Variaciones sobre las Grassmannianas

Gabriel Larotonda*

Abstract

Un breve resumen bibliográfico de algunos de los trabajos vinculados con el desarrollo de la estructura diferencial, geométrica y geodésica de las variedades de Grassmann en espacios de Banach y de Hilbert.

1 Notaciones

Todos los espacios a considerar serán complejos. Con $Gr_{k,n}$ indicaremos el conjunto de subespacios de dimensión k en $\mathbb{C}^n$. Denotaremos con $\mathcal{X}$ a un espacio de Banach y con $\mathcal{H}$ a un espacio de Hilbert. $\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(\mathcal{H})$ denotan los operadores lineales acotados de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{X}$ (resp. de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$. Toda álgebra de Banach $\mathcal{A}$ se puede identificar con un $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, tomando $\mathcal{X} = \mathcal{A}$ y la representación a izquierda $\mathcal{A} \ni T \mapsto L_T \in \mathcal{B}(X)$, $L_T S = TS$.

Desde aquí, denotaremos con M, N dos subespacios de $\mathcal{X}$ o $\mathcal{H}$. Denotaremos con P, Q a los proyectores con rango M, N respectivamente; $P^2 = P, Q^2 = Q$. Notar que en el caso de $\mathcal{X}$ infinito dimensional, este impone una restricción a los subespacios: tienen un complemento dado por los respectivos núcleos (los rangos de $1-P, 1-Q$). $S_1 = Ran(P), S_2 = Ran(Q)$

2 Ideas y referencias

Comenzamos mencionando un trabajo de Dixmier:
[1] Dixmier, Jacques. Position relative de deux variétés linéaires fermées dans un espace de Hilbert. (French) Revue Sci. 86, (1948). 387–399.
Este trabajo no esta electrónico, su escritura es muy densa. Establece condiciones necesarias y suficientes en $\mathcal{H}$ para que exista un operador unitario $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de maner que $UPU^* = Q$. Equivalentemente, $U(M) = N$. Es constructivo, es decir dadas las condiciones suficientes, se construye un U que es óptimo $\|U-1\| \leq \|W-1\|$ para todo otro unitario W que haga el mismo trabajo.

*CONICET-UNGS-UBA. e-mail: glaroton@dm.uba.ar

Se recomienda la lectura del trabajo de Davis,
[2] Davis, Chandler. Separation of two linear subspaces. Acta Sci. Math. Szeged 191958 172–187.
Es una versión ampliada y más didáctica del trabajo de Dixmier (como el mismo Davis reconoce allí). Es muy claro. Idea central: hay cuatro subespacios

$$\mathcal{H}_{11} = M \cap N, \quad \mathcal{H}_{00} = M^{\perp} \cap N^{\perp}, \quad \mathcal{H}_{01} = M^{\perp} \cap N, \quad \mathcal{H}_{10} = M \cap N^{\perp}$$

Se define asimismo

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{11} \oplus \mathcal{H}_{00} \oplus \mathcal{H}_{01} \oplus \mathcal{H}_{10}$$

y se tiene la descomposición $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, con $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0^{\perp}$ la *parte genérica* de $\mathcal{H}$ relativa al par de subespacios.
Existe U si y sólo si $dim(\mathcal{H}_{10}) = dim(\mathcal{H}_{01})$. Posteriormente se descubre que este U verifica $\|U - 1\| \leq \|W - 1\|$ para *toda* norma unitariamente invariante. Esto significa que hay mayorización para el espectro de $U - 1$; si $U - 1$ es compacto, qué son estos números?

En el trabajo de Halmos (recomendable lectura)
[3] Halmos, P. R. Two subspaces. Trans. Amer. Math. Soc. 144 1969 381–389.
se trata el caso generico (M, N en posición general, $\mathcal{H}_0 = \{0\}$). Caracterización de Halmos no trivial aún en el caso de matrices y $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$: M, N en pos. genérica sii existe un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ y una isometría que conjuga el par M, N con el par $(\mathcal{K} \oplus 0), Gr(T)$ en $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$. Donde $T \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ es un operador autoadjunto, $T \geq 0$, (puede ser no acotado pero es simétrico y cerrado). Es inyectivo y de rango denso.
En otra notación, establece que es equivalente al par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{pmatrix}$$

donde $c = \cos(z)$ para algún $0 \leq z \leq \pi/2$ y $s = \sin(z)$. Obs: $\|P - Q\| = 1$ sii $\|z\| = \pi/2$

Veamos ahora el contexto de espacios de Banach. Da cierta perspectiva más geométrica. En el trabajo
[4] Zemánek, Jaroslav. Idempotents in Banach algebras. Bull. London Math. Soc.11 (1979), no. 2, 177–183.
Dados idempotentes P, Q se prueba que si $r(P - Q) < 1$ existe z en $\mathcal{A}$ tal que $Q = e^z P e^{-z}$, donde r es el radio espectral.

Luego en
[5] Kovarik, Zdislav V. Manifolds of linear involutions. Linear Algebra Appl. 24 (1979), 271–287.
se estudia el conjunto de idempotentes $\{P^2 = P : P \in \mathcal{A}\}$ (recordar que $\mathcal{A}$ siempre denota un álgebra de Banach compleja). Se muestra que si consigue $\|P - Q\| < 1$ entonces existe un inversible u en $\mathcal{A}$ tal que $Q = uPu^{-1}$. Se miran entonces la

órbitas $O(P) = \{uPu^{-1}\}$ que resultan ser, variando P, las componentes conexas de la Grassmanniana. Kovarik juega con $E = 2P - 1$ que es una simetria ($E^2 = 1$). Si M denota el conjunto de todas las simetrías en $\mathcal{A}$ se mira el mapa $f(x) = x^2 - 1$. $M = f^{-1}(0)$. Como $Df_P(Z) = PZ+ZP$, P es un punto regular, $Ker(Df_P) \simeq T_P M$ tiene un suplemento natural $\{W : WP = PW\}$ asi que por el teorema de la función implícita en espacios de Banach, M es subvariedad embebida de $\mathcal{A}$. También estudia la conexión (derivada covariante) dada por el suplemento. Muestra que las curvas $\gamma(t) = e^{tZ}Pe^{-tZ}$ con $ZP + PZ = Z, Z^* = -Z$ son geodésicas de la conexión. Pasando al caso Hilbertiano, propone estudiar los operadores Hilbert-Schmidt para tener una métrica Riemanniana. Recordar que

$$\|Z\|_{HS} = Tr(Z^*Z)^{1/2} = (\sum_k \lambda_k^2(|Z|))^{1/2}$$

o sea son operadores compactos con espectro en ℓ_2. Para ello usa la órbita UPU^* con $U-1$ de clase Hilbert-Schmidt. Prueba que la geodésica es minimal si $\|P-Q\| < 1$ (notar la condición en norma uniforma, para la longitud en norma HS). Notar que $\|\dot{\gamma}(t)\| = \|zp + pz\| = \|z\|$.

En el artículo
[6] Holmes, J. P. The structure of the set of idempotents in a Banach algebra.Illinois J. Math. 36 (1992), no. 1, 102–115.
redescubre la estructura diferenciable de los idempotentes (cita a Zemanek pero no a Kovarik!) pero en lenguaje de grupos de lie y espacios homogeneos.

Qué representa ese Z óptimo, $Z = ZP + PZ, Z^* = -Z$, $Q = e^Z Pe^{-Z}$? Miremos otras normas tangentes (casos no Riemannianos). En
[7] Porta, Horacio; Recht, Lázaro. Minimality of geodesics in Grassmann manifolds. Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), no. 3, 464–466.
Prueban la minimalidad de γ con la norma de operadores. Bosquejo de la prueba: embeber las curvas en la esfera S del espacio de Hilbert y ver que $\rho(\gamma) \subset S$ es una geodésica.

Puede verse también el trabajo
[8] Corach, G.; Porta, H.; Recht, L. The geometry of spaces of projections in C^*-algebras. Adv. Math. 101 (1993), no. 1, 59–77.
Donde los autores estudian la geometría de los idempotentes (no autoadjuntos) de un espacio de Hilbert. Hay más riqueza por la descomposición polar de los idempotentes, aparecen fibraciones (muchos idempotentes representan el mismo proyector ortogonal, el mismo subespacio).

Uno podría medir las curvas con otras normas, $\|\dot{\gamma}\|$ con cualquier norma simétrica (unitariamente invariante, $\|UXW\| = \|X\|$ para todo X, para todo U, W unitarios). Nuestra curva tiene longitud $\|Z\|$. Estas normas miran el espectro. Qué son esos numeros $|\lambda_k(|Z|)|$, son ángulos! Ver el trabajo de

[9] Qiu, Li; Zhang, Yanxia; Li, Chi-Kwong. Unitarily invariant metrics on the Grassmann space. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 27 (2005), no. 2, 507–531.
Por ejemplo, en $\mathcal{H} = R^n$, $Gr_{k,n}$: tomamos dos bases ortonormales de M, N (v_i, w_i) formamos dos matrices T_1, T_2 (de k columnas, n filas, de $n \times k$). Hacemos $T_1^t T_2$ es de $k \times k$. Miramos sus autovalores, son k números entre 0 y 1 y sus arcocosenos $\theta_l, l = 1..k$ ese es el espectro del Z. No depende de las bases! Una distancia angular sería: alguna cuenta razonable con los θ_l.

Volviendo a la perspectiva geodésica:
[10] Andruchow, Esteban; Larotonda, Gabriel. Hopf-Rinow theorem in the Sato Grassmannian. J. Funct. Anal. 255 (2008), no. 7, 1692–1712.
Se estudia una polarización $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ ambos de dim y codim infinita, $P = P_+$. El grupo que actúa aquí es $U_{res}(\mathcal{H}) = \{u : u - 1 \in HS\}$. La órbita a mirar es $\{UpU^* : U \in U_{res}\}$. Se prueba la minimalidad con normas Schatten 2 y p. El caso crítico es el caso $\|P - UPU^*\| = 1$ hay que buscar un $Z \in HS$, pero no hay logaritmo analitico de U.

Estos espacios $GL_{res}(H), U_{res}$ fueron estudiados en
[11] Shale, David. Linear symmetries of free boson fields. Trans. Amer. Math. Soc.103 1962 149–167.

En el trabajo
[12] Andruchow, E.; Chiumiento, E.; Di Iorio y Lucero, M. E. Essentially commuting projections. J. Funct. Anal. 268 (2015), no. 2, 336–362.
Puede verse un análisis más general de la geometría de los P autoadjuntos tales que casi conmutan con P_+, es decir $[P_+, P]$ compacto. Son clases en el álgebra de Calkin $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Una de estas clases es la Grassmanniana de Sato de [9].

En el trabajo
[13] Antezana, Jorge; Larotonda, Gabriel; Varela, Alejandro. Optimal paths for symmetric actions in the unitary group. Comm. Math. Phys. 328 (2014), no. 2, 481–497.
Probamos la existencia y minimalidad de geodésicas para cualquier norma simétria. Se estudia primero la estructura de las soluciones de Lagrangianos convexos en estos grupos unitarios especiales que actúan en la Grassmanniana.

Loops groups: LG=loop group, $LU_n = \{\gamma : S^1 \to U_n(C)\}$. La referencia obligada es el libro
[14] Pressley, Andrew; Segal, Graeme. Loop groups. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.
Tomando $\mathcal{H} = L^2(S^1, C^n)$, se representa $\gamma \to M_\gamma$, $M_\gamma f(e^{it}) = \Gamma(e^{it}) f(e^{it})$ representacion de LG. Pidiendo cierta regularidad Sobolev a γ, sale que $LU_n(C)/U_n(C) =$

$Gr \subset Gr_{res}$ donde $Gr = \{W \in Gr_{res} : zW \subset W\}$ con $z = M_z$ el operador de multiplicacion por e^{it} (el shift). Se puede caracterizar estos subespacios como $W = \varphi H_+$ para alguna $\varphi \in H^\infty + C$ (el álgebra de Sarason de S^1).

Una representación concreta de la polarización para la Grassmannia restringida (Grassmanniana de Sato) se tiene con los espacios de Hardy $\mathcal{H} = L^2(S^1, \mathbb{C})$, $\mathcal{H}_+ = \mathcal{H}^2 = \{f : \widehat{f}(k) = 0, \quad k \leq 0\}$ el espacio de Hardy de la circunferencia. Esto es parte de un trabajo en elaboración (Andruchow, Chiumiento, Larotonda [13?]).