler

$$\gamma_t'' = -\Gamma_{\gamma_t}(\gamma_t', \gamma_t') = -F_{\gamma_t}(\gamma_t') = \gamma_t' \gamma_t^{-1} \gamma_t'.$$

Si tomamos $\gamma_t = e^{tX}$ con X hermitiana, $\gamma_t' = e^{tX}X = Xe^{tX}$ y

$$\gamma_t'' = e^{tX}X^2 = e^{tX}Xe^{-tX}e^{tX}X = \gamma_t' \gamma_t^{-1} \gamma_t',$$

luego γ verifica la ecuación diferencial de Euler y es una geodésica por $P = 1$, de hecho es la única geodésica por 1 cuya velocidad inicial es el vector genérico $X \in M_n^h \simeq T_1P$.

Puede el lector verificar que dadas dos matrices $A, B \in P$, la curva $\gamma_{A,B} : \mathbb{R} \rightarrow P$ dada por

$$\gamma_{A,B}(t) = A^{1/2} \exp(t \ln(A^{-1/2}BA^{-1/2}))A^{1/2}$$

es una geodésica y conecta los puntos A, B para t en el intervalo $[0, 1]$ (Observación 7.9.2). En particular (P, g) es geodésicamente completa y por ende completa por el teorema de Hopf-Rinow.

No es difícil ver que esta geodésica es la única que une dos puntos dados (ejercicio para el lector, probarlo primero para $A = 1$ usando la unicidad del logaritmo de B), luego la distancia geodésica está dada por

$$\begin{aligned} \text{dist}(A, B) &= L(\gamma_{A,B}) = \int_0^1 |\gamma'_t|_{\gamma_t} = |\gamma'_0|_{\gamma_0} \\ &= |A^{1/2} \ln(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2}|_A = \|\ln(A^{-1/2} B A^{-1/2})\|_2 \end{aligned}$$

donde usamos que las geodésicas tienen velocidad constante y la fórmula (7.22).

7.9.2. Isometrías y campos de Killing

Este espacio tiene muchas isometrías y por lo tanto tiene muchos campos de Killing. Consideremos primero $X \in M_n^h$ y la función $g : P \rightarrow P$ dada por

$$g(A) = e^{X/2} A e^{X/2}.$$

Claramente g preserva las matrices inversibles, pero además si A es positiva entonces

$$\langle g(A)\xi, \xi \rangle = \langle A^{1/2} A^{1/2} e^{X/2} \xi, e^{X/2} \xi \rangle = \|A^{1/2} e^{X/2} \xi\|^2 \geq 0$$

luego $g(A)$ es una matriz positiva en inversible (aquí $\xi \in \mathbb{C}^n$ y \langle, \rangle es el producto interno de \mathbb{C}^n , Observación 7.9.1). Por otro lado su diferencial se calcula como

$$Dg_A(Z) = e^{X/2} Z e^{X/2}$$

y entonces

$$\begin{aligned} |Dg_A(Z)|_{g(A)}^2 &= \text{Tr}(g(A)^{-1} Dg_A(Z) g(A)^{-1} Dg_A(Z)) \\ &= \text{Tr}((e^{X/2} A e^{X/2})^{-1} e^{X/2} Z e^{X/2} (e^{X/2} A e^{X/2})^{-1} e^{X/2} Z e^{X/2}) \\ &= \text{Tr}(Z A^{-1} Z A^{-1}) = |Z|_A^2 \end{aligned}$$

lo que prueba que g es una isometría de (P, g) . Con un argumento similar, para cualquier $G \in GL(\mathbb{C}^n)$ (una matriz inversible) la aplicación

$$Z \mapsto GZG^*$$

es una isometría de P . En particular

$$Z \mapsto A^{1/2} (A^{-1/2} B A^{-1/2})^{1/2} A^{-1/2} Z A^{-1/2} (A^{-1/2} B A^{-1/2})^{1/2} A^{1/2}$$

es una isometría que envía A en B , luego tenemos un grupo (el grupo lineal) que actúa de manera transitiva e isométrica en P , esto hace de P un *espacio homogéneo*.

Invitamos al lector a probar que esta última fórmula, pensada ahora como aplicación de \mathbb{R}^d en \mathbb{R}^d (o más específicamente, de $T_A P$ en $T_B P$) es la fórmula del transporte paralelo a lo largo de $\gamma_{A,B}$ (Teorema 7.3.2).

Si le ponemos un parámetro real a la isometría g , obtenemos una curva de isometrías

$$g_t(A) = e^{tX/2} A e^{tX/2}$$

que es además un grupo a un parámetro. Luego es el flujo de un campo, el campo

$$X(A) = g'_0(A) = \frac{1}{2}(XA + AX),$$

y se trata entonces de un campo de Killing métrico en P (Sección 7.5.1).

7.9.3. Curvatura

Directamente de la definición en coordenadas del tensor de curvatura que obtuvimos en (7.13), y de la fórmula que obtuvimos para Γ en la sección anterior, se calcula el tensor de curvatura de la variedad de matrices positivas de la siguiente manera: para $x \in T_A P$ denotamos $\tilde{x} = A^{-1/2} x A^{-1/2}$ y hacemos lo mismo para $y, z \in T_A P$. Entonces

$$R_A(x, y, z) = \frac{-1}{4} A^{1/2} [\tilde{x}, [\tilde{y}, \tilde{z}]] A^{1/2}.$$

Supongamos que x, y forman una base ortonormal (para el producto A) del subespacio $\pi \subset T_A P \simeq \mathbb{R}^d$. Entonces manipulando la expresión y usando la propiedad tracial resulta ue la curvatura seccional según el Lema (7.4.5) está dada por

$$sec_A(\pi) = \langle R_A(x, y)x, y \rangle_A = \frac{-1}{4} Tr(A^{-1/2} [\tilde{x}, [\tilde{x}, \tilde{y}]] A^{-1/2}) = -\frac{1}{2} Tr(\tilde{x}^2 \tilde{y}^2) + \frac{1}{2} Tr(\tilde{x} \tilde{y} \tilde{x} \tilde{y}).$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} Tr(xyxy) - Tr(x^2y^2) &= Tr(xy(yx)^*) - Tr(xy(xy)^*) = \langle xy, yx \rangle_2 - \|xy\|_2^2 \\ &= \langle xy, yx \rangle_2 - \|xy\|_2 \|yx\|_2 \leq 0 \end{aligned}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Esto nos dice que la curvatura seccional del espacio de matrices positivas es no positiva en todo punto y para todo plano. Veremos en la próxima sección que esta propiedad contiene una gran cantidad de información geométrica de la variedad riemanniana.

7.10. Una relación entre curvatura y geodésicas

Para cerrar este texto vamos a mostrar cómo la curvatura condiciona la velocidad a la cual las geodésicas que pasan por un punto se separan, y por ende condiciona la métrica y la geometría de la variedad. Esto está motivado por lo que observamos en el ejemplo previo del espacio de matrices positivas inversibles cuya curvatura seccional es siempre no positiva. Aprovechamos para introducir brevemente una noción muy relevante de la geometría métrica: los triángulos de comparación (Definición 7.10.5).

Por supuesto, sólo presentaremos una versión local de este fenómeno vinculado a la curvatura, que se puede globalizar para variedades riemannianas abstractas y está vinculado con lo que se conoce como Teorema de Cartan-Hadamard (ver por ejemplo el texto [9] y las referencias que allí se dan).

La siguiente proposición hace explícita la relación entre los campos de Jacobi a lo largo de geodésicas y la curvatura seccional de una variedad Riemanniana (M, g) , a través de las derivadas de la norma del campo.

Proposición 7.10.1. Sean (M, g) Riemanniana, $\alpha(t) = \exp_p(tv)$ una geodésica de M y η campo de Jacobi a lo largo de α . Sea $f(t) = |\eta|_{\alpha_t}$. Entonces:

1. Para aquellos t tales que $\eta(t) \neq 0$, se tiene $f'(t) = \frac{1}{|\eta|} \langle D_t \eta, \eta \rangle$,

$$f''(t) = \frac{1}{|\eta|^3} (|D_t \eta|^2 |\eta|^2 - \langle D_t \eta, \eta \rangle^2) + \frac{1}{|\eta|} \langle R(\dot{\alpha}, \eta) \dot{\alpha}, \eta \rangle,$$

y

$$f''(t) \geq -\frac{1}{|\eta|} \sec_\pi(\dot{\alpha}, \eta) A(\dot{\alpha}, \eta).$$

2. Si $\eta(0) = 0$ y $\dot{\eta}(0) = w \in T_p M$, entonces f es derivable tres veces en el origen, siendo

$$f'(0) = |w|_p, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = \frac{1}{|w|_p} \langle R_p(v, w)v, w \rangle_p.$$

Demostración. Las expresiones de f' , f'' son inmediatas de la compatibilidad de la métrica y la definición de campo de Jacobi (ejercicio). La desigualdad para f'' se obtiene utilizando la definición de curvatura seccional y la desigualdad Cauchy-Schwarz:

$$|D_t \eta| |\eta| \geq |\langle D_t \eta, \eta \rangle|.$$

Las derivadas en el origen se calculan notando que $\eta(t) = tw + o(t^2)$. \square

7.10.1. Espacios de curvatura no positiva

Definición 7.10.2. Sea (M, g) Riemanniana. Diremos que M tiene curvatura seccional no positiva ($sec^M \leq 0$) si $sec_\pi \leq 0$ para todo π que sea un 2-plano en $T_p M$, para todo $p \in M$.

Teorema 7.10.3. Sea (M, g) Riemanniana. Entonces $sec^M \leq 0$ si y sólo si para todo $p \in M$, para todo $v \in \text{Dom}(\exp_p)$ y para todo $w \in T_p M$, $D(\exp_p)_v : T_p M \rightarrow T_{\exp_p(v)} M$ es inversible y se verifica

$$|D(\exp_p)_v w|_{\exp_p(v)} \geq |w|_p.$$

Demostración. Supongamos que M tiene curvatura no positiva, tomamos una geodésica $\alpha(t) = \exp_p(tv)$, tomamos η el único campo de Jacobi a lo largo de α tal que $\eta(0) = 0$, $D_t \eta(0) = w$. Por el Teorema 7.4.12 que da la identificación entre $\eta(t)/t$ y la diferencial de la exponencial, tenemos que probar que $|\eta_t|_{\alpha_t} \geq t|w|_p$, y que $\eta(t) \neq 0$ para todo $t \in (0, 1]$. Sea $f(t) = |\eta_t|_{\alpha_t}$, equivalentemente tenemos que probar que $f(t) \geq t|w|$ y que f sólo se anula en $t = 0$. De no ser así, supongamos que η se anula en $t_n \in (0, 1]$ con $t_n \rightarrow 0$. Entonces

$$w = \dot{\eta}(0) = \lim_n \eta(t_n)/t_n = 0$$

lo cual es absurdo. La otra posibilidad es que exista $t_0 > 0$ que es el mínimo de los $t \in (0, 1]$ donde η se anula. Como la curvatura de M es no positiva, por la proposición previa se tiene que en el intervalo $(0, t_0)$ la función f es convexa, es decir $f'' \geq 0$. Por otra parte, como $f'(0) = \|w\|_p > 0$, se deduce que f es creciente en $[0, t_0)$ y como $f(0) = 0$ se tiene un absurdo pues f no se anulaba en $(0, t_0)$. Entonces f no se anula fuera de $t = 0$ y esto prueba que la diferencial de \exp_p es inyectiva; se trata entonces de un isomorfismo. Sea $h(t) = f(t) - t|w| = |\eta(t)| - t|w|$ para $t \in [0, 1]$. Entonces en el intervalo $[0, 1]$ tenemos que $h'(t) = f'(t) - |w|_p$,

$h''(t) = f''(t) \geq 0$ nuevamente por la proposición previa. Como $h'(0) = f'(0) - |w|_p = 0$, h también es creciente y se tiene la desigualdad enunciada para la norma de la diferencial de la exponencial.

Supongamos ahora que vale la desigualdad enunciada para la exponencial de M . Sea $p \in M$, $v, w \in T_p M$. Si $\alpha(t) = \exp_p(tv)$ y η es el único campo de Jacobi a lo largo de α tal que $\eta(0) = 0$, $\dot{\eta}(0) = w$, se tiene por hipótesis

$$f(t) = |\eta(t)|_{\alpha(t)} \geq t|w|_p$$

donde f es la función de la Proposición 7.10.1. Sea $h(t) = f(t) - t|w|_p$, entonces $h(t) \geq 0$ en $[0, 1]$, y por la misma proposición se tiene $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$, mientras que

$$h'''(0) = \frac{1}{|w|_p} \langle R_p(v, w)v, w \rangle_p.$$

Si fuese $\sec(v, w) > 0$, se tendría $h'''(0) < 0$, lo cual diría que h es estrictamente decreciente en un entorno de cero, y esto es absurdo. Luego $\sec(v, w) \leq 0$, lo que prueba que $\sec^M \leq 0$. \square

Corolario 7.10.4 (La propiedad métrica creciente del mapa exponencial). *Si (M, g) tiene curvatura no positiva y $v, w \in T_p M$ son suficientemente pequeños, entonces*

$$\text{dist}(\exp_p(v), \exp_p(w)) \geq |v - w|_p$$

Demostración. Sea γ geodésica minimizante que une $\exp_p(v), \exp_p(w)$ dentro del dominio de inyectividad de \exp_p (tal geodésica existe por el resultado de minimalidad local de las geodésicas), sea $\Gamma_t = \exp_p^{-1}(\gamma_t) \subset T_p M$. Entonces por el teorema anterior

$$|\dot{\gamma}_t|_{\gamma_t} = |D(\exp_p)_{\Gamma_t} \dot{\Gamma}_t|_{\exp_p(\Gamma_t)} \geq |\dot{\Gamma}_t|_p.$$

Integrando resulta

$$\begin{aligned} \text{dist}(\exp_p(v), \exp_p(w)) &= L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}_t|_{\gamma_t} dt \geq \int_a^b |\dot{\Gamma}_t|_p dt \\ &\geq \left| \int_a^b \dot{\Gamma}_t dt \right|_p = |\Gamma_b - \Gamma_a|_p = |v - w|_p. \end{aligned}$$

\square

Definición 7.10.5 (Triángulos de comparación). Dados $p_1, p_2, p_3 \in M$ suficientemente cercanos, sea $\Delta(p_1, p_2, p_3) \subset M$ un triángulo geodésico en M con lados de longitud $l_i = \text{dist}(p_{i+1}, p_{i-1})$. Decimos que $\Delta' \subset \mathbb{R}^2$ es un *triángulo de comparación* si $\Delta' = \Delta'(p', q', r')$ es un triángulo con las mismas longitudes de lado que Δ .

§ Dados tres números reales positivos, no siempre es posible construir un triángulo euclídeo con estos lados; la condición necesaria y suficiente es que

$$l_i \leq l_{i+1} + l_{i-1}$$

se verifique para los tres lados (si numeramos cíclicamente los lados para que $l_4 = l_1$, etc. podemos decir que es necesario y suficiente que se verifique esta desigualdad para todo i).

Corolario 7.10.6. Sea (M, g) de curvatura no positiva. Sea Δ es un triángulo geodésico en M con lados l_i y ángulos α_i (el ángulo opuesto a l_i). Sea Δ' un triángulo de comparación en \mathbb{R}^2 , con lados l_i y ángulos internos α'_i . Entonces $\alpha'_i \geq \alpha_i$ para cada i y en particular la suma de los ángulos internos del triángulo geodésico original es a lo sumo π .

Demostración. Escribimos $p_{i+1} = \exp_{p_i}(v)$, $p_{i-1} = \exp_{p_i}(w)$, notando que $|v|_{p_i} = l_{i+1}$ y $|w|_{p_i} = l_{i-1}$. De la desigualdad exponencial tenemos

$$l_i^2 = \text{dist}(p_{i+1}, p_{i-1})^2 \geq |v - w|_p^2 = l_{i+1}^2 + l_{i-1}^2 - 2l_{i+1}l_{i-1} \cos(\alpha_i)$$

por la ley de cosenos euclídea y la misma definición de los α_i . Tenemos desigualdades similares para los otros dos lados. En particular $l_i \leq l_{i+1} + l_{i-1}$ y lo mismo para los otros lados: estas desigualdades nos dicen que podemos construir un triángulo geodésico euclídeo con las mismas longitudes de lado. Pero para tal triángulo Δ' , si sus ángulos internos son α'_i se tiene la igualdad

$$l_i^2 = l_{i+1}^2 + l_{i-1}^2 - 2l_{i+1}l_{i-1} \cos(\alpha'_i).$$

Combinando esto con la desigualdad anterior deducimos que $\cos(\alpha'_i) \leq \cos(\alpha_i)$ o equivalentemente, que $\alpha'_i \geq \alpha_i$. \square

Observación 7.10.7 (Lados versus ángulos). Notemos que si $\bar{\Delta}$ es un triángulo en \mathbb{R}^2 con el mismo ángulo α en p y las mismas longitudes de lados l_2, l_3 que emanan desde p , entonces el teorema anterior nos dice que en un espacio de curvatura no positiva, la longitud del lado opuesto a \bar{p} en $\bar{\Delta}$ será menor o igual que

la del correspondiente lado de Δ : $\bar{l} \leq l = \text{dist}(q, r)$. Para entender por qué, tomemos el triángulo de comparación usual Δ' con las mismas tres longitudes; sabemos por el teorema anterior que los tres ángulos son más grandes que los originales. Si desde el punto \bar{p} cerramos la apertura hasta obtener el mismo ángulo α que en Δ , y no modificamos la longitud de los lados adyacentes, obtendremos en el lado opuesto una longitud menor que la original, que era l .

Vamos a concluir este texto con dos observaciones sobre condiciones métricas equivalentes a la curvatura riemanniana no positiva.

La siguiente condición de comparación lleva la sigla CAT por Cartan, Alexandrov y Toponogov: sea $\Delta(p, q, r)$ un triángulo geodésico en M y $\Delta'(p', q', r')$ un triángulo de comparación en \mathbb{R}^2 . Decimos que (M, g) es $CAT(0)$, si para cualquier par de puntos $x, y \in \Delta$, tomando los puntos correspondientes en $x', y' \in \Delta'$ (definidos unívocamente por la distancia a los vértices del segmento que ocupan), se verifica $\text{dist}(x, y) \leq \|x' - y'\|$. Entonces puede probarse que (M, dist) es $CAT(0)$ si y sólo si (M, g) tiene curvatura no positiva.

También puede probarse que esta condición es equivalente al hecho siguiente: la distancia entre dos geodésicas de M es una función convexa del parámetro t de las geodésicas. Una referencia central en el tema de espacios métricos con condiciones de curvatura, donde pueden verse las pruebas de estas equivalencias recién mencionadas, es el texto de Bridson y Haefliger [1].

Nota bibliográfica 5. Para pasar de lo local (un objeto presentado como un abierto, o un mapeo de un abierto) a lo global (aquellas superficies que se obtienen pegando dos o más de estos abiertos de manera adecuada, o más generalmente en dimensión n las llamadas *variedades diferenciables*), es necesario introducir una serie de construcciones como el fibrado tangente y otros fibrados sobre la variedad donde se definen los campos, las formas y la métrica riemanniana. Como mencionamos en la introducción de este capítulo final, una primer lectura recomendable en esa dirección es el texto de Lee [8], pero hay muchos textos excelentes de geometría diferencial. Entre ellos queremos destacar (con el sólo criterio de la preferencia personal de los autores) los textos de O'Neill [12], Spivak [17], y en particular el de Lang [7]: a pesar de ser más técnico que los otros, el lenguaje de este último es muy parecido al que usamos para introducir los objetos en este capítulo. Por último, queremos mencionar el texto [9] donde se estudia geometría diferencial y métrica con énfasis en los grupos de Lie y los espacios homogéneos, utilizando herramientas del análisis funcional; algunas de las presentaciones de este texto han sido tomadas de allí.

7.10.2. Ejercicios

7.10.1. Probar la expresión para el operador de curvatura $\mathfrak{R}(X, Y, Z)(p)$ de una variedad riemanniana (M, g) dada por

$$\Gamma_p(X_p, \Gamma_p(Y_p, Z_p)) - \Gamma_p(Y_p, \Gamma_p(X_p, Z_p)) + D\Gamma_p(X_p)(Y_p, Z_p) - D\Gamma_p(Y_p)(X_p, Z_p),$$

en términos del operador bilineal Γ y sus derivadas.

7.10.2. Probar que los campos cuyo flujo es una isometría, $Kill(M, g)$, forman una subálgebra de Lie de $Kill(M, \nabla)$, el conjunto de todos los campos cuyo flujo es automorfismo de la conexión de Levi-Civita.

7.10.3. Probar que el disco de Poincaré modificado por $R > 0$ (Observación 7.8.5) tiene curvatura seccional constante e igual a $-R$.

7.10.4. Sea $T : D \rightarrow \Pi^+$ dada por la transformada de Cayley entre el disco de Poincaré y el semiplano

$$T(z) = -i \frac{z+i}{z-i}$$

(nuevamente identificamos elementos del plano \mathbb{R}^2 con elementos del plano complejo \mathbb{C}). Probar que T es una isometría global, y que las geodésicas del semiplano son rectas verticales o bien semicircunferencias con centro en el eje horizontal x del plano.

7.10.5. Sea P el espacio de matrices positivas, probar que la clausura de P es

$$\bar{P} = \{X \in M_n^h : \langle X\xi, \xi \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{C}^n\}.$$

Probar que \bar{P} es un cono en el siguiente sentido: si $X, Y \in \bar{P}$, entonces $sX + tY \in \bar{P}$ para todo $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

7.10.6. Sea $\langle X, Y \rangle_2 = Tr(XY)$ definido en las matrices simétricas. Hallar una base ortonormal para este producto interno y probar que

$$\|X\|_2^2 = \sum_{i,j} |x_{ij}|^2$$

donde $(x_{ij})_{j=1, \dots, n}$ son las entradas de X .

7.10.7. Sea $1, A, B \in P$ matrices positivas inversibles, probar que si $B = e^X$ entonces $\gamma(t) = e^{tX}$ es la única geodésica que une 1 con B en P . Probar que

$$\gamma_{A,B}(t) = A^{1/2} \exp(t \ln(A^{-1/2} B A^{-1/2})) A^{1/2}$$

es la única geodésica que une A con B en P .

7.10.8. Calcular las derivadas de f en la Proposición 7.10.1.

- [1] M. R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 319. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [2] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov, *A course in metric geometry*. Graduate Studies in Mathematics, 33. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001
- [3] M. Do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza universitaria de textos, 1995, España.
- [4] K. F. Gauss, *General Investigations of Curved Surfaces* of 1827 and 1825, (1902) The Princeton University Library. (Translation of Gauss's original paper)
- [5] J. Hannah, *A geometric approach to determinants*. Amer. Math. Monthly 103 (1996), no. 5, 401–409.
- [6] S. Lang, *Introducción al álgebra lineal*. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, Argentina, 1990.
- [7] S. Lang, *Differential and Riemannian manifolds*. Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 160. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [8] J. M. Lee, *Introduction to Riemannian manifolds*. Second edition of [MR1468735]. Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer, Cham, 2018.
- [9] G. Larotonda, *Estructuras geométricas para las variedades de Banach*. Colección Ciencia, Innovación y Tecnología, Editorial Universidad de General Sarmiento, 2012.
- [10] J.E. Marsden, A.J. Tromba, *Cálculo vectorial*. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, Argentina, 1991.

-
- [11] R. J. Noriega, *Cálculo diferencial e integral*. Ed. Docencia, Buenos Aires, 1987.
- [12] B. O'Neill, *Elementary differential geometry*. Revised second edition. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2006.
- [13] A. Popov, *Lobachevsky geometry and modern nonlinear problems*. Translated from the 2012 Russian original by Andrei Iacob. Birkhäuser/Springer, Cham, 2014
- [14] T. Sakai, *Riemannian geometry*. Translated from the 1992 Japanese original by the author. Translations of Mathematical Monographs, 149. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [15] M. Spivak, *Cálculo infinitesimal*. Ed. Reverté, Barcelona, 1991.
- [16] M. Spivak, *Cálculo en variedades*. Ed. Reverté, Barcelona, 1970.
- [17] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*. Vol. I. Second edition. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979.
- [18] D. J. Struik, *Geometría diferencial clásica*. Ed. Aguilar, 1973.

- automorfismo de la conexión, 209
- campo
 - f -relacionado, 185
 - a lo largo de una curva, 187
 - de Jacobi, 206
 - versus curvatura seccional, 236
 - versus diferencial de exp, 208
 - de Killing, 212
 - de las matrices positivas, 234
 - métrico, 215
 - álgebra de Lie, 214
 - vectorial, 74
 - flujo de, 75
- catenoide (superficie), 144
- coeficientes
 - de la primera forma, 83
 - de la segunda forma, 150
- compatibilidad de la conexión con la métrica, 94
- completitud geodésica
 - de una superficie, 128
- coordenadas polares exponenciales, 218
 - en una superficie, 118
- corchete de Lie de campos, 76, 185
- curva
 - plana en el espacio, 56
 - minimal, 114
 - rectificable, 19
 - regular, 5
- regular a trozos, 6
- curvatura
 - de Gauss, 142, 166
 - de Ricci, 202
 - de una curva espacial, 47, 48
 - de una curva plana, 27, 30
 - direcciones principales, 141
 - escalar riemanniana, 205
 - media de una superficie, 141, 153
 - normal de una superficie, 135
 - orientada de una curva plana, 34
 - principal de una superficie, 140, 153, 160
 - riemanniana, 201
 - seccional, 203, 236
 - de una superficie, 142
 - seccional de las matrices positivas, 235
 - seccional negativa constante, 228
 - seccional no positiva, 237
 - seccional nula, 221
 - seccional versus campos de Jacobi, 236
 - tensor de, 201
- círculo osculador, 27, 28
- derivada
 - covariante, 91, 187, 190, 191, 194
 - de la norma, 9
 - de Levi-Civita, 91, 187

- del producto interno, 9
- diferencial
 - de una función entre superficies, 73
- diferencial de la exponencial
 - versus campos de Jacobi, 208
- direcciones principales de curvatura, 141
- disco de Poincaré, 221
- distancia
 - hiperbólica, 225
 - intrínseca en una superficie, 107
 - riemanniana, 184
- ecuación de Euler, 91, 195
 - en coordenadas, 101
- elemento de área
 - de una superficie, 78
- elíptico
 - punto, 141
- entorno
 - normal riemanniano, 98
 - uniformemente normal
 - en una superficie, 124
 - uniformemente normal riemanniano, 196
- esfera
 - geodésicas, 99
 - parametrización exponencial, 172
- espacio $CAT(0)$, 239
- espacio de matrices positivas inversibles, 230
- espacio de métrica interior, 124
- espacio hiperbólico, 221
- espacio tangente, 195
 - de una superficie, 67, 70
- exponencial riemanniana, 96, 195
- fibrado tangente, 195
- flujo de un campo, 75
- formas espaciales, 170, 174
- Frenet
 - fórmulas de, 59
 - triedro de, 59
- función diferenciable
 - entre superficies, 73
- fórmula de la primer variación, 109
- fórmulas de Frenet, 59
- Gauss
 - curvatura de, 142, 166
 - Lema de, 217
- geodésica, 90
- geodésicas, 195
 - de la esfera, 99
 - de una superficie de revolución, 104
- grupo de Euclides, 38
- hiperbólico
 - punto, 141
- Hopf-Rinow
 - teorema de, 123
 - teoremas de, 220
- integral
 - de longitud, 183
 - de superficie, 78, 183
- isometría, 157
 - de las matrices positivas, 234
 - local, 157
 - riemanniana, 199
- Jacobi
 - campo de, 206
- Lema
 - de Euler (curvaturas normales), 140
 - de Gauss, 117, 217
 - de Meusnier, 137

- Levi-Civita
 - derivada de, 91
- logaritmo de una matriz simétrica, 231
- longitud
 - de curva rectificable, 123
 - de una curva regular, 14
- mapa de Gauss
 - de una superficie, 138
- matriz
 - de la primera forma, 83
 - de la segunda forma, 151
 - de Weingarten, 150
- minimalidad
 - de las rectas en el espacio euclídeo, 23
 - local de las geodésicas, 120
- movimientos rígidos, 38
- métrica riemanniana, 181, 184
- norma
 - de Frobenius, 232
 - de Hilbert-Schmidt, 232
- operador bilineal de la conexión, 189
- operador cuadrático de la conexión, 189
- parametrización
 - con rapidez constante, 17
 - exponencial de una superficie, 97
 - exponencial riemanniana, 170
 - por longitud de arco, 17
 - regular de una curva, 5
 - regular de una superficie, 67
- planar
 - punto, 141
- plano osculador
 - de una curva espacial, 49
- Poincaré
 - disco de, 221
- primer variación, 109, 197
- primera forma
 - de una superficie, 83
- propiedad expansiva de la métrica
 - en variedades de Riemann, 237
- pseudoesfera
 - parametrización exponencial, 173
- pull-back
 - de campos vectoriales, 210
- punto
 - elíptico, 141
 - hiperbólico, 141
 - planar, 141
 - umbílico, 141
- radio de inyectividad
 - de la función exponencial, 121, 125
- recta tangente a una curva, 6
- rectificación
 - de una curva continua, 19
- reparametrización
 - de una curva regular, 13
- Ricci
 - curvatura, 202
- segunda forma
 - matriz de, 150
- segunda forma de una superficie, 150
- semiplano de Poincaré, 229
- superficie regular, 67
- símbolos de Christoffel
 - de primera clase, 192
 - de segunda clase, 193
- tensor de curvatura, 201
- tensor métrico, 192
- Teorema

- de Hilbert Efimov, 176
- de Hopf-Rinow, 123
- de Kiuper-Nash, 176
- Egregio de Gauss, 162
- Teoremas
 - de Hopf-Rinow, 220
- torsión
 - de una curva espacial, 52, 55
- transformación
 - afín de la conexión, 209
 - ortogonal, 38
- transporte paralelo, 198
- triedro de Frenet, 59
- triángulo de comparación, 238

- umbílico
 - punto, 141

- variedades localmente planas, 221
- vector binormal
 - a una curva espacial, 52
- vector normal
 - a una curva espacial, 47
 - a una curva plana, 33
 - de una superficie regular, 76
- vector tangente
 - a una curva espacial, 47
 - a una curva regular, 6
- vectores tangente
 - a una curva plana, 33
- volumen orientado, 50

- Weingarten
 - matriz de, 150

- área orientada, 30