La geometría de los operadores positivos e inversibles

Martín Miglioli, IAM-CONICET

Algunos resultados en algunos artículos sobre la geometría de los positivos inversibles

Reseñas

L. Recht, **Geometría diferencial en el espacio de operadores positivos.** Boletín de la Asociación Matemática Venezolana Vol. VI, No. 2 (1999) 125

G. Corach, **Operator inequalities, geodesics and interpolation.** Functional analysis and operator theory (Warsaw, 1992), 101–115, Banach Center Publ., 30, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1994.

Artículos fundamentales

G. Corach, H. Porta, L. Recht, **The geometry of the space of selfadjoint invertible elements in a C^*-algebra.** Integral Equations Operator Theory 16 (1993), no. 3, 333–359.
Se deriva la conexión en los positivos inversibles a partir del U-fibrado principal $G \mapsto G/U = P$ con descomposición canónica del tangente en la identidad $T_{id}G = A = A_s \oplus A_{sa}$ en espacios horizontales y verticales.

G. Corach, H. Porta, L. Recht, **A geometric interpretation of Segal's inequality $\|e^{X+Y}\| \leq \|e^{X/2}e^Y e^{X/2}\|$.** Proc. Amer. Math. Soc. 115 (1992), no. 1, 229–231.
Se demuestra que la ëxponential metric increasing property(̈EMI) que afirma que para $a \in P$ y $X, Y \in T_aP$

$$\|X - Y\|_a \leq d(exp_a(X), exp_a(Y))$$

es equivalente a la desigualdad de Segal que afirma que para elementos autoadjuntos X y Y $\|e^{X+Y}\| \leq \|e^{\frac{X}{2}}e^Y e^{\frac{X}{2}}\|$.

G. Corach, H. Porta, L. Recht, **Geodesics and operator means in the space of positive operators.** Internat. J. Math. 4 (1993), no. 2, 193–202.
Se demuestra que la geodésica $\gamma_{a,b} : [0, 1] \to P$ dada por la conexión que une a a y b minimiza

la distancia. Esta distancia está dada por $d(a,b) = Length(\gamma_{a,b}) = \|log(a^{-\frac{1}{2}}ba^{-\frac{1}{2}})\|$. Se prueba que las funcionales lineales positivas $\phi : P \subseteq A_s \to \mathbb{R}^+$ es geodésicamente convexa.

G. Corach, H. Porta, L. Recht, **Convexity of the geodesic distance on spaces of positive operators.** Illinois J. Math. 38 (1994), no. 1, 87–94.
Se prueba que dadas dos geodésicas α y β en P la función $[0,1] \to P \quad t \mapsto d(\alpha(t), \beta(t))$ es convexa. Esto fue demostrado en el Teorema 2 usando el Teorema 1 que afirma que si J es un campo de Jacobi a lo largo de la geodésica α en P entonces $t \mapsto \|J(t)\|_{\alpha(t)}$ es convexa.

H. Porta, L. Recht, **Conditional expectations and operator decompositions.** Ann. Global Anal. Geom. 12 (4) (1994), 335–339. El teorema de descomposición de Corach-Porta-Recht afirma que dada una inclusión unital $B \subseteq A$ de álgebras C^* y una esperanza condicional $E : A \to B$ entonces la función

$$\Phi : U_A \times \mathfrak{p}_E \times \mathfrak{p}_B \to G_A$$
$$(u, X, Y) \mapsto ue^X e^Y$$

es un difeomorfismo, donde $\mathfrak{p}_E$ son los elementos autoadjuntos de $KerE$ y $\mathfrak{p}_B$ son los elementos autoadjuntos de B.

Contexto mas general de cocientes de grupos de Banach-Lie

K.-H. Neeb, **A Cartan-Hadamard Theorem for Banach-Finsler manifolds.** Geom. Dedicata 95 (2002), 115-156.
Se demuestra un teorema de Cartan-Hadamard para variedades de Banach-Finsler de curvatura semi-negativa. Se demuestran criterios en terminos de operadores disipativos para que espacios de la forma G/U, donde U es el conjunto de puntos fijos de una involución en el grupo de Banach-Lie G, tenga curvatura semi-negativa. Se deriva la conexión en los positivos inversibles a partir de las simetrias de Cartan $a \cdot b = ab^{-1}a$.

C. Conde, G. Larotonda, **Manifolds of semi-negative curvature.** Proc. Lond. Math. Soc. (3) 100 (2010), no. 3, 670–704.
En el contexto del artćulo anterior se demuestra una descomposición extendida de Corach-Porta-Recht. En el caso que la norma Finsleriana sea uniformemente convexa se obtienen proyecciones a conjuntos convexos y la existencia de baricentro de conjuntos acotados. Se prueba que el espacio de los positivos inveribles que son perturbaciones p-Schatten de la identidad tienen curvatura semi-negativa. En el contexto de espacios p-uniformemente convexos de Banach de curvatura negativa se demuestra que vale la proyección a subconjuntos convexos y la demostración del teorema de punto fijo de Bruhat-Tits a partir de la existencia de circumcentros.

Contexto CAT(0) de positivos inversibles de álgebras con traza

E. Andruchow, G. Larotonda, **Nonpositively Curved Metric in the Positive Cone of a Finite von Neumann Algebra**, J. London Math. Soc. (2) 74 (2006), no. 1, 205-218.
Se prueba que el espacio de los positivos inveribles de un álgebra de von Neumann finita es un espacio simétrico CAT(0) incompleto. Se caracterizan algebraicamente las subvariedades totalmente geodésicas y se prueba un teorema de descomposición.

C. Conde, G. Larotonda, **Spaces of nonpositive curvature arising from a finite algebra**, J. Math. Anal. Appl. 368 (2010), no. 2, 636–649.
Se continua con la investigación iniciada en el artículo anterior. Se consideran las metricas derivadas de la norma p obtenida de la traza. Se demuestra que los intervalos de operadores son completos comparando distintas metricas. Se usa la convexidad uniforme de la norma drivada de la traza para proyectar operapores positivos e inveribles a conjuntos convexos de operadores positivos e inversibles.

G. Larotonda, **Nonpositive curvature: a geometrical approach to Hilbert-Schmidt operators.** Differential Geom. Appl. 25 (2007), no. 6, 679–700.
Se prueba que los operadores positivos e inversibles que son perturbaciones Hilbert-Schmidt de la identidad son espacios CAT(0) completos. Se demuestra un teorema de descomosición que provee un entorno tubular normal a distintas subvariedades totalmente geodésicas. Se da una caracterización algebraica de las subvariedades totalmente geodésicas.

Interpolación compleja

E. Andruchow, G. Corach, D. Stojanoff, **Geometrical Significance of Löwner-Heinz inequality.** Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), no. 4, 1031-1037.
Se demuestra que la convexidad a lo largo de geodésicas es equivalente a la desigualdad de Löwner-Heinz que afirma que dados operadores positivos A, B y $t \in [0,1]$ entonces $\|A^tB^t\| \leq \|AB\|^t$.

Andruchow, G. Corach, M. Milman, D. Stojanoff **Geodesics and interpolation.** Rev. Un. Mat. Argentina 40 (1997), no. 3-4, 83–91.
Dadas dos normas cuadráticas $\| \quad \|_a$ y $\| \quad \|_b$ se prueba que los métodos de interpolación real y compleja entre estas dos normas cuadráticas da como resultado una familia de normas cuadráticas $\{\| \quad \|_{\gamma(t)}\}_{t\in[0,1]}$ donde γ es la geodésica que une a con b.

Unitarización de grupos de inversibles

M. Miglioli, **Unitarization of uniformly bounded subgroups in finite von Neumann algebras.** Bull. London Math. Soc. (2014) 46 (6): 1264-1266.
Se prueba que dado un grupo H de operadores inverisbles uniformemente acotados en un álgebra

de von Neumann finita entonces la raiz cuadrada del circuncentro de $\{hh^*\}_{h\in H}$ es un unitarizante s del grupo, i.e. $sHs^{-1} \subseteq U$.

M. Miglioli, P. Schlicht: **Geometric aspects of similarity problems.** arXiv:1506.06523v1
Dado un homomorfismo unital no necesariamente autoadjunto $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de un álgebra C^* A a los operadores acotados en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se puede definir una acción natural de los unitarios de A sobre la variedad P de los positivos inversibles en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dada por $u{\cdot}a = \pi(u)a\pi(u)^*$. Resulta que la exponencial de un medio el diámetro de la órbita de la identidad es la norma de π, y la exponencial de la distancia de la identidad al conjunto de puntos fijos de la acción es la norma completamente acotada de π. Estas relaciones se usan para probar resultados de interpolación geométrica y de minimalidad de unitarizantes.

Estructuras complejas adaptadas

M. Miglioli, **Decompositions and complexifications of some infinite-dimensional homogeneous spaces.** J. Funct. Anal. 266 (2014), no. 11, 6599–6618.
Se prueba una iteración del teorema de descomposición. Con el teorema de descomposición se mune a tangentes de espacios homogéneos con estructucturas complejas adaptadas, i.e. la función dada por $V \mapsto -V$ es anti-holomorfa. Se prueba que la identificación $G_A/G_B \simeq T(U_A/U_B)$ tiene una propiedad funtorial respecto a las funciones que se pueden definir entre espacios de la forma G_A/G_B y espacios de la forma $T(U_A/U_B)$. Ejemplos de estos espacios homogéneos son órbitas coadjuntas en ideales p-Schatten, variedades bandera y variedades Stiefel en el contexto de álgebras de operadores.

Otros artículos

L. Molnár, **Thompson isometries of the space of invertible positive operators.** Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), no. 11, 3849–3859.
Se caracterizan las isometrias de los positivos inversibles como las funciones $a \mapsto hah^*$ y $a \mapsto ha^{-1}h^*$ con a positivo e inversible y h inversible .

Agosto 2016