CURVATURA ESCALAR Y LA CONSTANTE DE YAMABE

GUILLERMO HENRY

RESUMEN. Dada una variedad Riemanniana cerrada (M, g), ¿Existe una métrica conforme a g cuya curvatura escalar sea constante? Si esto es así, ¿Cuántas de estas métricas (esencialmente distintas) hay? ¿Se puede prescribir la curvatura escalar? En estas notas abordaremos algunos aspectos de estas preguntas. La primera de ellas se conoce como el problema de Yamabe. Introduciremos la constante de Yamabe, que es un invariante de la clase conforme, discutiremos sus propiedades y veremos cual es la relación que existe entre esta, la existencia de métricas de curvatura escalar constante y las soluciones positivas de la ecuación de Yamabe. También daremos una idea, con cierto detalle, de la demostración del problema de Yamabe.

Finalmente introduciremos el invariante de Yamabe de una variedad cerrada y veremos algunas de sus propiedades, como por ejemplo su comportamiento bajo cirugías.

Estas notas son la versión extendida del curso de mismo título que se dictará en el EGEO 2016, VI Workshop on Differential Geometry, del 1 al 5 de agosto de 2016 en la ciudad de La Falda, Córdoba, Argentina.

ÍNDICE

1. Introducción

El objeto geométrico que ocupará un lugar central en este curso es la de curvatura escalar. Recordemos su definición y algunas de sus propiedades.

Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana de dimensión n. El tensor de Ricci es el tensor de tipo $(0,2)$ covariante, simétrico definido de la siguiente manera: dado $p \in M$ y $X, Y \in T_pM$, definimos

$$Ricc_p(X,Y) := traza\Big(z \longrightarrow R(X,z)Y\Big),$$

donde R es el tensor de curvatura de (M,g) , es decir,

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal de T_pM se tiene que

$$Ricc_p(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} R(X, e_i, Y, e_i),$$

aquí R denota el tensor de curvatura de tipo (0,4)-covariante

$$R(X,Y,Z,V) = g(R(X,Y)Z, V).$$

La curvatura escalar es la función diferenciable $s_g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ que se obtiene de tomar la traza del tensor de Ricci. Utilizando la base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ su expresión es la siguiente:

$$s_g(p) = \sum_{i=1}^{n} Ricc(e_i, e_i) = \sum_{1 \le i,j \le n} R(e_i, e_j, e_i, e_j). \tag{1}$$

Luego, si denotamos con $K(e_i, e_j)$ la curvatura seccional del subespacio tangente $span(e_i, e_j)$, la curvatura escalar de (M,g) en p es

$$s_g(p) = \sum_{1 \le i \ne j \le n} K(e_i, e_j). \tag{2}$$

Es decir, es un múltiplo del promedio de las curvaturas seccionales.

La curvatura escalar provee información acerca de como la geometría de la variedad modifica el volumen de una bola. Mide la diferencia entre el volumen de una bola de la variedad respecto del volumen que tiene una bola del mismo radio en el espacio Euclídeo. Más precisamente, si $B_r^g(p)$ es la bola de radio r centrada en el punto p de (M,g) y $B_r^{g_e^n}(0)$ es la bola de radio r del espacio Euclídeo $(\mathbb{R}^n, g_e^n)$, entonces se tiene que

$$vol(B_r^g(p)) = vol(B_r^{g_e^n}(0))\Big(1 - \frac{s_g(p)}{6(n+2)} r^2 + o(r^2)\Big).$$

La demostración de este hecho puede verse en ([16], Teorema 3.98). Luego, para una bola de radio pequeño se tiene que $vol(B_r^g(p)) < vol(B_r^{g_e^n}(0))$ $(>)$ si la curvatura escalar en p es positiva (negativa).

Ejemplo 1.1. *Si (M,g) es una variedad de curvatura seccional constante k, entonces por la igualdad (2) resulta una variedad de curvatura escalar constante $kn(n-1)$. La recíproca, como veremos en el Ejemplo 1.2, no es cierta. La curvatura escalar de la esfera $n-$dimensional de radio 1 con la métrica estándar (S^n, g_0^n) es $s_{g_0^n} \equiv n(n-1)$; el espacio Euclídeo es de curvatura escalar constante cero ; y el espacio Hiperbólico de* *dimensión n dotado de la métrica de curvatura -1, que notamos con $(\mathbb{H}^n, g_h^n)$, tiene curvatura escalar constante $s_{g_h^n} \equiv -n(n-1)$.*

Ejemplo 1.2. *Sea (M^m, g) y (N^n, h) dos variedades Riemmannianas. La curvatura escalar del producto Riemanniano $(M \times N, g+h)$ es $s_{g+h} = s_g + s_h$. En efecto, sea $\{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_{m+n}\}$ una base ortonormal de $T_{p,q}(M \times N)$, donde $\{e_1, \ldots, e_m\}$ y $\{e_{m+1}, \ldots, e_{m+n}\}$ son una base ortonormal de T_pM y T_qN, respectivamente. Si denotamos las curvaturas seccionales de (M, g) y (N, h) con K_M y K_N, para $(1 \leq i,\ j \leq m)$ y $(1 \leq k,\ l \leq n)$ se tiene que $K(e_i, e_j) = K_M(e_i, e_j)$, $K(e_{m+k}, e_{m+l}) = K_N(e_{m+k}, e_{m+l})$ y $K(e_i, e_{m+k}) = 0$. Luego, de la igualdad (2) obtenemos que $s_{g+h} = s_g + s_h$.*

Ejemplo 1.3. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana y consideremos una dilatación escalar de la métrica g, es decir, una métrica de la forma $\tilde{g} = \lambda g$, con $\lambda \in \mathbb{R}^n_{>0}$. Como las conexiones de Levi-Civita de ambas métricas coinciden, tenemos que los tensores de curvatura $(0,4)$ covariante satisfacen que $\tilde{R} = \lambda R$. Por lo tanto, las curvaturas seccionales se relacionan por $K_{\tilde{g}} = \frac{1}{\lambda} K_g$, de lo cual se deduce que $s_{\tilde{g}} = \frac{1}{\lambda} s_g$.*

Denotaremos con $\mathcal{M}_M$ el conjunto de métricas Riemannianas de M. La clase conforme de $g \in \mathcal{M}_M$, que denotamos con $[g]$, es el siguiente subconjunto de $\mathcal{M}_M$:

$$[g] := \{fg : \ f \in C^\infty_{>0}(M)\}.$$

En lo siguiente, diremos que h es conforme a g si $h \in [g]$. Con $\mathcal{C}_M$ denotaremos el conjunto de clases conformes de M.

Naturalmente nos podemos preguntar:

1) Dado una variedad M, ¿Existen métricas de curvatura escalar constante?

Podemos ser más ambiciosos y preguntar:

2) ¿Podemos encontrar una métrica de curvatura escalar constante deformando conformemente una métrica dada?

Una respuesta afirmativa a esta pregunta, que por supuesto implica la primera, nos diría que ser una métrica de curvatura escalar constante no es algo excepcional. Ni tampoco un fenómeno tan rígido, como lo es ser de curvatura seccional constante. La pregunta 2) resulta natural, ya que desde principio del siglo XX se sabe que para superficies (dimensión 2), su respuesta es afirmativa. Fue probado por P. Koebe, en 1907, que dada una superficie dotada de una métrica Riemanniana (M, g) podemos encontrar $h \in [g]$ de curvatura escalar, y por lo tanto curvatura Gaussiana, constante. Este resultado, si bien fue probado a principio del siglo XX, fue conjeturado por Riemann a mediados del siglo XIX y desde entonces se daba por cierto (ver [8]).

Otra pregunta que naturalmente aparece es:

3) Dada f una función diferenciable de M, ¿Existe $g \in \mathcal{M}_M$ tal que $s_g = f$?

Veamos que sucede cuando M es una superficie cerrada de $\mathbb{R}^3$. En este caso, como la dimensión es 2, la curvatura escalar de (M, g) es dos veces la curvatura Gaussiana κ_g. Luego, por el teorema de Gauss-Bonnet, que nos permite relacionar la geometría de la superficie con su topología, tenemos que

$$\int_M s_g dv_g = 2 \int_M k_g dv_g = 4\pi\chi(M), \tag{3}$$

donde $\chi(M)$ es la característica de Euler de M (ver [13], [16], [32]).

La primera conclusión que podemos extraer de la igualdad (3) es que en una superficie no cualquier función diferenciable corresponde a la curvatura escalar de una métrica

Riemanniana. Por ejemplo, si g una métrica Riemanniana cualquiera de la esfera S^2, tenemos que

$$\int_{S^2} s_g dv_g = 8\pi.$$

Por lo tanto, s_g no puede ser una función siempre no positiva. Es decir, si $f \in C^\infty(S^2)$ es la curvatura escalar de una métrica, entonces f debe ser positiva en alguna región de S^2. Si consideramos el toro T^2, ya que $\chi(T^2) = 0$, para toda $g \in \mathcal{M}_{T^2}$ necesariamente debe haber un punto $p \in T^2$ tal que $s_g(p) = 0$. Más precisamente, $s_g \equiv 0$ o bien s_g debe cambiar de signo. En particular, la única función constante correspondiente a la curvatura escalar de una métrica es la función nula.

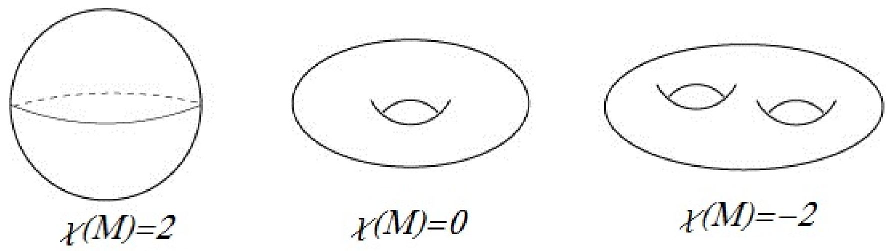

Figura 1

En general si $g \in \mathcal{M}_S$ y $s_g \equiv c$ constante, su signo debe ser el mismo que el de la característica de Euler, más precisamente $c = 4\pi\chi(M).vol(M, g)^{-1}$.

En este curso principalmente estaremos abocados a la segunda pregunta, en dimensión mayores o igual a 3, y aspectos relacionados con esta. De todas formas, al final de la Sección 6 mencionaremos algunos resultados referentes al problema de prescribir la curvatura escalar.

La pregunta 2), que reformularemos a continuación, se conoce como el problema de Yamabe:

Problema de Yamabe :

Dado (M^n, g) una variedad Riemanniana cerrada (compacta y sin borde) de dimensión $n \geq 3$ ¿Existe una métrica $h \in [g]$ de curvatura escalar constante?

En 1960, el año de su muerte, H. Yamabe publicó un artículo [54] donde daba una prueba de que efectivamente, en cada clase conforme había una métrica de curvatura escalar constante. Ocho años más tarde, N. Trudinger [51] encontró un error en dicha prueba. Sin embargo, pudo ver que la respuesta seguía siendo afirmativa si se cumple que

$$\int_M s_g dv_g \leq 0.$$

En 1976, T. Aubin [5] dió una prueba del problema de Yamabe, siempre y cuando hubiera en la clase conforme una métrica h que satisfaga

$$\frac{\int_M s_h dv_h}{vol(M, h)^{\frac{n-2}{n}}} < n(n-1)vol(S^n, g_0^n)^{\frac{2}{n}}. \tag{4}$$

Aubin conjeturó que esta condición no es muy restrictiva. Sino por el contrario, la desigualdad debía darse siempre, a menos que existiera un difeomorfismo conforme entre (M, g) y (S^n, g_0^n). Además, en 1976, probó esta conjetura para muchos casos. Más precisamente probó la conjetura cuando (M, g) no es localmente conforme plana (ver

Sección 2) y dim $(M) \geq 6$. Finalmente en 1984, R. Schoen [43] probó los casos restantes de la conjetura de Aubin y, por lo tanto, dio una prueba definitiva del problema de Yamabe.

Estas notas están organizadas de la siguiente manera. En la Sección 2, introducimos la ecuación y el funcional de Yamabe. Analizamos la relación entre los puntos críticos de dicho funcional, las métricas de curvatura escalar constante y las soluciones positivas de la ecuación de Yamabe. Definimos la constante de Yamabe y vemos cual es su significado geométrico. También, en esta sección, analizamos la constante de Yamabe de (S^n, g_0^n). En la Sección 3, damos propiedades generales de la constante de Yamabe, resultados de multiplicidad de métricas de curvatura escalar constante y discutimos el significado del signo del primer autovalor de Laplaciano conforme junto con otras propiedades de su espectro. En la Sección 4, tratamos el caso subcrítico de la ecuación de Yamabe y sus consecuencias geométricas. En la Sección 5, damos una idea de la prueba del problema de Yamabe. En la Sección 6, introducimos el invariante de Yamabe. Mostramos una caracterización cuando este es negativo y comentamos ciertas cotas conocidas del invariante de Yamabe cuando resulta positivo. También discutimos el comportamiento del invariante de Yamabe bajo cirugías. Para finalizar, mencionamos y comentamos resultados acerca del problema de prescribir la curvatura escalar.

A lo largo de estas notas, a menos que lo aclaremos, las variedades que consideraremos serán cerradas y conexas. Cuando decimos que una función es suave o diferenciable nos referimos a que esta es infinitamente diferenciable (C^∞).

Agradecimientos Quisiera agradecer a los organizadores del EGEO 2016, VI Workshop on Differential Geometry por la invitación a dar este curso.

2. Funcional y Ecuación de Yamabe

Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión n. Recordamos que el Laplaciano de (M, g) es el operador definido por

$$u \in C^2(M) \longrightarrow \Delta_g(u) := -traza(Hess(u)),$$

donde $Hess(u)$ es el Hessiano de u.

Su expresión en un sistema de coordenadas (U, φ) es

$$\Delta_g(u) = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial}{\partial \varphi^i}(g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial u}{\partial \varphi^j}), \tag{5}$$

donde $\det g$ es el determinante de la matriz $(g_{ij}) = (g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}))$ y g^{ij} es la entrada (i, j) de la matriz $(g_{ij})^{-1}$.

Consideremos una métrica h en la clase conforme $[g]$. Si escribimos a h como $h = u^{p_n - 2} g$, con $u \in C^\infty_{>0}(M)$ y $p_n = \frac{2n}{n-2}$, se tiene que su curvatura escalar esta dada por

$$s_h = u^{1-p_n}\Big(a_n \Delta_g u + s_g u\Big), \tag{6}$$

donde $a_n = \frac{4n}{n-2}$, (ver Apéndice 7.1).

El factor $a_n \Delta_g u + s_g u$ que aparece en la parte derecha de la igualdad (6) corresponde a un importante operador lineal llamado Laplaciano conforme de (M, g) y que notaremos con L_g. Una propiedad importante del operador L_g, que utilizaremos a menudo, es su invarianza conforme (ver Apéndice 7.2). Es decir, si $h = u^{p_n - 2} g$, entonces el Laplaciano conforme satisface

$$L_h(\varphi) = u^{1-p_n} L_g(u\varphi). \tag{7}$$

Dada una función suave f, el problema de encontrar una métrica $h \in [g]$ con curvatura escalar f es equivalente al de encontrar una solución positiva u de la siguiente ecuación:

$$L_g(u) = a_n \Delta_g u + s_g u = f u^{p_n - 1}. \tag{8}$$

En este caso, $u^{p_n-2} g$ sería una métrica de curvatura escalar f. En particular, estaremos interesados cuando $f \equiv c$ es constante (Pregunta 2 de la Introducci'on). Es decir, buscamos soluciones positivas de

$$L_g(u) = c u^{p_n - 1}. \tag{9}$$

Esta última ecuación recibe el nombre de ecuación de Yamabe.

Consideremos el funcional $Y : [g] \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$h \in [g] \longrightarrow Y(h) := \frac{\int_M s_h dv_h}{Vol(M,h)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Notar que esta es la cantidad que aparece en el lado izquierdo de la desigualdad (4) (ver Introducción, Conjetura de Aubin).

Si $h = u^{p_n-2} g$, su elemento de volumen es $dv_h = u^{p_n} dv_g$. Aplicando la igualdad (6) podemos escribir el funcional Y como

$$Y(h) = \frac{\int_M L_g(u) u dv_g}{\left(\int_M u^{p_n} dv_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{\int_M a_n u \Delta_g u + s_g u^2 dv_g}{\left(\int_M u^{p_n} dv_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Luego, utilizando la fórmula de Green $\int_M u \Delta_g v dv_g = \int_M < \nabla u, \nabla v > dv_g$ (ver Apéndice 7.3), obtenemos que

$$Y(h) = \frac{\int_M a_n |\nabla u|_g^2 + s_g u^2 dv_g}{\|u\|_{p_n}^2}, \tag{10}$$

donde con $\|u\|_l$ denota la norma de u en el espacio de Lebesgue $L^l(M)$, i.e., $\|u\|_l = \left(\int_M |u|^l dv_g\right)^{\frac{1}{l}}$.

Por lo tanto, mediante la identificación

$$h \in [g] \longleftrightarrow u \in C^\infty_{>0}(M) \text{ tal que } h = u^{p_n-2} g$$

el funcional de Yamabe induce un funcional en $C^\infty_{>0}(M)$

$$u \in C^\infty_{>0}(M) \longrightarrow Y_g(u) = Y(u^{p_n-2} g).$$

A este funcional también lo llamaremos funcional de Yamabe, y para no sobrecargar innecesariamente la notación, también lo notaremos con Y, siempre y cuando quede claro la métrica que estemos usando. De todas formas, gracias a la invarianza conforme de L_g, igualdad (7), tenemos que

$$Y_h(v) = \frac{\int_M L_h(v) v dv_h}{\left(\int_M v^{p_n} dv_h\right)^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{\int_M u^{1-p_n} L_g(uv) v u^{p_n} dv_g}{\left(\int_M v^{p_n} u^{p_n} dv_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} = Y_g(uv). \tag{11}$$

La relación entre el funcional y la ecuación de Yamabe queda establecida en la siguiente proposición:

Proposición 2.1. *Sea $u \in C^\infty_{>0}(M)$. Luego, u es un punto crítico de Y si y solo si u es solución de la ecuación de Yamabe con constante $c = \frac{Y(u)}{\|u\|_{p_n}^{p_n-2}}$.*

Demostración. Una función u es un punto crítico de Y si y solo si para toda $\varphi \in C^\infty(M)$ se tiene que

$$\frac{\partial Y(u+t\varphi)}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

Desarrollando el funcional de Yamabe obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} Y(u+t\varphi)|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\int_M L_g(u+t\varphi)(u+t\varphi) dv_g}{\|u+t\varphi\|_{p_n}^2}\Big)|_{t=0}$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\int_M L_g(u)u + 2tL_g(u)\varphi + t^2 L_g(\varphi)\varphi dv_g}{\|u+t\varphi\|_{p_n}^2}\Big)|_{t=0}.$$

En la última igualdad, utilizamos que L_g es un operador autoadjunto, es decir que satisface que $\int_M L_g(u)\varphi dv_g = \int_M L_g(\varphi) u v_g$, lo cual se deduce de la fórmula de Green (ver Apéndice 7.3).

Tenemos que

$$\frac{\partial Y(u+t\varphi)}{\partial t}|_{t=0} = \Big(\|u\|_{p_n}^2 \int_M 2L_g(u)\varphi dv_g \tag{12}$$
$$-2\|u\|_{p_n}^{\frac{2-p_n}{p_n}} \int_M L_g(u) u dv_g \int_M u^{p_n-1}\varphi dv_g\Big)\|u\|_{p_n}^{-4}$$
$$= 2\Big(\int_M L_g(u)\varphi dv_g - Y(u)\|u\|_{p_n}^{2-p_n} \int_M u^{p_n-1}\varphi dv_g\Big)\|u\|_{p_n}^{-2}.$$

Por lo tanto, u es un punto crítico de Y si y solo si para toda $\varphi \in C^\infty(M)$ se tiene que

$$\int_M L_g(u)\varphi dv_g - Y(u)\|u\|_{p_n}^{2-p_n} \int_M u^{p_n-1}\varphi dv_g =$$
$$= \int_M \big(L_g(u) - Y(u)\|u\|_{p_n}^{2-p_n} u^{p_n-1}\big)\varphi dv_g = 0,$$

lo cual es equivalente a que u sea solución de la ecuación de Yamabe con la constante anunciada. $\square$

Es decir, la ecuación de Yamabe es la ecuación de Euler-Lagrange del funcional de Yamabe. Desde un enfoque variacional, el problema de encontrar métricas de curvatura escalar constante en una clase conforme es equivalente a encontrar puntos críticos de Y.

Notar que el funcional de Yamabe esta acotado inferiormente. En efecto, por la desigualdad de Hölder (ver Apéndice 7.3.1) se tiene que

$$\int_M u^2 dv_g \leq \big(\int_M u^{p_n} dv_g\big)^{\frac{2}{p_n}} \big(\int_M 1 dv_g\big)^{\frac{p_n-2}{p_n}}$$

$$= \|u\|_{p_n}^2 vol(M,g)^{\frac{2}{n}}.$$

Si s_g es una función no negativa, entonces de (10) se ve claramente que $Y(u) \geq 0$ para toda $u \in C^\infty_{>0}(M)$. Si $\mathrm{mín}\, s_g < 0$, entonces

$$Y(u) \geq (\mathrm{mín}\, s_g) \frac{\int_M u^2 dv_g}{\|u\|_{p_n}^2} \geq (\mathrm{mín}\, s_g) vol(M,g)^{\frac{2}{n}}.$$

Definimos la constante de Yamabe de $(M,[g])$ como

$$Y(M,[g]) := \operatorname*{ínf}_{h\in[g]} Y(h) > -\infty$$

o bien equivalentemente,

$$Y(M,[g]) = \operatorname*{ínf}_{u\in C^\infty_{>0}(M)} Y_g(u).$$

Observación 2.2. *De la igualdad (11) se ve que efectivamente la constante de Yamabe es un invariante de la clase conforme. Es decir, si g y h están en la misma clase conforme se tiene que* $\mathrm{ínf}_{u\in C^\infty_{>0}(M)} Y_g(u) = \mathrm{ínf}_{u\in C^\infty_{>0}(M)} Y_h(u)$.

Notar que como $|\nabla|u|| = |\nabla u|$ para casi todo punto de M, se tiene que $Y_g(|u|) = Y_g(u)$. Luego, en la definición de la constante de Yamabe podemos tomar el ínfimo sobre $C^\infty(M) - \{0\}$ y la constante no cambia.

El enfoque variacional, es decir aquel que se centra en tratar de encontrar puntos críticos del funcional de Yamabe, es el que utilizaron Yamabe, Trüdinger, Aubin y Schoen para probar la existencia de métricas con curvatura scalar constante. Probaron el siguiente teorema, cuya prueba discutiremos en la Sección 5.

Teorema 2.3. *Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión $n \geq 3$. Luego, existe $h \in [g]$ tal que $Y(M,[g]) = Y(h)$.*

Corolario 2.4. *Toda clase conforme admite una métrica de curvatura escalar constante.*

En una clase conforme no puede haber dos métricas de curvatura escalar con distinto signo. En efecto, si s_g es una función positiva, luego para una métrica de la forma $h = u^{p_n-2}g$ tenemos que

$$\int_M \Delta_g u dv_g + \int_M s_g u dv_g = \int_M s_h u^{p_n-1} dv_g. \tag{13}$$

Por el teorema de la divergencia (ver Apéndice 7.3) sabemos que

$$\int_M \Delta_g u dv_g = 0,$$

con lo cual,

$$0 < \int_M s_g u dv_g = \int_M s_h u^{p_n-1} dv_g.$$

Por lo tanto, s_h no puede ser una función no positiva, es decir, $s_h \geq 0$, excluyendo por su puesto a la función nula, o bien s_h cambia de signo.

Del mismo modo si s_g es una función negativa y $h \in [g]$, se tiene que s_h no puede ser una función no negativa.

Por otro lado, si s_g es la función nula y $h = u^{p_n-2}g$, tenemos de (13) que

$$\int_M s_h u^{p_n-1} dv_g = 0,$$

con lo cual, $s_h \equiv 0$, o bien es una función que cambia de signo.

De estas observaciones podemos deducir que el signo de la constante de Yamabe determina el signo de las curvaturas escalares que admite la clase conforme:

Proposición 2.5. *Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión $n \geq 3$:*

a) *$Y(M, [g]) > 0$ si y solo si existe $h \in [g]$ con $s_h > 0$.*
b) *$Y(M, [g]) = 0$ si y solo si existe $h \in [g]$ con $s_h = 0$.*
c) *$Y(M, [g]) < 0$ si y solo si existe $h \in [g]$ con $s_h < 0$.*

Demostración. La condición necesaria de a), b) y c) se desprende inmediatamente del Teorema 2.3, del cual sabemos que existe una métrica de curvatura escalar constante del mismo signo que $Y(M, [g])$.

Supongamos que tenemos una métrica h con $s_h > 0$. Por el Teorema 2.3, sabemos que existe $\tilde{h} \in [h] = [g]$ con $s_{\tilde{h}}$ constante y que minimiza el funcional de Yamabe. Por los comentarios previos a la Proposición, $s_{\tilde{h}} > 0$, lo cual implica

$$Y(M, [g]) = Y(\tilde{h}) = s_{\tilde{h}} vol(M, \tilde{h})^{\frac{2}{n}} > 0.$$

De forma similar se prueban las condiciones suficientes de los puntos b) y c). □

Observación 2.6. *Recordar que una situación similar habíamos observado en la Introducción para el caso de superficies. En este caso el funcional de Yamabe es constante en clase conforme y su valor es $4\pi\chi(M)$.*

Ejemplo 2.7. *Como (S^n, g_0^n) es de curvatura escalar constante $n(n-1)$, $Y(S^n, [g_0^n]) > 0$. Más precisamente veremos en la Proposición 2.15 que su constante de Yamabe es $Y(S^n, [g_0^n]) = n(n-1)vol(S^n, g_0^n)^{\frac{2}{n}}$. Del mismo modo sabemos que $Y(\mathbb{H}^n/\Gamma, [g_h^n]) < 0$, donde $\mathbb{H}^n/\Gamma$ es un cociente compacto del espacio Hiperbólico; Usando el punto* b) *de la proposición anterior se ve que $Y(T^n, [g_T]) = 0$, donde (T^n, g_T) es el toro $n-$dimensional plano.*

Ejemplo 2.8. *Sea (M, g) una variedad de curvatura escalar positiva y (N, h) una variedad Riemanniana cerrada. Luego, $Y(M \times N, [g + th]) > 0$ si t es suficientemente grande. Pues, de los Ejemplos 1.2 y 1.3 tenemos que $s_{g+th} = s_g + \frac{1}{t}s_h$, que será positiva si t es suficientemente grande.*

Por un resultado de Elíasson (ver [15]) es sabido que para todo $c \in \mathbb{R}$ existe una métrica $h_c \in \mathcal{M}_M$ de modo que $Y(h_c) = c$ si $\dim(M) \geq 3$. En particular, si $c < 0$ tenemos que $Y(M, [h_c]) < 0$. Estas métricas son deformaciones de una métrica g del tipo $h(X_p, Y_p) = g(\xi(p))\big(\psi(p)X_p + d\rho(X_p)\nabla\rho_p, Y_p\big)$, con $\psi > 0$, ρ y ξ funciones adecuadamente escogidas. Por lo tanto, resulta que no hay ninguna restricción para la existencia de métricas con curvatura escalar negativa. Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.9. *Sea M una variedad Riemanniana de $dim(M) \geq 3$, entonces existe $g \in \mathcal{M}_M$ con curvatura escalar (constante) negativa.*

Pero esta no es la situación si requerimos que la curvatura escalar sea no negativa. Se conocen ejemplos de variedades que no admiten métricas con curvatura escalar no negativa. El toro $n-$dimesional T^n no admite métricas de curvatura escalar positiva (ver [18]). Un cociente compacto de $\mathbb{H}^3$ no admite métricas de curvatura escalar no negativas (ver [4] y Sección 6).

Observación 2.10. *Si en lugar de considerar el funcional de Yamabe sobre una clase conforme determinada, consideramos el funcional sobre todo el espacio de métricas Riemannianas $\mathcal{M}_M$, este recibe el nombre de funcional de Hilbert-Einstein (normalizado). Los puntos críticos de este funcional son las métricas que satisfacen* (ver [9]) :

$$Ricc_g = \lambda g.$$

Estas métricas son conocidas como métricas de Einstein y resultan de curvatura escalar constante. Algunos ejemplos son:

- g_e^n *en* $\mathbb{R}^n$, g_0^n *en* S^n *y* g_h^n *en* $\mathbb{H}^n$.
- $g_0^n + g_0^n$ *en* $S^n \times S^n$.
- *Métrica de Fubinni-Study en* $\mathbb{C}P^n$.

Sin embargo, a diferencia del funcional de Yamabe, este funcional no está acotado (ni inferior, ni superiormente) y podría pasar que no tenga puntos críticos. Por ejemplo, es bien conocido que existen variedades cerradas de dimensión 3 *y* 4 *que no admiten métricas de Einstein* (ver [30]).

2.1. Espacios de Sobolev. El espacio de funciones que resulta natural para tratar problemas en los que se ve involucrado la ecuación y el funcional de Yamabe es el espacio de Sobolev $H_1^2(M)$. Este se define como la completación del espacio $C^\infty(M)$ con respecto a la norma

$$\|u\|_{2,1} = \left(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De forma similar se define $H_k^p(M)$, y todos estos resultan espacios de Banach. Cuando $k=0$, $H_0^p(M$ es $L^p(M)$. Además, $H_1^2(M)$ (también $H_k^2(M)$) es un espacio de Hilbert con el producto interno definido por

$$< u, v >= \int_M < \nabla u, \nabla v > dv_g + \int_M uv dv_g.$$

En principio la definición de $H_k^p(M)$ depende de la métrica de la variedad Riemanniana. Sin embargo, se puede ver que si M es compacta, $H_k^p(M)$ resulta independiente de la métrica Riemanniana elegida (ver [20]). Esto es falso en el caso no compacto. Por ejemplo, si dotamos a $\mathbb{R}^n$ con una métrica de volumen finito, entonces una función constante no nula pertenece a $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo p. Por otro lado, la función $u \equiv c \neq 0$ no es integrable en $(\mathbb{R}^n, g_e^n)$.

No resulta difícil verificar que

$$Y(M,[g]) = \inf_{u \in H_1^2(M)-\{0\}} \frac{\int_M a_n |\nabla u|_g^2 + s_g u^2 dv_g}{\|u\|_{p_n}^2}.$$

El siguiente teorema es muy importante el tratamiento variacional de las ecuaciones elípticas, como lo es la ecuación de Yamabe.

Teorema 2.11. *Sea* (M,g) *una variedad Riemanniana cerrada. Tenemos que*

a) *La inclusión* $i : H_1^2(M) \longrightarrow L^{p_n}(M)$ *es un operador continuo.*

b) [Relich-Kondrakov] *Si* $s < p_n$*,* $H_1^2(M)$ *esta incluido de manera compacta en* $L^s(M)$*.*

El hecho de que las inclusiones $H_1^2(M) \subseteq L^{p_n}(M) \subseteq L^2(M)$ sean continuas implican que:

Corolario 2.12. *El funcional de Yamabe es continuo en* $H_1^2(M) - \{0\}$*.*

Observación 2.13. *La dificultad del problema de Yamabe, como veremos más adelante al tratar el caso subcrítico en la Sección 4, radica en que justamente la inclusión de* $H_1^2(M)$ *en* $L^{p_n}(M)$ *no es compacta.*

Ver ([20], Capítulo 2) para más detalles sobre los espacios de Sobolev

Más adelante también trataremos con los espacios de Hölder $C^{k,\alpha}(M)$. Recordamos su definición (consultar [7] y [17]): dado $k \geq 0$ y $0 < \alpha < 1$, $C^{k,\alpha}(M)$ son las funciones $u \in C^k(M)$ que satisfacen

$$\|u\|_{k,\alpha} = \sum_{i=1}^{k} \sup_{x \in M} |\nabla^k u| + \sup_{x \neq y} \frac{|\nabla^k u_x - \nabla^k u_y|}{d(x,y)^\alpha} < \infty.$$

2.2. Constante de Yamabe de la esfera.

Sea $f : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ una isometría, es decir, f es un difeomorfismo que satisface que $f^*(h) = g$. Como para todo $v \in C^2(N)$ se cumple que

$$\Delta_h(v) \circ f = \Delta_g(v \circ f) \tag{14}$$

(ver [12]), tenemos que

$$Y_h(v) = Y_g(v \circ f), \tag{15}$$

y por lo tanto, resulta que

$$Y(M,[g]) = Y(N,[h]).$$

Por otro lado, gracias a la invarianza del Laplaciano conforme (igualdad (7)), para $h \in [g]$ resulta que

$$Y_h(v) = Y_g(uv) \tag{16}$$

si $h = u^{p_n - 2} g$.

Con lo cual, si $f : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ es un difeomorfismo conforme, con $f^*(h) = u^{p_n-2} g$ se tiene que

$$Y_g(u(v \circ f)) = Y_h(v),$$

de lo que obtenemos inmediatamente la siguiente proposición:

Proposición 2.14. *Sea* (M,g) *y* (N,h) *dos variedades Riemannianas y* $f : M \longrightarrow N$ *un difeomorfismo conforme. Entonces,* $Y(M,[g]) = Y(N,[h])$*.*

Notemos además, que si v es una solución de la ecuación de Yamabe en (N,h) con constante c y f un difeomorfismo conforme como en la proposición, entonces $u.f^*(v) = u.(v \circ f)$ es solución de la ecuación de Yamabe de (M,g) con la misma constante, es decir satisface

$$L_g(u.(v \circ f)) = c[u.(v \circ f)]^{p_n - 1}. \tag{17}$$

En efecto, como f es una isometría entre $(M, u^{p_n-2}g)$ y (N, h), usando (14) y que $s_h \circ f = s_{u^{p_n-2}g}$, se tiene que

$$L_{u^{p_n-2}g}(v \circ f) = c(v \circ f)^{p_n-1}.$$

Luego, utilizando la invarianza conforme de L_g se obtiene (17).

Notemos con $P_N = (0, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ el "polo norte" de S^n. La proyección estereográfica desde P_N es la aplicación $\sigma_N : S^n - \{P_N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\sigma_N(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \Big(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\Big),$$

y su función inversa $\rho_N : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n - \{P_N\}$ esta dada por

$$\rho_N(x_1, \ldots, x_n) = \Big(\frac{2x_1}{1 + \|x\|^2}, \ldots, \frac{2x_n}{1 + \|x\|^2}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1}\Big).$$

La proyección estereográfica es un difeomorfismo conforme entre $(S^n - \{P_N\}, g_0^n)$ y $(\mathbb{R}^n, g_e^n)$. Más precisamente, tenemos que para $x \in \mathbb{R}^n$

$$\rho_N^*(g_0^n)(x) = \frac{4}{1 + \|x\|^2} g_e^n = \Big[\Big(\frac{4}{1 + \|x\|^2}\Big)^{\frac{n-2}{2}}\Big]^{p_n-2} g_e^n(x) \tag{18}$$

Para $x \in S^n - \{P_N\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma_N^*(g_e^n)(x) &= \Big[\Big(\frac{1 + \|\sigma_N(x)\|^2}{4}\Big)^{\frac{n-2}{2}}\Big]^{p_n-2} g_0^n(x) \\ &= \Big[\Big(2(1 - x_{n+1})\Big)^{\frac{2-n}{2}}\Big]^{p_n-2} g_0^n(x) \end{aligned} \tag{19}$$

Cuando la variedad no es compacta, podemos definir la constante de Yamabe de la siguiente manera:

$$Y(W, g) = \inf_{C_0^\infty(M) - \{0\}} \frac{\int_W a_n |\nabla u|_g^2 + s_g u^2 dv_g}{\|u\|_{p_n}^2}.$$

En estas notas no trataremos el caso no compacto del problema de Yamabe, pero señalemos brevemente que hay algunas diferencias con el caso compacto. Por ejemplo, la Poposición 2.5 ya no es cierta. Es decir, en una clase conforme uno puede tener métricas con curvatura escalar de distinto signo. $\rho_N^*(g_0^n) \in [g_e^n]$, pero ρ_N es una isometría entre $(\mathbb{R}^n, \rho_N^*(g_0^n))$ y $(S^n - \{P_N\}, g_0^n)$, por lo tanto $s_{\rho_N^*(g_0^n)} = n(n-1)$. Del mismo modo, podemos considerar en la clase conforme de $[g_0^n]$ la métrica $\sigma_N^*(g_e^n)$ de $S^n - \{P_N\}$ que es de curvatura escalar constante 0.

Sea W de $\dim(W) \geq 3$. Si W es difeomorfa a una subvariedad abierta de una variedad compacta, entonces cualquier función suave es la curvatura escalar de una métrica de W (ver en [25], Teorema 1.4). Luego, ya que $\mathbb{R}^n$ es difeomorfa a la esfera menos un punto, el problema de prescribir una curvatura escalar para $\mathbb{R}^n$ no presenta obstrucciones.

Como $\rho_N : (\mathbb{R}^n, g_e^n) \longrightarrow (S^n - \{P_N\}, g_0^n)$ es un difeomorfismo conforme, por (15) y (16) para toda función v suave, no nula, cuyo soporte este incluido en $S^n - \{P_N\}$ se tiene que

$$Y_{g_0^n}(v) = \frac{\int_{\mathbb{R}} a_n |\nabla u\rho^*(v)|^2_{g_e^n} dv_{g_e^n}}{\|u\rho^*(v)\|^2_{p_n}},$$

donde $u = \left(\frac{4}{1+\|x\|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$.

Luego,

$$Y(S^n, [g_0^n]) = \inf_{C^\infty(S^n)-\{0\}} Y_{g_0^n}(v) = \inf_{\substack{v\in C^\infty(S^n)-\{0\} \\ sop(v)\in S^n-\{P_N\}}} Y_{g_0^n}(v)$$

$$= \inf_{\substack{v\in C^\infty(S^n)-\{0\} \\ sop(v)\in S^n-\{P_N\}}} \frac{\int_{\mathbb{R}} a_n |\nabla u\rho^*(v)|^2_{g_e^n} dv_{g_e^n}}{\|u\rho^*(v)\|^2_{p_n}} = \inf_{w\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)-\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}} a_n |\nabla w|^2_{g_e^n} dv_{g_e^n}}{\|w\|^2_{p_n}}.$$

Por un resultado de Sobolev, sabemos que existe una constante positiva C tal que para toda $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ se satisface que

$$\|w\|^2_{p_n} \leq C\|\nabla w\|^2_2. \tag{20}$$

A la menor de estas constantes, que resulta positiva, la llamaremos constante de Sobolev de $\mathbb{R}^n$ y la notaremos con $C(n)$. Su caracterización variacional es

$$C(n)^{-1} = \inf_{w\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)-\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w|^2_{g_e^n} dv_{g_e^n}}{\|w\|^2_{p_n}}. \tag{21}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$C(n) = \frac{a_n}{Y(S^n, [g_0^n])}.$$

Aubin [6] y Talenti [50] probaron (ver también [7] y [49]) que

$$C(n) = \frac{4}{n(n-2)vol(S^n, g_0^n)^{\frac{2}{n}}}$$

y que (21) se alcanza con funciones de la forma

$$\psi_\varepsilon(x) := \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \|x\|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \varepsilon^{-\frac{n-2}{2}} \psi(\varepsilon^{-1}x), \tag{22}$$

donde

$$\psi(x) = \left(\frac{1}{1 + \|x\|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

Es decir, para todo $\varepsilon > 0$

$$\frac{\|\nabla\psi_\varepsilon\|^2_2}{\|\psi_\varepsilon\|^2_{p_n}} = \frac{1}{C(n)}. \tag{23}$$

Notar que una función que realiza el ínfimo (21), después de una adecuada multiplicación por un escalar, es una solución de la ecuación

$$\Delta_{g_e^n} v = n(n-2)v^{p_n-1}. \tag{24}$$

En particular, se puede verificar que ψ_ε es solución de la ecuación anterior para todo $\varepsilon > 0$. Cafarelli, Gidas y Spruck probaron en [10] que las únicas soluciones positivas de la ecuación (24) son de la forma

$$\psi_\varepsilon(x - x_0) = \varepsilon^{-\frac{n-2}{2}} \psi(\varepsilon^{-1}(x - x_0)) \tag{25}$$

con $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

De (17) y (19), tenemos que

$$v = u.(\psi_\varepsilon \circ \sigma_N) \tag{26}$$

con $u = \left(\frac{1+\|\sigma_N(x)\|^2}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}$ es solución de la ecuación de Yamabe en la esfera con constante $n(n-1)$, o sea satisface

$$a_n \Delta_{g_0^n} v + n(n-1)v = n(n-1)v^{p_n - 1}.$$

Además, se puede decir que son todas funciones minimizantes del funcional de Yamabe. Por otro lado, son las métricas inducidas en $[g_0^n]$ por las funciones extremales (25) son las únicas con curvatura escalar constante. Pues, si $h = v^{p_n-2} g_0^n$ es de curvatura constante, luego tomando un múltiplo adecuado de esta, $\left(\frac{4}{1+\|x\|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} (v \circ \rho_N)$ será una solución positiva de (24), y salvo alguna translación, será igual a ψ_ε para algun $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, v es de la forma (26).

De los comentarios anteriores se desprende el siguiente resultado:

Teorema 2.15. *La constante de Yamabe en la clase conforme $[g_0^n]$ de S^n es*

$$Y(S^n, [g_0^n]) = n(n-1) vol(S^n, g_0^n)^{\frac{2}{n}},$$

y es realizada por la métrica estándar y por todos múltiplos escalares de

$$\Big[u(\psi_\varepsilon \circ \sigma_N)\Big]^{p_n-2} g_0^n$$

con u como en (26).

Observación 2.16. *M. Obata probó (ver* [34] *y* [33]*) que si $h \in [g_0^n]$ es de curvatura escalar constante, entonces h es de la forma*

$$h = c.f^*(g_0^n)$$

con $c > 0$ y f un automorfismo conforme de (S^n, g_0^n). Esto es, porque se puede ver que h necesariamente debe ser una métrica de Einstein, y como h es conforme a g_0^n, su tensor de Weyl, que notamos con W_h, es nulo (ver a acontinuación). *Luego, de la descomposición del tensor de curvatura de h* (ver [9], [16], [42])

$$R_h = \overbrace{W_h}^{0} + \frac{1}{n-2} \overbrace{\left(Ricc_h - \frac{s_h}{n} h\right)}^{0} \bigodot h + \frac{s_h}{2n(n-1)} h \bigodot h$$

(aquí $\bigodot$ denota el producto de Kulkarni-Nomizu) *se ve que h es una métrica de curvatura seccional constante. Por lo tanto, existe $c > 0$ y f que resulta una isometría entre (S^n, h) y (S^n, cg_0^n)* (ver [14], [16], [42]). *O sea, $h = cf^*(g_0^n)$ y f es un automorfismo conforme de (S^n, g_0^n).*

(S^n, g_0^n) en un ejemplo de lo que se denomina una variedad localmente conforme plana (l. c. p). Decimos que una variedad (M, g) es l. c. p. si para todo $p \in M$ existe un entorno $p \in U_p$ tal que la métrica g restringida a ese entorno es conforme a $(\mathbb{R}^n, g_e^n)$. Por ejemplo, todo variedad de curvatura seccional constante es localmente conforme plana. El tensor de Weyl tiene la propiedad de que si $h = fg \in [g]$, entonces $W_h = fW_g$. Luego, si (M, g) es l. c. p., entonces $W_g \equiv 0$. También se puede ver que si $\dim(M) \geq 4$, la recíproca es cierta. En dimensión 3, el tensor de Weyl es siempre nulo, sin embargo, existen variedades que no son l. c. p. Por ejemplo, $(M^2 \times S^1, g + g_0^1)$ con (M^2, g) una superficie de curvatura Gaussiana no constante no es localmente conforme plana. Como consecuencia de la existencia de coordenas isotermales todas las superficies son l. c. p. Para ver estas propiedades y más sobre las variedades localmente conforme planas consultar [9], [16] y [42].

3. Propiedades de la constante de Yamabe

En esta sección veremos algunas propiedades de la constante de Yamabe y de las soluciones de ecuación de Yamabe.

3.1. Multiplicidad de métricas de curvatura escalar constante.

Sabemos que en cada clase conforme, tenemos al menos una métrica de curvatura escalar constante ¿Habrá otras esencialmente distintas con esta propiedad? ¿Nos dice algo la constante de Yamabe sobre la cantidad de las mismas? Decimos esencialmente distintas, pues sabemos que si dilatamos por un escalar positivo una métrica de curvatura escalar constante, entonces también resulta de curvatura escalar constante.

Proposición 3.1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada conexa de dimensión $n \geq 3$ con $Y(M, [g]) \leq 0$. Si h_1 y $h_2 \in [g]$ y ambas son de curvatura escalar constante, entonces existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que*

$$h_1 = ch_2.$$

Demostración. Si $Y(M, [g]) = 0$, por la Proposición 2.5 necesariamente $s_{h_1} = s_{h_2} = 0$. Luego, si $h_2 = u^{p_n - 2} h_1$ tenemos que

$$\Delta_{h_1} u = 0.$$

De lo cual, aplicando la fórmula de Green, obtenemos que

$$0 = \int_M u \Delta_{h_1} u dv_{h_1} = \int_M |\nabla u|^2 dv_{h_1}.$$

Por lo tanto, u es una función constante.

Consideremos ahora el caso $Y(M, [g]) < 0$. Por el punto c) de la Proposición 2.5 se tiene que $s_{h_1} < 0$ y $s_{h_2} < 0$. Si multiplicamos a h_2 por un factor adecuado c, obtendremos la métrica $\tilde{h}_2 = ch_2$ cuya curvatura escalar es $s_{\tilde{h}_2} = s_{h_1}$. Luego, si $\tilde{h}_2 = u^{p_n - 2} h_1$ tenemos que

$$a_n \Delta_{h_1} u = s_{h_1} \big(u^{p_n - 1} - u \big). \tag{27}$$

Sea x_{ext} un extremo local de u. Al igual que en el caso Euclídeo se tiene que:

Si x_{ext} es un máximo local (mínimo local) de la función u, entonces

$$\Delta_{h_1} u(x_{ext}) \geq 0 \ (\leq 0).$$

Si u tiene un máximo global en x_{max}, y además teniendo encuenta que $s_{h_1} < 0$, entonces de (27) se deduce que

$$u^{p_n - 1}(x_{max}) - u(x_{max}) \leq 0.$$

Es decir, $u(x) \leq u(x_{max}) \leq 1$ para todo $x \in M$. Del mismo modo podemos probar que si u tiene un mínimo global en x_{min}, luego $u(x) \geq u(x_{min}) \geq 1$. Por lo tanto, resulta que $u \equiv 1$ y $h_1 = ch_2$.

□

De la proposición anterior se desprende inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 3.2. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana conexa tal que $Y(M, [g]) \leq 0$ y $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Existe solo una métrica $h_c \in [g]$ de curvatura escalar constante y $vol(M, h_c) = c$.*

Corolario 3.3. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana conexa tal que $Y(M, [g]) \leq 0$ y u una solución positiva de la ecuación de Yamabe. Luego, u es invariante por isometrías de (M, g). Es decir,*

$$f^*(u) = u \circ f = u$$

para toda $f \in Iso(M, g)$.

Demostración. Si u es solución de la ecuación de Yamabe, por los comentarios de la sección anterior, sabemos que $v = u \circ f$ también lo es. Por lo tanto, $v^{p_n - 2} g$ es una métrica de curvatura escalar constante. Por el corolario anterior, necesariamente existe $c > 0$ tal que $u = cv = c(u \circ f)$. Pero como u no es nula y f es una isometría, c debe ser 1.

□

No es la situación general que haya esencialmente una sola métrica de curvatura escalar constante en la clase conforme. Cuando la constante de Yamabe es positiva puede haber más de una métrica (del mismo volumen) con esta propiedad. Para ver esto utilizaremos el siguiente resultado, que da una cota superior a la constante de Yamabe.

Teorema 3.4. *Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana de dimensión $n \geq 3$. Luego,*

$$Y(M, [g]) \leq Y(S^n, [g_0^n]) = n(n-1) vol(S^n, g_0^n)^{\frac{2}{n}}.$$

Sean (M^m, g) y (N^n, h) dos variedades Riemannianas cerradas de curvatura escalar constante y positiva, de volumen unitario y de dimensión m y n, respectivamente. Para $t > 0$, consideremos el producto Riemanniano $(M^m \times N^n, t^{-n} g + t^m h)$ de curvatura escalar constante positiva. Como $dv_{t^{-n} g + t^m h} = (t^{-nm} t^{mn})^{\frac{1}{2}} dv_g dv_h = dv_g dv_h$, tenemos que el $vol(M^m \times N^n, t^{-n} g + t^m h) = 1$. Luego, evaluando estas métricas en el funcional de Yamabe vemos que

$$Y(t^{-n} g + t^m h) = t^n s_g + t^{-m} s_h \longrightarrow_{t \to 0 \text{ ó } t \to +\infty} +\infty.$$

Si fijamos t_0 lo suficientemente grande o chico, tenemos que

$$Y(t_0^{-n} g + t_0^m h) > Y(S^n, [g_0^n]) \geq Y(M^m \times N^n, [t_0^{-n} g + t_0^m h]).$$

Por lo tanto, si bien $t_0^{-n} g + t_0^m h$ es de curvatura escalar constante, esta métrica no minimiza el funcional de Yamabe. Sin embargo, por el Teorema 2.3 sabemos que debe haber una métrica minimizamente, de lo cual se deduce que al menos hay dos métricas de curvatura escalar constante en la clase $[t_0^{-n} g + t_0^m h]$.

R. Schoen probó en [44] que la cantidad de soluciones esencialmente distintas de la ecuación de Yamabe de $(S^n \times S^1, g_0^n + t g_0^1)$, y por lo tanto, la cantidad de métricas con curvatura escalar constante en $[g_0^n + t g_0^1]$, tiende a infinito cuando t lo hace.

Demostración del Teorema 3.4. La idea de la demostración es encontrar funciones test ϕ_ε, de modo que $\limsup_{\varepsilon \to 0} Y_g(\phi_\varepsilon)$ sea menor o igual a $Y(S^n, [g_0^n])$. Como localmente, cualquier variedad es infinitesimalmente parecida al espacio Euclídeo o a la esfera, las funciones candidatas son adaptaciones de las funciones extremales ψ_ε de la desigualdad de Sobolev en $\mathbb{R}^n$ (definidas en (22)).

Supongamos que $Y(M,[g])>0$, pues sino la desigualdad del enunciado del teorema se cumple trivialmente.

Sea $p_0 \in M$ y $B_\delta(p_0)$ la bola geodésica centrada en p_0 y de radio δ. Consideremos una función suave $\eta : M \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga las siguientes propiedades:

- $0 \le \eta \le 1$,
- $\eta(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; q \in B_\delta(p_0) \\ 0 & \text{si } \; q \notin B_{2\delta}(p_0), \end{cases}$
- $|\nabla \eta| \le 2/\delta$.

Para δ pequeño y $\varepsilon << \delta$ definimos la siguiente función:

$$\phi_\varepsilon(q) := \eta(q)\psi_\varepsilon(q) = \eta(q)\Big(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + r^2(q)}\Big)^{\frac{n-2}{2}} \tag{28}$$

donde $r(q)$ es la distancia entre p_0 y q con respecto a la métrica g.

Veremos que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} Y_g(\phi_\varepsilon) \le Y(S^n,[g_0^n]),$$

lo cual prueba el teorema.

Si $(U,\bar{x})$ es una un sistema de coordenadas normales se tiene que $\sqrt{\det g} = 1 + O(r)$. Luego, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_M a_n|\nabla\phi_\varepsilon|^2 + s_g\phi_\varepsilon^2 dv_g &= \int_{B_\delta(p_0)} a_n|\nabla\psi_\varepsilon|^2 dv_g \\ &+ \int_{B_{2\delta}(p_0)-B_\delta(p_0)} a_n|\nabla\eta\psi_\varepsilon|^2 dv_g + \int_{B_{2\delta}(p_0)} s_g\phi_\varepsilon^2 dv_g.\end{aligned} \tag{29}$$

El segundo término de (29) lo podemos acotar por

$$\begin{aligned}\int_{B_{2\delta}(p_0)-B_\delta(p_0)} a_n|\nabla\eta\psi_\varepsilon|^2 dv_g &= a_n\Big[\int_{B_{2\delta}(p_0)-B_\delta(p_0)} \eta^2|\nabla\psi_\varepsilon|^2 \\ &\quad +2\eta\psi_\varepsilon < \nabla\eta, \nabla\psi_\varepsilon > +\psi_\varepsilon^2|\nabla\eta|^2 dv_g\Big] \\ &\le a_n\Big[\int_{B_{2\delta}(p_0)-B_\delta(p_0)} |\nabla\psi_\varepsilon|^2 + \frac{4}{\delta}|\psi_\varepsilon||\nabla\psi_\varepsilon| + \frac{4}{\delta}\psi_\varepsilon^2 dv_g\Big],\end{aligned}$$

donde para obtener la última desigualdad usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

De (29) y teniendo en cuenta que ψ_ε es una función radial obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_M a_n|\nabla\phi_\varepsilon|^2 + s_g\phi_\varepsilon^2 dv_g &\le \int_{B_\delta(p_0)} a_n|\partial_r\psi_\varepsilon|^2 dv_g \\ +\tilde{c}\Big[\int_{B_{2\delta}(p_0)-B_\delta(p_0)} |\partial_r\psi_\varepsilon|^2 &+ |\psi_\varepsilon||\partial_r\psi_\varepsilon| + \psi_\varepsilon^2 dv_g\Big] + \int_{B_{2\delta}(p_0)} s_g\phi_\varepsilon^2 dv_g\end{aligned}$$

donde $\tilde{c}$ es una constante que depende de δ. Luego,

$$\int_M a_n|\nabla\phi_\varepsilon|^2 + s_g\phi_\varepsilon^2 dv_g \le (1+2\delta)\Big[\overbrace{\int_{B_\delta(0)} a_n|\nabla\psi_\varepsilon|^2 dx}^{\mathbf{A}} \tag{30}$$

$$+\tilde{c}\overbrace{\int_{A_\delta(0)}|\nabla\psi_\varepsilon|^2+|\psi_\varepsilon||\nabla\psi_\varepsilon|+\psi_\varepsilon^2dx}^{\mathbf{B}}+$$

$$+K\overbrace{\int_{B_{2\delta}(0)}\psi_\varepsilon^2dx}^{\mathbf{C}}\Big]$$

donde $K=\max_M s_g>0$ y $A_\delta(0)$ el anillo $B_{2\delta}(0)-B_\delta(0)$ en $\mathbb{R}^n$.

Fijando δ, se puede ver que

$$\mathbf{A}\leq Y(S^n,[g_0^n])\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\psi_\varepsilon^{p_n}dx\Big)^{\frac{2}{p_n}}, \tag{31}$$

También que

$$\mathbf{B}=O(\varepsilon^{n-2}), \tag{32}$$

y

$$\mathbf{C}=\begin{cases}O(\varepsilon^2) & \text{si } n>4\\ O(\ln(\frac{2\delta}{\varepsilon})\varepsilon^2) & \text{si } n=4\\ O(\varepsilon) & \text{si } n=3.\end{cases} \tag{33}$$

Notar que de (24) tenemos que $\Delta\psi_\varepsilon=n(n-2)\psi_\varepsilon^{p_n-1}$. Por lo tanto, multiplicando esta expresión por ψ_ε e integrando obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\psi_\varepsilon|^2dx=n(n-2)\int_{\mathbb{R}^n}\psi_\varepsilon^{p_n}dx.$$

De lo cual, como ψ_ε son funciones extremales de la desigualdad de Sobolev en $\mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\frac{1}{C(n)}=\frac{\|\nabla\psi_\varepsilon\|_2^2}{\|\psi_\varepsilon\|_{p_n}^2}=n(n-2)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\psi_\varepsilon^{p_n}dx\Big)^{\frac{2}{n}}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\Big(\int_M\phi_\varepsilon^{p_n}dv_g\Big)^{\frac{2}{p_n}}\longrightarrow_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\psi_\varepsilon^{p_n}dx\Big)^{\frac{2}{p_n}}=[C(n)n(n-2)]^{-\frac{n-2}{2}}$$

y usando (31), (32) y (33) en (30) obtenemos finalmente que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}Y_g(\phi_\varepsilon)\leq Y(S^n,[g_0^n]).$$

Ahora veamos las acotaciones de **A**, **B** y **C**.

A :

$$\mathbf{A}=\int_{B_\delta(0)}a_n|\nabla\psi_\varepsilon|^2dx\leq\int_{\mathbb{R}^n}a_n|\nabla\psi_\varepsilon|^2dx=a_nn(n-2)\int_{\mathbb{R}^n}\psi_\varepsilon^{p_n}dx$$
$$=\Big[a_nn(n-2)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\psi_\varepsilon^{p_n}dx\Big)^{\frac{2}{n}}\Big]\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\psi_\varepsilon^{p_n}dx\Big)^{\frac{2}{p_n}}=Y(S^n,[g_0^n])\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\psi_\varepsilon^{p_n}dx\Big)^{\frac{2}{p_n}}.$$

B :

Como ψ_ε es una función radial su gradiente es

$$\nabla\psi_\varepsilon = \partial_r\psi_\varepsilon = -n(n-2)\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}\frac{r}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

Por lo tanto, como en $A_\delta(0)$ $\delta \leq r \leq 2\delta$ podemos acotar

$$|\nabla\psi_\varepsilon| \leq (n-2)\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}\frac{1}{\delta^{n-1}}$$

y

$$|\psi_\varepsilon| \leq \varepsilon^{\frac{n-2}{2}}\frac{1}{\delta^{n-2}}.$$

De lo cual obtenemos que

$$\mathbf{B} = \int_{A_\delta(0)} |\nabla\psi_\varepsilon|^2 + |\psi_\varepsilon||\nabla\psi_\varepsilon| + \psi_\varepsilon^2 dx$$

$$\leq \int_{A_\delta(0)} (n-2)^2\varepsilon^{n-2}\frac{1}{\delta^{2n-2}} + (n-2)\varepsilon^{n-2} + \varepsilon^{n-2}\frac{1}{\delta^{2n-4}}dx = O(\varepsilon^{n-2}).$$

Finalmente veamos la acotación de $\mathbf{C}$.
Tenemos que

$$\int_{B_{2\delta}(0)} \psi_\varepsilon^l dx = vol(S^{n-1}, g_0^{n-1})\varepsilon^{-\frac{(n-2)l}{2}}\int_0^{2\delta}\frac{r^{n-1}}{(1+\frac{r^2}{\varepsilon^2})^{\frac{(n-2)l}{2}}}dr$$

Haciendo el cambio de variables $r = t/\varepsilon$:

$$\int_{B_{2\delta}(0)} \psi_\varepsilon^l dx = vol(S^{n-1}, g_0^{n-1})\varepsilon^{n-\frac{(n-2)l}{2}}\int_0^{\frac{2\delta}{\varepsilon}}\frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{\frac{(n-2)l}{2}}}dt \tag{34}$$

Para ε suficientemente chico, $2\delta/\varepsilon > 1$

$$\int_0^{\frac{2\delta}{\varepsilon}}\frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{\frac{(n-2)l}{2}}}dt = \int_0^1\frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{\frac{(n-2)l}{2}}}dt + \int_1^{\frac{2\delta}{\varepsilon}}\frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{\frac{(n-2)l}{2}}}dt$$

$$\leq \int_0^1 t^{n-1}dt + \int_1^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} t^{n-1-(n-2)l}dt$$

$$\int_0^{\frac{2\delta}{\varepsilon}}\frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{\frac{(n-2)l}{2}}}dt \leq \begin{cases} \frac{1}{n} + \frac{1}{n-(n-2)l}(\frac{\varepsilon}{2\delta})^{(n-2)l-n} & \text{si } \ n-(n-2)l \neq 0 \\ \frac{1}{n} + \ln(\frac{2\delta}{\varepsilon}) & \text{si } \ n-(n-2)l = 0. \end{cases}$$

Luego, reemplazando en (34) obtenemos que

$$\int_{B_{2\delta}(0)} \psi_\varepsilon^l dx = \begin{cases} \tilde{d}\varepsilon^{n-\frac{(n-2)l}{2}} + \tilde{e}\varepsilon^{\frac{(n-2)l}{2}} & \text{si } \ n-(n-2)l \neq 0 \\ \tilde{d}\varepsilon^{\frac{n}{2}} + \tilde{f}\ln(\frac{2\delta}{\varepsilon})\varepsilon^{\frac{n}{2}} & \text{si } \ n-(n-2)l = 0. \end{cases}$$

donde $\tilde{d}$, $\tilde{e}$ y $\tilde{f}$ son constantes que dependen de δ y n.
Tomando $l = 2$, obtenemos la cota superior para $\mathbf{C}$. Esta es

$$\mathbf{C} = \int_{B_{2\delta}(0)} \psi_\varepsilon^2 dx \leq \begin{cases} \tilde{d}\varepsilon^2 + \tilde{e}\varepsilon^{\frac{(n-2)}{2}} & \text{si } \ n \neq 4 \\ \tilde{d}\varepsilon^2 + \tilde{f}\ln(\frac{2\delta}{\varepsilon})\varepsilon^2 & \text{si } \ n = 4. \end{cases}$$

□

3.2. Autovalores del Laplaciano conforme y la constante de Yamabe.

Sea (M,g) una variedad Riemanniana cerrada. Como mencionamos el Laplaciano conforme es un operador elíptico y autoadjunto en $L^2(M)$, por lo tanto es bien sabido que el espectro de este tipo de operadores es una sucesión no decreciente de autovalores que tiende a infinito (ver [17] y [12]). Escribimos el espectro de L_g como:

$$\lambda_1(g) \leq \lambda_2(g) \leq \lambda_3(g) \leq \cdots \leq \lambda_k(g) \leq \ldots \longrightarrow +\infty$$

donde cada autovalor aparece repetido según su multiplicidad, es decir la dimensión del subespacio asociado de autofunciones.

Notaremos con $Gr^k(H_1^2(M))$ al conjunto de subespacios $k-$dimensionales de $H_1^2(M)$. En esta subsección, a menos que se aclare, supondremos que las variedades son conexas.

Resulta muy útil la siguiente caracterización variacional de los autovalores del operador L_g:

Teorema 3.5. [Teorema de Rayleigh]

a) *Sea v_i una autofunción asociada a $\lambda_i(g)$ y $V_{k-1} = span(v_1, \ldots, v_{k-1})$ $(V_0 = \emptyset)$. Luego,*

$$\lambda_k(g) = \min_{\substack{v \in H_1^2(M) - \{0\}, \\ \int_M vz dv_g = 0 \ \forall z \in V_{k-1}}} \frac{\int_M a_n |\nabla v|_g^2 + s_g v^2 dv_g}{\|v\|_2^2}.$$

El mínimo es realizado por v si y solo si v es autofunción de autovalor $\lambda_k(g)$.

b)

$$\lambda_k(g) = \min_{V \in Gr^k(H_1^2(M))} \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\int_M a_n |\nabla v|_g^2 + s_g v^2 dv_g}{\|v\|_2^2}.$$

c) *El espacio $L^2(M)$ posee una base ortonormal $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, donde $v_i \in C^\infty(M)$ es autofunción de L_g con de autovalor asociado $\lambda_i(g)$.*

Observación 3.6. *Consideremos la métrica $h = u^{p_n-2} g \in [g]$. Aplicando la invarianza conforme de L_g al ítem b) del Teorema anterior se deduce que*

$$\lambda_k(h) = \min_{V \in Gr^k(H_1^2(M))} \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\int_M a_n |\nabla v|_g^2 + s_g v^2 dv_g}{\int_M u^{p_n-2} v^2 dv_g}.$$

Teorema 3.7. [Principio fuerte del máximo] *Sea (M,g) una variedad Riemanniana conexa y $u \in C^2(M)$ no negativa y sea $f : M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si*

$$\Delta_g u(x) \geq u(x) f(x, u(x)),$$

entonces $u > 0$ o $u \equiv 0$.

Se puede ver gracias al principio fuerte del máximo y usando argumentos estándar de regularidad que las autofunciones asociadas a $\lambda_1(g)$ no cambian de signo cuando M es conexa.

En efecto, sea $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión minimizante de $\lambda_1(g)$. Es decir,

$$\frac{\int_M a_n |\nabla w_k|_g^2 + s_g w_k^2 dv_g}{\|v\|_2^2} \longrightarrow_{k\to\infty} \lambda_1(g).$$

Podemos suponer que $w_k \geq 0$, sino tomamos $|w_k|$ en lugar de w_k. También podemos suponer que $\|w_k\|_2 = 1$. Como

$$\|w_k\|_{2,1} = \frac{1}{a_n}\frac{\int_M a_n|\nabla w_k|_g^2 + s_g w_k^2 dv_g}{\|w_k\|_2^2} + \int_M (1 - \frac{s_g}{a_n})w_k^2 dv_g$$
$$\leq \frac{1}{a_n}(\int_M a_n|\nabla w_k|_g^2 + s_g w_k^2 dv_g) + C\|w_k\|_2^2 \longrightarrow \frac{\lambda_1(g)}{a_n} + C$$

tenemos que la suceción w_k esta acotada en $H_1^2(M)$. Por lo tanto, dado que $H_1^2(M)$ es un espacio de Hilbert, existe $v_1 \in H_1^2(M)$ y una subsucesión, que también notaremos con w_k, tal que

$$w_k \rightharpoonup v_1 \;\text{ débilmente en }\; H_1^2(M). \tag{35}$$

Luego, tenemos que

$$\int_M a_n|\nabla v_1|_g^2 dv_g = \lim_{k\to\infty}\int_M a_n < \nabla v_1, \nabla w_k >_g dv_g \tag{36}$$
$$\leq \limsup_{k\to\infty} a_n\|\nabla v_1\|_2\|\nabla w_k\|_2.$$

Dado que la inclusión de $H_1^2(M)$ en $L^2(M)$ es un operador compacto, tenemos que

$$w_k \longrightarrow v_1 \;\text{ en } L^2(M) \tag{37}$$

y para una subsucesión

$$w_k \longrightarrow v_1 \;\text{ para casi todo punto.} \tag{38}$$

Por lo tanto, $v_1 \geq 0$, $\|v_1\|_2 = 1$ y

$$\int_M s_g w_k^2 dv_g \longrightarrow_{k\to\infty} \int_M s_g v_1^2 dv_g.$$

Esto, junto con la desigualdad (36), implica que

$$\lambda_1(g) \leq \frac{\int_M a_n|\nabla v_1|_g^2 + s_g v_1^2 dv_g}{\|v_1\|^2} \leq \lim_{k\to\infty}\frac{\int_M a_n|\nabla w_k|_g^2 + s_g w_k^2 dv_g}{\|w_k\|_2^2} = \lambda_1(g).$$

Luego, $v_1 \in H_1^2(M)$ minimiza y por lo tanto, es una solución débil de la ecuación

$$L_g(v_1) = \lambda_1(g)v_1. \tag{39}$$

Por argumentos estándar de regularidad (ver [17]) se puede ver que v_1 es una función $C^\infty(M)$. Por ser v_1 no negativa y no nula, aplicando el principio fuerte del máximo obtenemos que $v_1 > 0$.

Notar que v_2 debe cambiar de signo ya que debe satisfacer que

$$\int_M v_1 v_2 dv_g = 0$$

siendo M conexa. Con lo cual, $\lambda_1(g) < \lambda_2(g)$.

Proposición 3.8. *Sea (M, g) una variedad cerrada. Tenemos que:*

a) *El signo de $\lambda_1(g)$ coincide con el signo de $Y(M, [g])$:*

b) *Si* $Y(M,[g]) \geq 0$*, entonces*

$$Y(M,[g]) = \inf_{h\in[g]} \lambda_1(h) vol(M,h)^{\frac{2}{n}}.$$

Demostración. Sea v_1 una autofunción positiva asociada a $\lambda_1(g)$ y consideremos u una solución positiva de la ecuación

$$L_g(u) = hu^{p_n-1},$$

donde h es una función diferenciable. Es decir, la métrica $u^{p_n-2}g$ tiene curvatura escalar h. Utilizando que L_g es un operador autoadjunto, tenemos que

$$\lambda_1 \int_M uv_1 dv_g = \int_M uL_g(v_1) dv_g = \int_M L_g(u) v_1 dv_g = \int_M hu^{p_n-1} v_1 dv_g.$$

Con lo cual, si h es una función que no cambia de signo, necesariamente el signo de h debe coincidir con el de λ_1. Luego, por la Proposición 2.5 obtenemos el punto a).

Ahora probemos el punto b). Utilizando la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$\|v\|_2^2 = \int_M v^2 dv_g \leq \big(\int_M v^{p_n} dv_g\big)^{\frac{2}{p_n}} \big(\int_M 1 dv_g\big)^{1-\frac{2}{p_n}} = \|v\|_{p_n}^2 vol(M,g)^{\frac{2}{n}}.$$

Por lo tanto, como $Y(M,[g]) \geq 0$, para toda función $v \in H_1^2(M)$ no nula se satisface

$$\frac{\int_M a_n |\nabla v|_g^2 + s_g v^2 dv_g}{\|v\|_{p_n}^2} \leq \frac{\int_M a_n |\nabla v|_g^2 + s_g v^2 dv_g}{\|v\|_2^2} vol(M,g)^{\frac{2}{n}}.$$

Tomando ínfimo en ambos lados de la desigualdad anterior obtenemos que

$$Y(M,[g]) \leq \lambda_1(g) vol(M,g)^{\frac{2}{n}}.$$

Pero esta desigualdad es válida para todo $h \in [g]$, entonces

$$Y(M,[g]) \leq \inf_{h\in[g]} \lambda_1(h) vol(M,h)^{\frac{2}{n}}.$$

La otra desigualdad se satisface siempre, aun cuando $Y(M,[g])$ es negativa. Pues, de la Observación 3.6 vemos que

$$\begin{aligned}
\inf_{h\in[g]} \lambda_1(h) vol(M,h)^{\frac{2}{n}} &= \inf_{u\in C^\infty_{>0}(M)} \inf_{v\in H_1^2(M)-\{0\}} \frac{\int_M a_n |\nabla v|_g^2 + s_g v^2 dv_g}{\int_M u^{p_n-2} v^2 dv_g} \Big(\int_M u^{p_n} dv_g\Big)^{\frac{2}{n}} \\
&\leq \inf_{u\in C^\infty_{>0}(M)} \frac{\int_M a_n |\nabla u|_g^2 + s_g u^2 dv_g}{\int_M u^{p_n} dv_g} \Big(\int_M u^{p_n} dv_g\Big)^{\frac{2}{n}} \\
&\leq \inf_{u\in C^\infty_{>0}(M)} \frac{\int_M a_n |\nabla u|_g^2 + s_g u^2 dv_g}{\|u\|_{p_n}^2} = Y(M,[g]).
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.9. *Si* $Y(M,[g]) < 0$*, entonces* $\lambda_1(g) < 0$ *y*

$$\inf_{h\in[g]} \lambda_1(h) vol(M,h)^{\frac{2}{n}} = -\infty.$$

Demostración. Sea $v_0 > 0$ tal que $Y_g(v_0) < 0$. Dado $p \in M$ y $\varepsilon > 0$ consideremos $\eta_{p,\varepsilon} \in C^\infty(M)$ tal que $0 \leq \eta_{p,\varepsilon} \leq 1$, $\eta_{p,\varepsilon} = 1$ en $B_\varepsilon(p)$ y $\eta_{p,\varepsilon} = 0$ en $M - B_{2\varepsilon}(p)$. Luego, para ε suficientemente chico, tenemos que $w_0 = (1 - \eta_{p,\varepsilon})v_0$ satisface que

$$\int_M L_g(w_0)w_0 dv_g < 0.$$

Sea $u_\delta := z + \delta$ donde $z \in C^\infty_{\geq 0}(M)$ con soporte incluido en $B_\varepsilon(p)$ y $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\inf_{h\in[g]} \lambda_1(h) vol(M,h)^{\frac{2}{n}} &\leq \inf_\delta \frac{\int_M a_n |\nabla w_0|_g^2 + s_g w_0^2 dv_g}{\int_M u_\delta^{p_n-2} w_0^2 dv_g} (\int_M u_\delta^{p_n} dv_g)^{\frac{2}{n}} \\ &\leq \frac{\int_M L_g(w_0)w_0 dv_g}{\int_M \delta^{p_n-2} w_0^2 dv_g} (\int_M z^{p_n} dv_g)^{\frac{2}{n}} \longrightarrow_{\delta\to 0} -\infty.\end{aligned}$$

□

Observación 3.10. *Notar que si $Y(M,[g]) \geq 0$, la constante de Yamabe es el más chico de los primeros autovalores de las métricas de $[g]$ con volumen unitario, es decir*

$$Y(M,[g]) = \min_{h\in[g] \; vol(M,h)=1} \lambda_1(h).$$

Pues, si g_0 es una métrica de volumen unitario que realiza la constante de Yamabe, su curvatura escalar es $s_{g_0} = Y(M,[g])$ y por lo tanto, $\lambda_1(g_0) = Y(M,[g])$ con autofunción asociada $v \equiv 1$.

De la Proposición 3.8 tenemos que si g y h pertenecen a la misma clase conforme, entonces el signo de $\lambda_1(g)$ coincide con el signo de $\lambda_1(h)$. En realidad vale algo más general:

Proposición 3.11. *El signo del i-ésimo autovalor del Laplaciano conforme es independiente del representante de la clase conforme que elijamos.*

Demostración. Sea $u \in C^\infty_{>0}(M)$ tal que $h = u^{p_n-2}g$. Supongamos que $\lambda_k(g) > 0$ y $\lambda_k(h) \leq 0$. Sea $V_0 \in Gr^k(H_1^2(M))$ que realiza $\lambda_k(h)$. Luego usando la propiedad de invarianza del Laplaciano conforme tenemos que

$$\sup_{v\in V_0-\{0\}} \frac{\int_M a_n|\nabla v|_g^2 + s_g v^2 dv_g}{\int_M u^{p_n-2} v^2 dv_g} = \lambda_k(h) \leq 0,$$

lo cual implica que $\int_M vL_g(v)dv_g \leq 0$ para cualquier $v \in V_0 - \{0\}$. Por lo tanto, obtenemos que

$$0 < \lambda_k(g) \leq \sup_{v\in V_0-\{0\}} \frac{\int_M |\nabla v|_g^2 + s_g v^2 dv_g}{\int_M v^2 dv_g} \leq 0,$$

que es una contradicción. Entonces, $\lambda_k(h) > 0$.

La proposición quedará demostrada si verificamos que cuando $\lambda_k(g) = 0$, entonces necesariamente $\lambda_k(h) = 0$ para $h \in [g]$. En esta situación es fácil ver que $\lambda_k(h)$ no puede ser negativo. Por otro lado, si $\lambda_k(h) > 0$, estamos en la situación anterior. Es decir, que $\lambda_k(g)$ debe ser positivo, lo cual nuevamente es una contradicción. Entonces, $\lambda_k(h) = 0$. □

Corolario 3.12. *La cantidad de autovalores negativos y la dimensión del núcleo del Laplaciano conforme son invariantes de la clase conforme.*

Teorema 3.13. *Sea M una variedad cerrada de $dim(M) \geq 3$ que admite una métrica con curvatura escalar no negativa. Luego, existe $g \in \mathcal{M}_M$ con curvatura escalar constante igual a cero.*

Demostración. Sea $h \in \mathcal{M}_M$ con $s_h \geq 0$, entonces $Y(M,[h]) \geq 0$. Si $Y(M,[h]) = 0$, por la resolución del problema de Yamabe sabemos que existe $g \in [h]$ con $s_h \equiv 0$. Supongamos que $Y(M,[h]) > 0$. Por la Proposición 3.8, $\lambda_1(h) > 0$. Por otro lado, sabemos que no existe restricción para la existencia de métricas con curvatura escalar negativa. Sea $\tilde{h} \in \mathcal{M}_M$ tal que $Y(M,[h]) < 0$, luego $\lambda_1(\tilde{h}) < 0$. Para $t \in [0,1]$ definamos

$$h_t := th + (1-t)\tilde{h} \in \mathcal{M}_M$$

y

$$f(t) := \lambda_1(h_t)$$

que resulta una función continua en $[0,1]$. Luego, como $f(0) = \lambda_1(h_0) < 0$ y $f(1) = \lambda_1(h_1) > 0$, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $\lambda_1(h_{t_0}) = 0$, lo que implica que $Y(M,[h_{t_0}]) = 0$. $\square$

4. Caso subcrítico de la Ecuación de Yamabe

En esta sección estudiaremos la ecuación de Yamabe cuando el exponente es menor que $p_n - 1$. Es decir, la ecuación

$$a_n \Delta_g u + s_g u = \lambda u^{s-1}$$

con $s < p_n$.

Sea $f \in C^\infty(M)$, consideremos el siguiente el funcional

$$J_f^s(u) := \frac{\int_M a_n |\nabla u|_g^2 + f u^2 dv_g}{\|u\|_s^2}. \tag{40}$$

Definimos la constante

$$\gamma_s(M,g,f) := \inf_{H_1^2(M)-\{0\}} J_f^s(u).$$

Cuando $f = s_g$, diremos que $J_{s_g}^s$ y $\gamma_s(M,g,s_g)$ es la funcional y constante subcrítica de Yamabe, respectivamente. En este caso los notaremos omitiendo s_g. Notar que $J^{p_n} = Y$ y $\gamma_{p_n}(M,g) = Y(M,[g])$.

Observación 4.1. *Notar, que $J_f^s(cu) = J_f^s(u)$ para $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Sin embargo, $\gamma_s(M,g,f)$ no es un invariante conforme para $s < p_n$ y $f \neq s_g$.*

Observación 4.2. *Si $s = 2$, $\gamma_2(M,g,0)/a_n$ y $\gamma_2(M,g,s_g)$ son el primer autovalor del Laplaciano y del Laplaciano conforme de (M,g) respectivamente. Mientras que en el otro extremo, $\gamma_{p_n}(M,g,s_g) = Y(M,[g])$.*

En esta sección supondremos que todas las variedades son conexas.

La prueba del siguiente resultado de regularidad puede verse en [21] y [33]. Si bien los argumentos para probar el caso crítico y el subcrítico son distintos, por motivos de brevedad los enunciamos en un mismo teorema.

Teorema 4.3. [Regularidad de soluciones] *Sea (M,g) una variedad cerrada y $u_s \in H_1^2(M)$ una solución débil no negativa de*

$$a_n \Delta_g u_s + f u_s = \lambda u_s^{s-1},$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(M)$ y $2 < s \leq p_n$. Luego, u es una función suave, o sea es una solución estándar, y $u \equiv 0$ o $u > 0$. Más aun, si $u_s \in L^r(M)$ con $r = s$ si $s < p_n$ o

$r > p_n$ para $s = p_n$, entonces $\|u_s\|_{C^{2,\alpha}} \leq C$, donde la constante C depende de (M, g) y $\|u_s\|_r$.

A continuación probaremos que la constante $\gamma_s(M, g, f)$ siempre se realiza por una función no negativa y no identicamnete nula. Y esto nos da, gracias al teorema anterior, soluciones positivas de la ecuación subcrítica de Yamabe cuando $f = s_g$.

Teorema 4.4. [Existencia de soluciones de la ecuación subcrítica] *Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada, $f \in C^\infty(M)$ y $2 < s < p_n$. Luego, existe una función suave positiva u_s con $\|u_s\|_s = 1$ que resulta solución de*

$$a_n \Delta_g u + fu = \gamma_s(M, g, f) u^{s-1}. \tag{41}$$

Demostración. En argumento es similar al usado en la sección anterior para probar que la autofunción asociada al primer autovector de L_g no cambia de signo (caso $f = s_g$ y $s = 2$). Lo exponemos aquí nuevamente.

Sea v_k una sucesión minimizante de J_f^s, que podemos tomar de tal forma que $v_k \geq 0$ y, gracias a la Observación 4.1, satisfaciendo además que $\|v_k\|_s = 1$. Tenemos que la sucesión v_k está acotada en $H_1^2(M)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|v_k\|_{2,1} &= \frac{1}{a_n} \int_M a_n |\nabla v_k|_g^2 + f v_k^2 dv_g + \int_M (1 - \frac{f}{a_n}) v_k^2 dv_g \\ &\leq \frac{1}{a_n} J_f^s(v_k) + C \|v_k\|_s^2 vol(M, g)^{\frac{s-2}{s}} \leq \tilde{C}. \end{aligned}$$

Luego, podemos tomar una subsucesión v_k que converge débilmente en $H_1^2(M)$ a u_s. Como la inclusión $i : H_1^2(M) \longrightarrow L^s(M)$, por el Teorema 2.11 (Relich-Kondrakov), es un operador compacto, v_k tiende fuertemente en $L^s(M)$ a u_s. En particular, $u_s \neq 0$ y $\|u_s\|_s = 1$. También la convergencia fuerte se da en $L^2(M)$, pues $L^s(M) \subset L^2(M)$. La convergencia fuerte en L^s implica que una subsucesión v_k converge puntualmente a u_s para casi todo punto. Entonces, $u_s \geq 0$. Por la convergencia débil se tiene que

$$\begin{aligned} \int_M a_n |\nabla u_s|_g^2 dv_g &= \lim_{k \to \infty} \int_M a_n < \nabla u_s, \nabla v_k >_g dv_g \\ &\leq \limsup_{k \to \infty} a_n \|\nabla u_s\|_2 \|\nabla v_k\|_2. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\int_M a_n |\nabla u_s|_g^2 dv_g \leq \limsup_{k \to \infty} a_n \|\nabla v_k\|_2^2. \tag{42}$$

Dado que la convergencia fuerte en $L^2(M)$ implica que

$$\int_M f v_k^2 dv_g \longrightarrow_{k \to \infty} \int_M f u_s^2 dv_g,$$

se obtiene de (42) que

$$\gamma_s(M, g, f) = J_f^s(u_s),$$

ya que

$$\begin{aligned} \gamma_s(M, g, f) &\leq \int_M a_n |\nabla u_s|_g^2 + f u_s^2 dv_g \\ &\leq \lim_{k \to \infty} \int_M a_n |\nabla v_k|_g^2 + f v_k^2 dv_g = \gamma_s(M, g, f). \end{aligned}$$

O sea, $u_s \geq 0$ es una solución débil no nula de la ecuación subcrítica de Yamabe, entonces por el Teorema 4.3, u_s es una solución positiva estándar de (41).

□

Proposición 4.5. *Sea (M, g) una variedad cerrada. Las constantes subcríticas de Yambe satisfacen lo siguiente:*

a) *El signo de $\gamma_s(M, g)$ es el mismo para todo s.*
b) $\limsup_{s\to p_n} \gamma_s(M, g) \leq Y(M, [g])$.
c) *Si $vol(M, g) = 1$, $|\gamma_s(M, g)|$ es una función no creciente. Además si $Y(M, [g]) \geq 0$, entonces $\lim_{s\to p_n} Y(s) = Y(M, [g])$.*

Demostración. Notar que para $u \in H_1^2(M) - \{0\}$ cumple que

$$J^{s_2}(u) = J^{s_1}(u)\frac{\|u\|_{s_1}^2}{\|u\|_{s_2}^2} \tag{43}$$

Si $\gamma_{s_1}(M, g) < 0$, sea u_{s_1} tal que $J^{s_1}(u_{s_1}) < 0$. Luego tenemos que

$$\gamma_{s_2}(M, g) \leq J^{s_2}(u_{s_1}) < 0.$$

Si $\gamma_{s_1}(M, g) = 0$, entonces $J^{s_2}(u_{s_1}) = 0$ y $\gamma_{s_2}(M, g) = 0$, pues por lo anterior no puede ser negativo. El caso positivo se deduce de los anteriores.

Por otro lado, si u_i es una sucesión minimizante de $Y(M, [g])$ tenemos que

$$\gamma_s(M, g) \leq J^s(u_i).$$

Pero

$$J^s(u_i) \longrightarrow_{s\to p_n} J^{p_n}(u_i) = Y(u_i),$$

por lo tanto, $\limsup_{s\to p_n} \gamma_s(M, g) \leq Y(M, [g])$.

Sea $u \in H_1^2(M) - \{0\}$. Luego, por la desigualdad de Hölder, tenemos para $s_1 \leq s_2$ que

$$\|u\|_{s_1}^2 \leq \|u\|_{s_2}^2 vol(M, g)^{\frac{2}{s_1}(1-\frac{s_1}{s_2})}.$$

Con lo cual, si $vol(M, g) = 1$ de (43) se llega a que

$$|J^{s_2}(u)| \leq |J^{s_1}(u)|$$

y la primera parte de c) queda probada.

Dado $\varepsilon > 0$ sea u_ε tal que $Y(u_\varepsilon) = J^{p_n}(u_\varepsilon) \leq Y(M, [g]) + \frac{\varepsilon}{2}$. De (43), tomando $s_2 = p$ vemos que existe $s_0(\varepsilon) < p_n$, tal que si $s_0 < s < p_n$ se tiene que $J^s(u_\varepsilon) \leq Y(M, [g]) + \varepsilon$. Entonces, como $\gamma_s(M, g)$ es positiva para todo s, $\gamma_s(M, g)$ es una función no creciente y, por lo tanto,

$$Y(M, [g]) \leq \gamma_s(M, g) \leq J^s(u_\varepsilon) \leq Y(M, [g]) + \varepsilon,$$

lo cual termina de probar el ítem c).

□

4.1. Problema de Yamabe subcrítico.

En esta sección veremos el significado geométrico de las soluciones de la ecuación de Yamabe con exponente subcrítico.

Sea (M^m, g) una variedad cerrada de $\dim(M) = m$ de curvatura escalar constante y (N, h) una variedad cerrada de $\dim(N) = n$, de modo que $m + n \geq 3$. Consideremos el producto Riemanniano $(M\times N, g+h)$. ¿Existe $\tilde{h} \in [g+h]$ de la forma $\tilde{h} = u^{p_{m+n}-2}(g+h)$ con $u \in C^\infty_{>0}(N)$ de curvatura escalar constante?

Tal métrica h existe si y solo si u satisface la ecuación

$$a_{m+n}\Delta_{g+h}u + s_{g+h}u = \lambda u^{p_{m+n-1}},$$

para alguna constante λ.

Pero como u solo depende de N, esta ecuación se transforma en

$$a_n \Delta_h u + \frac{a_n s_{g+h}}{a_{m+n}} u = \frac{a_n \lambda}{a_{m+n}} u^{p_{m+n-1}}.$$

El Teorema 4.4 de existencia de soluciones subcríticas nos dice que, tomando $f = a_n a_{m+n}^{-1} s_{g+h}$, la ecuación anterior admite una solución u suave y positiva (con $\|u\|_{p_{m+n}} = 1$ y $\lambda = a_{m+n} a_n^{-1} \gamma_{p_{m+n}}(N, h, f)$).

En realidad, de la demostración del Teorema 4.4 vemos que u minimiza el funcional $J_{p_{m+n}}^{a_n a_{m+n}^{-1} s_{g+h}}$. Como para toda $v \in H_1^2(N) - \{0\}$ se tiene que

$$Y_{g+h}(v) = vol(M, g)^{\frac{2}{m+n}} \frac{a_{m+n}}{a_n} J_{p_{m+n}}^{a_n a_{m+n}^{-1} s_{g+h}}(v)$$

la función u minimiza el funcional de Yamabe de $(M \times N, g + h)$ restringido a las funciones de $H_1^2(M \times N)$ que solo dependen de N.

Definimos la $N-$constante de Yamabe de $(M \times N, g + h)$ como

$$Y_N(M \times N, g + h) := \inf_{u \in H_1^2(N) - \{0\}} Y_{g+h}(u).$$

Tenemos que

Teorema 4.6. *Sea (M, g) es una variedad cerrada con curvatura escalar constante. Luego, $Y_N(M \times N, g+h)$ es realizado por una función positiva $u \in H_1^2(N)$ y la métrica $h = u^{p_{m+n}-2}(g + h) \in [g + h]$ es una métrica de curvatura escalar constante.*

Observación 4.7. *Al igual que la constante γ_s, la $N-$constante de Yamabe no es un invariante conforme, aunque si es invariante por reescalamientos.*

Por definición resulta que

$$Y(M \times N, [g + h]) \leq Y_N(M \times N, g + h).$$

Si $Y(M \times N, [g + h]) \leq 0$, entonces $Y(M \times N, [g + h]) = Y_N(M \times N, g + h)$. En efecto, por la Proposición 3.1, si h_1 y h_2 son métricas de curvatura escalar constante en $[g+h]$, entonces $h_1 = ch_2$ $(c > 0)$. Con lo cual, si una métrica realiza $Y_N(M \times N, g+h)$ también realiza $Y(M \times N, [g + h])$.

Resulta importante considerar la $N-$constante de Yamabe ya que en algunos casos no triviales (curvatura escalar positiva) el minimizante del funcional de Yamabe depende solo de una variable. Por ejemplo, O. Kobayashi [27] y R. Schoen [44] probaron que las soluciones de la ecuación de Yamabe en $(S^n \times S^1, g_0^n + tg_0^1)$ dependen solamente de S^1. Se ha conjeturado que para pequeños valores de t $(t < 1)$ las funciones minimizantes del funcional de Yamabe de $(S^n \times \mathbb{H}^m, g_0^n + tg_h^m)$ dependen solo de la variable en $\mathbb{H}^m$. Los productos de esferas con el espacio Hiperbólico resultan de gran interés porque sus constantes de Yamabe aparecen en la fórmula de cirugía del Invariante de Yamabe (ver Sección 6) probada por B. Ammann, M. Dahl y E. Humbert en [2].

De todas formas, en general, se tiene que $Y_N(M \times N, g + h)$ es estrictamente mayor que $Y(M \times N, [g + h])$.

En [1], K. Akutagawa, L. Florit y J. Petean probaron el siguiente resultado que resulta muy importante a la hora de realizar estimaciones del invariante de Yamabe.

Teorema 4.8. *Sea (M^m, g) una variedad Riemanniana cerrada de curvatura positiva y dimensión $m \geq 2$, y sea (N^n, h) una variedad Riemanniana cerrada cualquiera. Se tiene que*

a)
$$\lim_{t\to\infty} Y(M \times N, [g+th]) = Y(M \times \mathbb{R}^n, [g+g_e^n])$$
y
$$\lim_{t\to\infty} Y_N(M \times N, g+th) = Y_{\mathbb{R}^n}(M \times \mathbb{R}^n, g+g_e^n).$$

b) *Si además $vol(M,g) = 1$ y s_g es constante,*
$$Y_{\mathbb{R}^n}(M \times \mathbb{R}^n, g+g_e^n) = \frac{a_{m+n}^{\frac{n}{m+n}}(m+n)n^{-\frac{n}{m+n}}m^{\frac{-m}{m+n}}}{\alpha_{m,n}} s_g^{\frac{m}{m+n}} = C(m,n)s_g^{\frac{m}{m+n}}$$
donde $\alpha_{m,n} > 0$ es la constante de Gagliardo-Nirenberg (ver Apéndice 7.4).

Corolario 4.9. *Sea (M^m, g) de curvatura escalar constante y de volumen 1, tal que*
$$s_g > \left[\frac{Y(S^{m+n}, [g_0^{m+n}])}{C(m,n)}\right]^{\frac{m+n}{m}}. \tag{44}$$
Luego, dado (N^n, h) una variedad cerrada y t suficientemente grande, se cumple que
$$Y(M \times N, [g+th]) < Y_N(M \times N, g+th).$$

Demostración. Por la desigualdad (44) y el ítem b) del teorema anterior tenemos que
$$Y_{\mathbb{R}^n}(M \times \mathbb{R}^n, g+g_e^n) > Y(S^{m+n}, [g_0^{m+n}]) \geq Y(M \times \mathbb{R}^n, [g+g_e^n]).$$
Luego, por el teorema anterior llegamos a que
$$\begin{array}{ccc} Y(M \times N, [g+th]) & & Y_N(M \times N, g+th) \\ \downarrow_{t\to\infty} & & \downarrow_{t\to\infty} \\ Y(M \times \mathbb{R}^n, [g+g_e^n]) & < & Y_{\mathbb{R}^n}(M \times \mathbb{R}^n, g+g_e^n) \end{array}$$
y el corolario queda probado. □

Para terminar la sección veamos un caso particular de producto Riemanniano. Más precisamente vamos a considerar $(M^m \times S^n, g+g_0^n)$ con (M^m, g) de curvatura escalar constante s_g.

Sea $v : S^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función positiva. Definimos la simetrización esférica $s(v)$ de v como la única función radial desde el polo norte, decreciente que satisface que
$$vol(\{x \in S^n : s(v)(x) > t\}, g_0^n) = vol(\{x \in S^n : v(x) > t\}, g_0^n).$$
Se puede ver (consultar [49]) que:

- $\|v\|_q = \|s(v)\|_q$ para todo $q \geq 1$.
- $\int_M |\nabla s(v)|_{g_0^n}^q dv_{g_0^n} \leq \int_M |\nabla v|_{g_0^n}^q dv_{g_0^n}$ para todo $q \geq 1$.

Luego, para $v : S^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ positiva obtenemos que
$$Y_{g+g_0^n}(s(v)) \leq Y_{g+g_0^n}(v).$$
Por lo tanto, $Y_{S^n}(M^m \times S^n, g+g_0^n)$ se alcanza en una función radial decreciente. Esta podría ser la función $u \equiv 1$, como sucede cuando $s_g \leq -n(n-1)$. Con lo cual, el caso interesante es cuando $s_g + n(n-1) > 0$. Supongamos, de ahora en adelante que estamos en esa situación.

Sea $u = u(r) \in C^{\infty}_{>0}(S^n)$ una función radial ($r = d(P_N, \cdot)$), punto crítico del funcional de Yamabe restringido a $H_1^2(S^n)$. Por lo dicho anteriormente, sabemos que al menos tenemos un minimizante del funcional tiene la propiedad de ser radial. Como $u^{p_{m+n}-2}(g + g_0^n)$ es de curvatura escalar constante, entonces es solución para algún $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ de

$$a_{m+n}\Delta_{g_0^n} u + (s_g + n(n-1))u = \lambda u^{p_{m+n-1}}. \tag{45}$$

Si $f = f(r)$ es una función radial su Laplaciano es

$$\Delta_{g_0^n}(f) = -f''(r) - (n-1)\frac{\cos(r)}{\sin(r)}f'.$$

Con lo cual, tenemos de (45) que u es solución de

$$\begin{cases} u'' + (n-1)\frac{\cos(r)}{\sin(r)}u' - \frac{(s_g+n(n-1))}{a_{m+n}}u = -\frac{\lambda}{a_{m+n}}u^{p_{m+n-1}} \\ u'(0) = 0 \ \text{ y } \ u'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Luego, si tomamos αu en vez de u con $\alpha = \lambda/(s_g + n(n-1))^{\frac{m+n-2}{4}}$, la función satisface la siguiente ecuación ordinaria no lineal

$$\begin{cases} u'' + (n-1)\frac{\cos(r)}{\sin(r)}u' + \frac{(s_g+n(n-1))}{a_{m+n}}\Big(u^{p_{m+n}-2} - 1\Big)u = 0 \\ u'(0) = 0 \ \text{ y } \ u'(\pi) = 0. \end{cases} \tag{46}$$

Y recíprocamente, si $u \in \mathbb{C}^{\infty}_{>0}(S^n)$ satisface (46), luego $u^{p_{m+n}-2}(g+g_0^n)$ es una métrica en $[g + g_0^n]$ de curvatura escalar constante. Ya sabíamos que la función constante $u \equiv 1$ es siempre solución de (46) y esta corresponde a la métrica $g + g_0^n$. ¿Cuando hay otra solución positiva? El siguiente resultado de J. Petean [38] da una respuesta:

Teorema 4.10. *Sea (M^m, g) una variedad cerrada de cuvatura escalar constante s_g tal que*

$$s_g + n(n-1) > \frac{n a_{m+n}}{p_{m+n} - 2}.$$

Entonces, $g + g_0^n$ no realiza la S^n-constante de Yamabe de $(M \times S^n, g + g_0^n)$. Es decir,

$$Y_{S^n}(M \times S^n, g + g_0^n) < Y(g + g_0^n).$$

Por lo tanto, tenemos una solución positiva no creciente de la ecuación (46) diferente de 1.

El espectro del Laplaciano de (S^n, g_0^n) es

$$\lambda_k(\Delta_{g_0^n}) = (k-1)(k+n-2)$$

con $k \geq 1$ (ver [12]). Su primer autovalor, como en toda variedad cerrada es $\lambda_1(\Delta_{g_0^n}) = 0$ y las funciones constantes es su espacio de autofunciones asociado. El segundo autovalor es $\lambda_2(\Delta_{g_0^n}) = n$ y $f(q) = \cos(d(p_N, q))$ es una de sus autofunciones asociadas, y por lo tanto es ortogonal a la función constante 1. Es decir,

$$\Delta_{g_0^n} f = nf, \tag{47}$$

y

$$\int_{S^n} f dv_{g_0^n} = 0. \tag{48}$$

Demostración del Teorema 4.10. Consideremos $Y_{g+g_0^n}(1+tf)$. Luego, como $(1+tf)$ depende solo de S^n

$$Y_{g+g_0^n}(1+tf) =$$

$$vol(M,g)^{\frac{2}{m+n}} \frac{\int_{S^n} a_{m+n}(1+tf)\Delta_{g_0^n}(1+tf) + [s_g + n(n-1)](1+tf)^2 dv_{g_0^n}}{\left(\int_{S^n}(1+tf)^{p_{m+n}} dv_{g_0^n}\right)^{\frac{2}{p_{m+n}}}}.$$

De (12) y (48) obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} Y_{g+g_0^n}(1+tf)|_{t=0} = 0.$$

Si derivamos nuevamente se tiene que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Y_{g+g_0^n}(1+tf)|_{t=0} =$$

$$\frac{vol(M,g)^{\frac{2}{m+n}}}{vol(S^n,g_0)^{\frac{3}{p_{m+n}}}} \Big[A''(0) vol(S^n, g_0^n)^{\frac{1}{p_{m+n}}} - 2A(0)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\|1+tf\|_{p_{m+n}})|_{t=0}\Big],$$

donde $A(t) = \int_{S^n} a_{m+n}(1+tf)\Delta_{g_0^n}(1+tf) + (s_g + n(n-1))(1+tf)^2 dv_{g_0^n}$ y las normas $\| \ \|_{p_{m+n}}$ se toman con respecto a g_0^n. Por lo tanto,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Y_{g+g_0^n}(1+tf)|_{t=0} = K[na_{m+n} + (2-p_{m+n})(s_g + n(n-1))] \int_{S^n} f^2 dv_{g_0^n}.$$

donde $K = \frac{2Vol(M,g)^{\frac{2}{m+n}}}{vol(S^n,g_0)^{\frac{2}{p_{m+n}}}} > 0$. Pero por hipótesis $na_{m+n} + (2-p_{m+n})(s_g + n(n-1)) < 0$, con lo cual,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Y_{g+g_0^n}(1+tf)|_{t=0} < 0,$$

de lo que se deduce que $u \equiv 1$ no puede ser una función minimizante. □

Petean probó, estudiando el comportamiento de las soluciones de (46) entorno de la solución trivial, que la cantidad de soluciones positivas de (46) tiende a infinito cuando s_g tiende a infinito (ver [38], Teorema 1.1). O sea, la cantidad de métricas con curvatura escalar constante en $[g + g_0^n]$ de la forma $u^{p_{m+n}-2}(g + g_0^n)$ con $u \in C^\infty_{>0}(S^n)$ y radial, crece a medida que crece s_g.

Consideremos $(S^m \times S^n, tg_0^m + g_0^n)$, con $t > 0$. Dada $S \subset S^n$ una hipersuperficie isoparamétrica (ver [52]), J. Petean y el autor probaron (ver [22]) que las funciones $u \in C^\infty_{>0}(S^n)$ que son constantes sobre S y de tal forma que $u^{p_{m+n}-2}(tg_0^m + g_0^n)$ resulta de curvatura escalar constante existen y su cantidad se incrementa (tiende a infinito) a medida que t tiende a cero. Cada familia de hipersuperficies isoparamétricas induce una métrica de curvatura escalar constante. Lo cual, demuestra la dificultad del problema de tratar de entender todas las soluciones positivas de (46), ya que hasta el día de hoy no existe una clasificación total de las hipersuperficies isoparamétricas de la esfera.

5. Sobre la prueba del problema de Yamabe

Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada de $\dim(M) = n \geq 3$. En esta sección discutiremos acerca de la existencia de una función minimizante del funcional de Yamabe y, por lo tanto, de una métrica minimizante del funcional de Yamabe en la clase conforme $[g]$. Como la constante de Yamabe es un invariante conforme, podemos suponer sin perdidad de generalidad que $vol(M, g) = 1$. Si no reemplazamos g por la métrica $vol(M, g)^{-\frac{2}{n}} g \in [g]$. De la Subsección 4 sabemos que para todo $s < p_n$ tenemos una solución suave positiva u_s, con $\|u_s\|_s = 1$, de la ecuación subcrítica de Yamabe

$$a_n \Delta_g u_s + s_g u_s = \gamma_s(M, g) u_s^{s-1}. \tag{49}$$

La familia de funciones minimizantes subcríticas $\{u_s\}$ está acotada en $H_1^2(M)$. Es decir, existe $s_0 < p_n$ y una constante $C > 0$, tal que si $s > s_0$, $\|u_s\|_{2,1} \leq C$. En efecto, tenemos que

$$\|u_s\|_{2,1} = \frac{J^s(u_s)}{a_n} + \int_M (1 - \frac{s_g}{a_n}) u_s^2 dv_g \leq \frac{\gamma_s(M, g)}{a_n} + \tilde{C}\|u_s\|_2^2.$$

Usando la desigualdad de Hölder $(s > s_0)$ vemos que

$$\|u_s\|_{2,1} \leq \frac{\gamma_s(M, g)}{a_n} + \tilde{C}\|u_s\|_s^2 \leq \frac{\gamma_s(M, g)}{a_n} + \bar{C}.$$

Por la Proposición 4.5 tenemos que $\gamma_s(M, g) < 0$ para todo s, o bien sucede que $\lim_{s \to p_n} \gamma_s(M, g) = Y(M, [g])$. Con lo cual, si $s > s_0$ existe una constante C tal que

$$\|u_s\|_{2,1} \leq C. \tag{50}$$

Luego, podemos concluir que existe una subsucesión $\{u_{s_i}\}$ que converge débilmente en $H_1^2(M)$ a una función u cuando $s_i \longrightarrow p_n$. Como la inclusión de $H_1^2(M)$ en $L^2(M)$ es un operador compacto (ver Teorema 2.11), u_{s_i} converge fuertemente en $L^2(M)$ y, por lo tanto, también lo hace puntualmente (una subsucesión) para casi todo punto de M, lo que implica que $u \geq 0$.

Es sabido que si $\{f_k\}$ es una sucesión acotada en $L^q(M)$ $(1 < q < \infty)$ y $f_k \longrightarrow_k f$ puntualmente en casi todo punto, entonces $f \in L^q(M)$ y $\{f_k\}$ tiende débilmente a f (ver [7]). De esto podemos deducir que $u_{s_i}^{s_i - 1}$ converge débilmente en $L^{\frac{p_n}{p_n - 1}}(M)$ a $u^{p_n - 1}$. Pues, $u_{s_i}^{s_i - 1} \longrightarrow u^{p_n - 1}$ puntualmente para casi todo punto y $\{u_{s_i}\}$ están acotadas uniformenente en $L^{\frac{p_n}{p_n - 1}}(M)$. En efecto, usando la desigualdad de Hölder, que $H_1^2(M)$ está incluído continuamente en $L^{p_n}(M)$ y la cota (50) se ve que

$$\int_M (u_{s_i}^{s_i - 1})^{\frac{p_n}{p_n - 1}} dv_g = \int_M u_{s_i}^{\frac{s_i - 1}{p_n - 1} p_n} dv_g \leq \|u_{s_i}\|_{p_n}^{\frac{s_i - 1}{p_n - 1}} \leq \tilde{D}\|u_{s_i}\|_{2,1}^{\frac{s_i - 1}{p_n - 1}} \leq D,$$

donde D es una constante.

Por lo tanto, tenemos que para toda $\varphi \in C_0^\infty(M)$ se cumple que

$$\int_M u_{s_i}^{s_i - 1} \varphi dv_g \longrightarrow_{s_i \to p_n} \int_M u^{p_n - 1} \varphi dv_g. \tag{51}$$

Por otro lado, debido a la convergencia débil $u_{s_i} \rightharpoonup_{H_1^2(M)} u$ se satisface que

$$\int_M a_n < \nabla u_{s_i}, \nabla \varphi > dv_g \longrightarrow_{s_i \to p_n} \int_M < \nabla u, \nabla \varphi > dv_g \tag{52}$$

y

$$\int_M s_g u_{s_i}\varphi dv_g \longrightarrow_{s_i\to p_n} \int_M s_g u\varphi dv_g. \tag{53}$$

Dado que u_{s_i} es solución de (49) para todo s_i se tiene la siguiente igualdad

$$\int_M a_n < \nabla u_{s_i}, \nabla\varphi > dv_g + \int_M s_g u_{s_i}\varphi dv_g = \gamma_{s_i}(M,g)\int_M u_{s_i}^{s_i-1}\varphi dv_g.$$

Supongamos que $Y(M,[g]) \geq 0$. Cuando $s_i \longrightarrow p_n$, por (52), (53), (51) y la Proposición 4.5 se satisface que

$$\begin{aligned}\int_M a_n < \nabla u, \nabla\varphi > dv_g + \int_M s_g u\varphi dv_g &= \Big(\lim_{s_i\to p_n}\gamma_{s_i}(M,g)\Big)\int_M u^{p_n-1}\varphi dv_g\\ &= Y(M,[g])\int_M u^{p_n-1}\varphi dv_g\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(M)$. Con lo cual, resulta que u es una solución débil no negativa de la ecuación de Yamabe. Por el Teorema 4.3, tenemos que $u \in C^\infty(M)$, es decir es una solución estándar de

$$L_g(u) = Y(M,[g])u^{p_n-1}, \tag{54}$$

y $u > 0$ o bien es la solución nula. Por lo tanto, si podemos asegurar que u no es la solución nula

$$u^{p_n-2}g$$

resultará una métrica de curvatura escalar constante que minimiza el funcional de Yamabe. Pues, multiplicando (54) por u e integrando obtenemos que

$$Y(u) = Y(M,[g])\|u\|_{p_n}^{p_n-2}.$$

Entonces $\|u\|_{p_n} \geq 1$ ya que $Y(u) \geq Y(M,[g])$. Por otro lado, $\|u_{s_i}^{\frac{s_i}{p_n}}\|_{p_n} = 1$ y $u_{s_i}^{\frac{s_i}{p_n}}$ converge puntualmente a u para casi todo punto, por lo tanto $u_{s_i}^{\frac{s_i}{p_n}}$ tiende débilmente a u en $L^{p_n}(M)$. Luego, por propiedad de la convergencia débil se tiene que

$$\|u\|_{p_n} \leq \liminf_{s_i\to\infty}\|u_{s_i}^{\frac{s_i}{p_n}}\|_{p_n} = 1.$$

Con lo que vemos que $\|u\|_{p_n} = 1$ y $Y(u) = Y(M,[g])$.

El problema es que no podemos asegurar a priori que la solución u de la ecuación (54) que encontarmos no sea la función nula. De hecho, si nuestra variedad es (S^n, g_0^n) este fenómeno es el que puede estar ocurriendo.

T. Aubin probó en [6] que si la variedad satisface la desigualdad estricta

$$Y(M,[g]) < Y(S^n,[g_0^n]),$$

entonces estos fenómenos de concentración no se dan. Más precisamente probó el siguiente resultado:

Teorema 5.1. *Sea (M,g) una variedad Riemannian cerrada de dim$(M) = n \geq 3$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe una constante $A(\varepsilon)$ de modo que para todo $\varphi \in H_1^2(M)$ se cumple*

$$\|\varphi\|_{p_n}^2 \leq (1+\varepsilon)C(n)\int_M |\nabla\varphi|_g^2 dv_g + A(\varepsilon)\int_M \varphi^2 dv_g,$$

donde $C(n)$ es la constante de Sobolev de $\mathbb{R}^n$ (ver Subsección 2.2).

Consideremos nuevamente la sucesión de soluciones subcríticas minimizantes u_{s_i} que convergen a u. Dado $\varepsilon > 0$, por la desigualdad de Hölder y el teorema anterior se tiene que

$$1 = \|u_{s_i}\|_{s_i}^2 \leq \|u_{s_i}\|_{p_n}^2$$
$$\leq \frac{(1+\varepsilon)C(n)}{a_n} \int_M a_n |\nabla u_{s_i}|_g^2 + s_g u_{s_i}^2 dv_g + \int_M \Big(A(\varepsilon) - \frac{(1+\varepsilon)C(n)s_g}{a_n}\Big) u_{s_i}^2 dv_g.$$
$$\leq \frac{(1+\varepsilon)C(n)}{a_n} \gamma_{s_i}(M,g) + \tilde{A}(\varepsilon)\|u_{s_i}\|_2^2$$

Como $\limsup_{s_i \to p_n} \gamma_s(M,g) \leq Y(M,[g])$ (ver prueba de la Proposición 4.5), para ε suficientemente chico, existe $s_0 < p_n$ y $a_\varepsilon > 0$, tal que si $s_i > s_0$ se tiene que

$$0 < a_\varepsilon \leq \tilde{A}(\varepsilon)\|u_{s_i}\|_2^2.$$

Por lo tanto, $\|u_{s_i}\|_2^2 > \tilde{a}_\varepsilon > 0$. Como u_{s_i} converge fuertemente en $L^2(M)$, $\|u\|_2 \neq 0$ y, entonces, no se trata de la función nula.

Si $Y(M,[g]) < 0$, usando los mismos argumentos obtenemos una función suave $u \geq 0$ que satisface

$$L_g(u) = \lambda u^{p_n - 1},$$

donde $\lambda = \limsup_{s_i \to p_n} \gamma_{s_i}(M,g) \leq Y(M,[g])$. Usando el Teorema 5.1 se puede ver que $\|u_{s_i}\|_2 > 0$ si $s_i > s_0$, luego u resulta una función positiva. Usando los mismos argumentos que antes se puede ver que $\|u\|_{p_n} = 1$. Con lo cual,

$$Y(M,[g]) \leq Y(u) = \lambda \leq Y(M,[g])$$

y $u^{p_n-2}g \in [g]$ resulta una métrica minimizante del funcional de Yamabe.

Observación 5.2. *En realidad se puede ver que si $Y(M,[g]) < Y(S^n, g_0^n)$, entonces existe s_0 y $C > 0$ tal que $u_s < C$ si $s > s_0$. Se puede ver que $\{u_s\}$ está acotado en $C^{2,\alpha}(M)$. Usando el Teorema de Arzelà-Ascoli se prueba que hay una subsucesión que converge uniformemente en norma $C^2(M)$ a la función $u \in C^2(M)$. Luego, se puede ver que $u \in C^\infty(M)$ es solución de la ecuación de Yamabe y es positiva. Las demostraciones de estos hechos pueden verse en* [49]*,* [33] *y* [7].

La pregunta en este punto es:

¿Cuán común es tener la desigualdad estricta $Y(M,[g]) < Y(S^n,[g_0^n])$?

Los siguientes teoremas responden conjuntamente a este interrogante y resuelven el problema de Yamabe:

Teorema 5.3. [T. Aubin, [5]] *Sea (M^n, g) un variedad cerrada no localmente conforme plana y de dim$(M) \geq 6$, entonces $Y(M,[g]) < Y(S^n,[g_0^n])$.*

Teorema 5.4. [R. Schoen, [44]] *Sea (M^n, g) un variedad cerrada localmente conforme plana o de dim$(M) = 3$, 4 o 5 no conforme a la esfera, entonces $Y(M,[g]) < Y(S^n,[g_0^n])$.*

Luego, $Y(M,g) = Y(S^n,[g_0^n])$ si y solo si (M,g) es conforme a la esfera. En ese caso sabemos que la métrica g_0^n es de curvatura escalar constante y realiza la constante de Yamabe. Si $f : (M,g) \longrightarrow (S^n, g_0^n)$ es un difeomorfismo conforme, $f^*(g_0^n) \in [g]$ realiza $Y(M,[g])$.

La manera de probar ambos teoremas es mediante la construcción de funciones test apropiadas. Es decir, la idea es encontrar funciones $\phi \in C^\infty(M)$ tal que

$$Y(M,[g]) \leq Y(\phi) < Y(S^n,[g_0^n]).$$

En el caso del Teorema 5.3 las funciones test propuestas por Aubin explotan el hecho de que en la variedad existen puntos, que aunque deformemos conformemente la métrica, no tienen entornos Euclídeos.

Como la constante de Yamabe es un invariante de clase conforme, uno puede cambiar la métrica g por cualquier otra de la misma clase conforme. J. M. Lee y T. H. Parker probaron en [33] que dado $p \in M$ y $N \geq 2$, existe $h \in [g]$ tal que en coordenas normales

$$det(h) = 1 + O(r^N)$$

donde r es la distancia a p con respecto a h. Si $N \geq 5$, además se cumple que $s_h = O(r^2)$ y $\Delta_h s_g|_p = \frac{1}{6}|W_h(p)|^2$. Estas métricas, junto con un sistema de coordenas normales entorno de p se conocen con el nombre de coordenadas normales conformes.

Observación 5.5. *El resultado de Lee y Parker se puede mejorar. J. Cao en* [11] *y M. Günther en* [19] *probaron que dado g y $p \in M$, se puede elegir $h \in [g]$, tal que en un sistema de coordenadas normales* $\det(h) \equiv 1$.

Dada (M, g) con $\dim(M) = n \geq 6$ no localmente conforme plana, sabemos que existe $p \in M$ tal que $W_g(p) \neq 0$. Sea h una sistema de coordenadas normal conforme en p. Por propiedad del tensor de Weyl W_h tampoco se anula en p (ver Subsección 2.2). La familia de funciones test para probar el Teorema 5.3 son las mismas que las usadas para probar el Teorema 3.4. Las recordamos a continuación.

Dado ε y δ suficientemente chico sea

$$\phi_\varepsilon(q) := \eta(q)\Big(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + r^2(q)}\Big)^{\frac{n-2}{2}} \tag{55}$$

donde $r(q)$ es la distancia entre p y q con respecto a métrica h; $\eta \in C^\infty(M)$, $0 \leq \eta \leq 1$, $|\nabla\eta| \leq 2/\delta$, y

$$\eta(q) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad q \in B_\delta(p_0), \\ 0 & \text{si} \quad q \notin B_{2\delta}(p_0). \end{cases}$$

Se puede probar (ver [33], [49]) la siguiente estimación:

$$Y(\phi_\varepsilon) = \begin{cases} Y(S^6, [g_0^6]) - c|W_h(p)|^2\varepsilon^4|\ln\varepsilon| + O(\varepsilon^4) & \text{si} \quad n = 6 \\ Y(S^n, [g_0^n]) - c|W_h(p)|^2\varepsilon^4 + O(\varepsilon^{n-2}) & \text{si} \quad n > 6, \end{cases}$$

donde c es una constante positiva. Por lo tanto, para ε lo suficientemente chico tenemos que

$$Y(\phi_\varepsilon) < Y(S^n, [g_0^n]).$$

Notar que si (M, g) es localmente conforme plana de dimensión mayor o igual a 6, la estimación anterior no sirve ya que el tensor de Weyl se anula para cualquier métrica de la clase conforme.

Para los casos restantes, es decir, (M^n, g) no conforme a la esfera, no localmente conforme plana o de dimensión $n = 3, 4, 5$, R. Schoen utilizó la función de Green del Laplaciano conforme para construir una familia apropiadas de funciones test.

Cuando $Y(M, [g]) > 0$, se puede ver (consultar [33]), que dado $p \in M$, existe un única función $G_p \in C^\infty(M - \{p\})$, tal que en sentido de distribuciones

$$L_g G_p = \delta_p,$$

donde δ_p es la medida de Dirac en p. G_p recibe el nombre de función de Green de L_g con polo p.

Para $p \in M$, si $n = 3, 4, 5$ o localmente conforme plana (ver [43], [33], [49]), en un sistema de coordenadas normales conformes, la función de Green es

$$G_p(x) = \frac{1}{r^{n-2}} + A + \alpha(x)$$

donde A es una constante y $\alpha = O(r^2)$.

Dado $p \in M$ y un sistema de coordenadas normales conformes las funciones test propuestas por Schoen son:

$$\zeta_\varepsilon := \begin{cases} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + r^2(q)}\right)^{\frac{n-2}{2}} & \text{si } \ r \le \delta \\ \varepsilon_0 \Big(G(q) - \eta(q)\alpha(q) \Big) & \text{si } \ \delta \le r \le 2\delta \\ \varepsilon_0 G(q) & \text{si } r > 2\delta, \end{cases}$$

donde $\varepsilon_0 > 0$ es pequeño y satisface

$$\varepsilon_0 = \Big[\frac{\varepsilon}{(\delta^{2-n} + A)^{\frac{2}{n-2}} (\varepsilon^2 + \delta^2)} \Big]^{\frac{n-2}{2}}.$$

Como consecuencia del Teorema de Masa Positiva, probado para dimensiones bajas (precisamente $\dim(M) \le 7$) por R. Schoen y S.T. Yau [45], [44] (ver también [33] y [7]), o para M localmente conforme plana [48] (E. Witten probó este teorema para variedades spin [53]), se tiene que para ε suficientemente chicos la desigualdad estricta

$$Y(\zeta_\varepsilon) < Y(S^n, [g_0^n])$$

es los casos que faltaba.

6. Invariante de Yamabe

En esta sección introduciremos y discutiremos algunas propiedades del invariante de Yamabe. Este es un invariante de la estructura diferencial de un variedad cerrada y fue introducido por O. Kobayashi [27] y R. Schoen [44]. Se define de la siguiente manera:

$$Y(M) := \sup_{[g] \in \mathcal{C}_M} Y(M, [g]).$$

El invariante de Yamabe fue introducido como una estrategia para encontrar "buenas métricas" en la variedad. Como en cada clase conforme tenemos una métrica de curvatura escalar constante, ¿Cuál de todas ellas será la "mejor"? Por ejemplo, consideremos el caso de S^n. Dado $g \in \mathcal{M}_{S^n}$, por el Teorema 3.4, tenemos que

$$Y(M, [g]) \le Y(M, [g_0^n])$$

y la métrica estandar g_0^n realiza constante de Yamabe $Y(M, [g_0^n])$. Es decir, g_0^n es la métrica de Yamabe (métrica minizante del funcional de Yamabe en su clase conforme) de constante más grande. Por lo tanto, la clase conforme $[g_0^n]$, y en particular g_0^n, realiza el invariante de Yamabe en S^n. Por otra parte, g_0^n es una métrica de Einstein y resulta un punto crítico del funcional de Einstein-Hilbert en $\mathcal{M}_{S^n}$. ¿Podemos usar el invariante de Yamabe para encontrar métricas Riemannianas distinguidas en una variedad Riemanniana general? La respuesta es que en general esta estrategia no se va a poder utilizar, ya que a veces el invariante de Yamabe no se alcanza. Por ejemplo, R. Schoen probó en [44] que $Y(S^n \times S^1)$ no se realiza. Sin embargo, en algunos casos si funciona. Por citar algunos ejemplos conocidos en la literatura, C. Lebrun probó en [29] que el invariante de Yamabe de $\mathbb{C}P^2$ es $12\sqrt{2}\pi$ y lo realiza la métrica de Fubini-Study; Anderson en [4] probó que el invariante de Yamabe de un cociente compacto del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^3$ es negativo. Precisamente es $Y(\mathbb{H}^3/\Gamma) = -6vol(\mathbb{H}^3, g_h^3)^{\frac{2}{3}}$ y se alcanza en la clase conforme de la métrica inducida por g_h^3.

Notar que como para toda clase $[g] \in \mathcal{C}_M$ se tiene que $Y(M,[g]) \leq Y(S^n,[g_0^n])$, luego el invariante de Yamabe está acotado superiormente,

$$Y(M) \leq Y(S^n) = Y(S^n,[g_0^n]).$$

El invariante de Yamabe mide la capacidad de la variedad M de admitir una métrica de curvatura escalar positiva. Es decir,

Proposición 6.1. *Sea M una variedad cerrada. $Y(M) > 0$ si y solo si existe $g \in \mathcal{M}_M$ tal que $s_g > 0$.*

Demostración. Sea g tal que $s_g > 0$, luego $Y(M,[g]) > 0$, y por lo tanto, $Y(M) > 0$. Si $Y(M) > 0$, existe $[g] \in \mathcal{C}_M$, tal que $Y(M,[g]) > 0$. Luego, por la resolución del problema de Yamabe, sabemos que existe $g_0 \in [g]$ de curvatura escalar constante positiva. □

Notar que si la dimensión de M es 2, por el Teorema de Gauss-Bonnet, tenemos que $Y(M,[g]) = \int_M s_g dv_g = 4\pi\chi(M)$, con lo cual

$$Y(M) = 4\pi\chi(M)$$

y se alcanza en cualquier clase conforme. Sin embargo, para dimensiones mayores o iguales que 3, el cálculo de este invariante se vuelve extremadamente difícil, y se conoce su valor preciso en muy pocos casos.

Si $g \in \mathcal{M}_M$ es una métrica de curvatura escalar constante $s_g \leq 0$, entonces por el Corolario 3.2, sabemos que g minimiza el funcional de Yamabe en su clase conforme. Esto nos da una cota inferior para $Y(M)$. Es decir,

$$Y(g) = Y(M,[g]) \leq Y(M).$$

Lo mismo sucede por el Teorema de Obata [34] con las métricas de Einstein. Si g es una métrica de Einstein, g minimiza el funcional de Yamabe en $[g]$ y cualquier otra métrica de curvatura escalar constante es un múltiplo escalar de g. Con lo cual, si g es una métrica dede Einstein, entonces

$$Y(g) \leq Y(M).$$

Por ejemplo, dado que $g_0^2 + g_0^2$ es una métrica de Einstein de $S^2 \times S^2$, tenemos que

$$16\pi = Y(g_0^2 + g_0^2) \leq Y(S^2 \times S^2).$$

Cuando M no admite métricas de curvatura escalar positiva, tenemos la siguiente caracterización del invariante de Yamabe (ver [31]):

Proposición 6.2. *Sea M una variedad cerrada de dimensión n tal que $Y(M) \leq 0$. Entonces, se tiene que*

$$Y(M) = -\Big(\inf_{g \in \mathcal{M}_M} \int_M |s_g|^{\frac{n}{2}} dv_g\Big)^{\frac{2}{n}}.$$

Demostración. La proposición se deduce fácilmente si notamos que cuando la constante de Yamabe es no positiva, esta se puede caracterizar de la siguiente manera

$$|Y(M,[g])| = \Big(\inf_{g \in [g]} \int_M |s_g|^{\frac{n}{2}} dv_g\Big)^{\frac{2}{n}}. \tag{56}$$

Pues, si $Y(M) \leq 0$, se tiene que para toda $[g] \in \mathcal{C}_M$, $Y(M,[g]) \leq 0$ y por lo tanto,

$$Y(M) = \sup_{g \in \mathcal{C}_M} Y(M,[g]) = -\inf_{g \in \mathcal{C}_M} |Y(M,[g])| = -\Big(\inf_{g \in \mathcal{M}_M} \int_M |s_g|^{\frac{n}{2}} dv_g \Big)^{\frac{2}{n}}.$$

Ahora veamos que la caracterización (56) es cierta. Como $Y(M,[g])$ es un invariante de la clase conforme, podemos suponer que s_g es constante y no positiva. Luego, como ya hemos visto, g realiza la constante de Yamabe. Dado $g_0 \in [g]$ sea $u \in C^\infty(M)$ tal que $g_0 = u^{p_n-2} g$. Tenemos que

$$|Y(M,[g])| vol(M,g)^{\frac{n-2}{n}} = -\int_M s_g dv_g \leq \int_M -s_{g_0} u^{p_n-2} dv_g. \tag{57}$$

En efecto, de la ecuación de curvatura escalar (6) tenemos que

$$s_{g_0} u^{p_n-2} = a_n u^{-1} \Delta_g u + s_g.$$

Integrando y utilizando la fórmula de Green, se tiene que

$$\begin{aligned} -\int_M s_{g_0} u^{p_n-2} dv_g &= -\int_M a_n u^{-1} \Delta_g u + s_g dv_g \\ &= -\int_M a_n < \nabla u^{-1}, \nabla u > dv_g - \int_M s_g dv_g \\ &= \int_M a_n u^{-2} |\nabla u|^2 dv_g - \int_M s_g dv_g \geq -\int_M s_g dv_g. \end{aligned}$$

Luego, aplicando la desigualdad de Hölder a (57) obtenemos que

$$\begin{aligned} |Y(M,[g])| vol(M,g)^{\frac{n-2}{n}} &\leq \Big(\int_M |s_{g_0} u^{p_n-2}|^{\frac{n}{2}} dv_g \Big)^{\frac{2}{n}} \Big(\int_M 1 dv_g \Big)^{\frac{n-2}{n}} \\ &= \Big(\int_M |s_{g_0}|^{\frac{n}{2}} dv_{g_0} \Big)^{\frac{2}{n}} vol(M,g)^{\frac{n-2}{n}}. \end{aligned}$$

Es decir, que para todo $g_0 \in [g]$,

$$|Y(M,[g])| \leq \Big(\int_M |s_{g_0}|^{\frac{n}{2}} dv_{g_0} \Big)^{\frac{2}{n}},$$

lo cual prueba la caracterización (56) de la constante de Yamabe, ya que en la desigualdad anterior la igualdad se da para la métrica g.

$\square$

Observación 6.3. *Si $Y(M) > 0$, el lado derecho de la igualdad en la Proposición 6.1 es cero, dado que por el Terema 3.13, sabemos que existe una métrica en $\mathcal{M}_M$ de curvatura escalar cero.*

Veamos algunos resultados referentes a la estimación del invariante de Yamabe en el caso positivo.

Utilizando el comportamiento asintótico de la constante de Yamabe (Teorema 4.8), se puede ver que $Y(S^n \times S^1) = Y(S^{n+1})$ (ver [1]). Pues, por definición tenemos que

$$Y(S^n \times S^1) \geq Y(S^n \times S^1, [g_0^n + t g_0^1])$$

para todo $t > 0$. Luego aplicando el Teorema 4.8 a), tenemos que

$$\begin{aligned} Y(S^n \times S^1) &\geq \lim_{t \to +\infty} Y(S^n \times S^1, [g_0^n + t g_0^1]) = Y(S^n \times \mathbb{R}, [g_0^n + g_e^1]) \\ &= Y(S^{n+1}, [g_0^{n+1}]) = Y(S^{n+1}). \end{aligned}$$

La igualdad $Y(S^n \times \mathbb{R}, [g_0^n + g_e^1]) = Y(S^{n+1}, [g_0^{n+1}])$ ya no es cierta si la dimensión del espacio Euclídeo en el producto Riemanniano es mayor que uno. Más precisamente, Akutagawa, Florit y Petean, probaron en [1] que si $n \geq 2$ se cumple que

$$Y(M^m \times \mathbb{R}^n) < Y(S^{m+n}).$$

A continuación mencionaremos, y comentaremos muy brevemente, algunos resultados conocidos en la literatura sobre cotas inferiores del invariante de Yamabe.

i) En [3], B. Ammann, M. Dahl y E. Humbert probaron que el invariante de Yamabe de $M^m \times N^n$ con $m, n \geq 3$ y $Y(M) \geq 0$ esta acotado inferiormente por

$$Y(M \times N) \geq B_{m,n} Y(M)^{\frac{m}{m+n}} Y(S^n)^{\frac{n}{m+n}}. \tag{58}$$

donde $B_{m,n} = a_{m+n}(m+n)(ma_m)^{-\frac{m}{m+n}}(na_n)^{-\frac{n}{m+n}}$.

Se puede ver que si $Y(M,[g]) \geq 0$ y $Y(N,[h]) \geq 0$ $(m, n \geq 3)$ y las curvaturas escalares satisfacen que $s_{g+h}a_{m+n}^{-1} \geq s_g a_m^{-1} + s_h a_n^{-1}$ ([3], Teorema 2.3), entonces

$$Y(M \times N, [g+h]) \geq B_{m,n} Y(M,[g])^{\frac{m}{m+n}} Y(N,[h])^{\frac{n}{m+n}}. \tag{59}$$

Por otro lado, si $Y(M) \geq 0$ se tiene que $Y(M \times N) \geq 0$. Si $Y(M \times N) = 0$, entonces se tiene inmediatamente (58). Si $Y(M \times N) > 0$, aplicamos el Teorema 4.8 a $Y(M \times N, g + th)$, donde $g \in \mathcal{M}_M$ es tal que $s_g > 0$. Luego, utilizamos (59) en $Y(M \times \mathbb{R}^n, [g + g_e^n])$, teniendo en cuenta que $Y(\mathbb{R}^n, [g_e^n]) = Y(S^n)$, para obtener (58).

ii) J. Petean probó en [37] que si (M^m, g) es una variedad Riemanniana cerrada tal que su tensor de Ricci satisface que $Ricc(g) \geq (m-1)g$, entonces

$$Y(M \times \mathbb{R}, [g + g_e]) \geq \left(\frac{vol(M,g)}{vol(S^m, g_0^m)}\right)^{\frac{2}{m+1}} Y(S^{m+1}).$$

Para ver esta cota, las regiones isoperimétricas de $M \times (0,\pi)$ son estudiadas y con esto se obtiene una cota inferior de $Y(M \times \mathbb{R})$. Luego el Teorema 4.8 es usado para obtener la cota del invariante de Yamabe. Dada una variedad Riemanniana (W, h), una región isoperimétrica es un conjunto abierto $U \subseteq W$ tal que su borde ∂U minimiza lo siguiente

$$\inf\{vol(\partial V) : vol(V,h) = vol(U,h)\}.$$

Se sabe que para todo $s < Vol(N,h)$ existe una región isoperimétrica con ese volumen. La función isoperimétrica, $I_h : (0, Vol(N,h)) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ está definida por

$$I_h(s) = vol(U^s, h)$$

donde U es una región isoperimétrica de volumen s y h es la restricción de la métrica de M a U^s.

iii) En [39], Petean y Ruiz probaron que si M es una variedad cerrada de dimensión 2, entonces

$$Y(M \times S^2) \geq \frac{\sqrt{2}c}{3^{\frac{3}{4}}} Y(S^4).$$

donde $c = (1{,}047)^2$. Para obtener esta cota, Petean y Ruiz estudiaron la función isoperimétrica de $S^2 \times \mathbb{R}^2$. Con esta encontraron una cota inferior para $Y(M \times \mathbb{R}^2)$ y utilizando el Teorema 4.8 obtuvieron la cota mencionada.

iv) En [40], Petean and Ruiz probaron que si M es una variedad cerrada de dimensión 3 y N una variedad cerrada de dimensión 2, entonces

$$Y(M \times S^2) \geq 0{,}63Y(S^5)$$

y

$$Y(N \times S^3) \geq 0{,}75Y(S^5).$$

La comparación de la función isoperimétrica de $S^2 \times \mathbb{R}^3$ y $S^3 \times \mathbb{R}^2$ con la de S^5 es usada para obtener cotas inferiores para $Y(S^2 \times \mathbb{R}^3, [g_0^2 + g_e])$ y $Y(S^3 \times \mathbb{R}^2, [g_0^3 + g_e])$, respectivamente. Luego, como antes, para obtener la cota deseada se utiliza el Teorema 4.8.

6.1. Cirugías y el invariante de Yamabe.

Una forma natural de tratar de comprender al invariante de Yamabe, y obtener estimaciones del mismo, es intentar entender como este se comporta cuando realizamos cirugías.

La cirugía es un método para construir nuevas variedades. La idea de la construcción es la siguiente. Sea M una variedad cerrada de dimensión n y $f : S^k \longrightarrow M$ una sumersión de una esfera de dimensión $0 \leq k \leq n-1$ en M. Identifiquemos S^k con su imagen. Supongamos que la sumersión de S^k tiene fibrado normal trivial. Luego, borramos de M un entorno tubular $N_\varepsilon(S^k)$ de S^k y nos queda una variedad $N_1 = M - N_\varepsilon(S^k)$ cuyo borde es

$$\partial N_1 = \partial(M - N_\varepsilon(S^k)) = S^k \times S^{n-k-1}.$$

Por otro lado, si borramos un entorno tubular de la sumersión de S^k en S^n (que es $S^k \times D^{n-k}$), obtenemos $N_2 \equiv B^{k+1} \times S^{n-k-1}$ cuyo borde es

$$\partial N_2 = \partial(B^{k+1} \times S^{n-k-1}) = S^k \times S^{n-k-1}.$$

Es decir, N_1 y N_2 tienen el mismo borde. Luego, pegamos N_1 y N_2 por el borde común y obtenemos la variedad

$$W = N_1 \sqcup N_2 / \sim (S^k \times S^{n-k-1}).$$

Diremos que la variedad W fue construída practicando cirugía de codimensión $n-k$ a M. Por supuesto, que la construcción anterior tiene ciertas sutilezas que aquí pasaremos por alto (ver detalles y resultados acerca de cirugías en variedades en [28]).

La cirugía es un caso particular de una operación llamada suma conexa. Sean M_1 y M_2 dos variedades cerradas de dimensión n. Sea S una subvariedad cerrada de dimensión $0 \leq k \leq n$ y $f_i : S \longrightarrow M_i$ $i = 1, 2$ sumersiones de S en M_i con fibrado normal trivial. Luego, la suma conexa de M_1 y M_2 a lo largo de S, que notamos con $M_1 \#_S M_2$, es la variedad que se obtiene de pegar $M_1 - N_\varepsilon(S)$ y $M_2 - N_\varepsilon(S)$ identificando su bordes. En particular, la variedad S puede ser un punto, como en la figura siguiente:

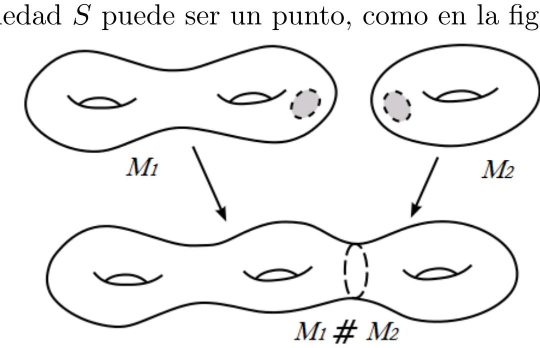

Figura 2

Cuando realizamos la suma conexa a lo largo de una variedad que consiste de un punto, $S = \{pto.\}$, la llamamos suma conexa a secas, y la notamos con $M_1 \# M_2$.

Practicar cirugía de codimensión $n-k$ a una variedad M, es hacer la suma conexa de M y S^n a lo largo de una esfera $k-$dimesional de fibrado normal trivial.

R. Schoen y S. T. Yau [46] y M. Gromov y H. B. Lawson [18] probaron que la propiedad de admitir una métrica de curvatura escalar positiva es invariante por cirugías de codeminesión al menos 3. Es decir, probaron que

Teorema 6.4. *Sea M una variedad cerrada de dimensión al menos 3 tal que $Y(M) > 0$. Supongamos que N es obtenida de M mediante cirugías de codimensión al menos 3, entonces $Y(N) > 0$.*

En particular, si M_1 y M_2 son dos variedades cerradas (de dimensión $n \geq 3$) con invariante de Yamabe positivo, luego $Y(M_1 \# M_2) > 0$. En efecto, si $Y(M_1) \geq 0$ o $Y(M_2) \geq 0$ el invariante de Yamabe de la unión disjunta es

$$Y(M_1 \sqcup M_2) = \text{mín}\{Y(M_1), Y(M_2)\}.$$

Por lo tanto, $Y(M_1 \sqcup M_2) > 0$, y como $M_1 \# M_2$ se obtiene de hacer cirugía de codimensión $n \geq 3$, por el teorema anterior se sigue que $Y(M_1 \# M_2) > 0$.

Para el caso no positivo del invariante de Yamabe tenemos este importante resultado de J. Petean y G. Yun [41]:

Teorema 6.5. *Sea M un variedad cerrada de dimensión $n \geq 3$, tal que $Y(M) \leq 0$. Si obtenemos N de M mediante cirugías de codimensión al menos 3, entonces*

$$Y(N) \geq Y(M).$$

Este resultado junto con el Teorema 6.4 implican que la propiedad de que el invariante de Yamabe sea no negativo es invariante por cirugías de codimensión al menos 3.

Petean probó en [35] que si la dimensión de M es $n \geq 4$ y si la codimensión de la cirugía es diferente a $n-1$, entonces tenemos la igualdad en el Teorema 6.5.

En [36] Petean probó el siguiente resultado:

Teorema 6.6. *Sea M una variedad simplemente conexa de dimensión $n \geq 5$. Luego, se cumple que $Y(M) \geq 0$.*

La idea de la prueba es la siguiente:

Una variedad se dice spin si admite una estructura spin. Gromov y Lawson probaron en [18] que si M es una variedad no spin, entonces admite métricas de curvatura escalar positiva.

Decimos que dos variedades sin borde M_1 y M_2, de dimesión n, son *cobordantes*, si existe W de dimensión $n+1$ tal que su borde es $\partial W = M_1 \sqcup -M_2$ ($-M_2$ es M_2 dotada con la orientación opuesta a M_2). Decimos que dos variedades spin M_1 y M_2 son *spin cobordante* si existe una variedad spin W tal que $\partial W = M_1 \sqcup -M_2$. Si cocientamos el espacio de variedades spin de dimensión n por esta relación de equivalencia, obtenemos Ω_n^{Spin} al cual podemos darle estructura de grupo abeliano con la operación unión disjunta o la suma conexa de variedades.

Lo que se puede ver es que en cada clase de Ω_n^{Spin} hay una variedad con invariante de Yamabe no negativo. Por otro lado, de [18] sabemos que si M es una variedad spin, de dimensión $n \geq 5$, simplemente conexa, y N es spin cobordante con M, entonces podemos obtener M practicando cirugías a N de codimensión al menos 3. Entonces, sea M simplemente conexa de dimensión al menos 5. Si M es no spin, $Y(M) > 0$. Si M es spin, sea N_0 el representante de su clase de cobordismo tal que $Y(N_0) \geq 0$. Como podemos obtener M de N_0 mediante cirugías de codimensión al menos 3, y la propiedad del invariante de Yamabe de ser no negativo resulta invariante por este tipo de cirugías, tenemos que $Y(M) \geq 0$.

Observación 6.7. *No se conoce ningún ejemplo de una variedad M cerrada, simplemente conexa, de dimensión $n \geq 5$, que satisfaga $0 < Y(M) < Y(S^n)$.*

Finalizamos comentando la fórmula de cirugía de B. Ammann, M. Dahl y E. Humbert probada en ([2], Teorema 1.3).

Teorema 6.8. *Sea M_1 y M_2 variedades cerradas de dimensión n. Si realizamos la suma conexa de M_1 y M_2 a lo largo de una variedad $k-$dimensional S con $n-k \geq 3$ tenemos que*

$$Y(M_1 \# M_2) \geq \min\{Y(M_1 \sqcup M_2), \Lambda_{n,k}\},$$

donde $\Lambda_{n,k}$ es una constante positiva que depende de n y k.

En particular, para cirugías se tiene que

Corolario 6.9. *Sea M una variedad cerrada de dimensión n . Supongamos que obtenemos N de practicar cirugías a M de codimensión $n-k \geq 3$, entonces se tiene que*

$$\min\{Y(M), \Lambda_{n,k}\} \leq Y(N) \leq Y(S^n).$$

La definición de $\Lambda_{n,k}$ es un tanto engorrosa y puede verse en [2]. Pero si $n-k \geq 4$ o $n-k=3$ y $n=4,5,6$ se tiene que

$$\Lambda_{n,k} \geq \inf_{c\in[0,1]} Y(\mathbb{H}^{k+1} \times S^{n-k-1}, [g_{h,c}^{k+1} + g_0^{n-k-1}]),$$

donde $g_{h,c}^{k+1}$ es la métrica de curvatura seccional constante $-c^2$.

Por lo tanto, en esta situación, el lado derecho de la desigualdad puede considerarse como dicha constante.

Para el caso de cirugías de codimensión n, es decir cuando $k=0$, la constante es

$$\Lambda_{n,0} = Y(S^n).$$

Con lo cual la fórmula para la suma conexa es

$$Y(M_1 \# M_2) \geq \min\{Y(M_1), Y(M_2)\}$$

si $Y(M_1) \geq 0$ o $Y(M_2) \geq 0$.

Si $Y(M_1) \leq 0$ y $Y(M_2) \leq 0$, entonces

$$Y(M_1 \sqcup M_2) = -\Big(|Y(M_1)|^{\frac{n}{2}} + |Y(M_2)|^{\frac{n}{2}}\Big)^{\frac{2}{n}}.$$

Entonces, en este caso resulta que

$$Y(M_1 \# M_2) \geq -\Big(|Y(M_1)|^{\frac{n}{2}} + |Y(M_2)|^{\frac{n}{2}}\Big)^{\frac{2}{n}}.$$

con cual recuperamos la fórmula que Kobayashi había obtenido en ([27]) para la suma conexa.

6.2. Curvatura escalar prescrita.

En esta sección mencionaremos los resultados de Kazdan y Warner acerca del problema de la curvatura escalar prescrita.

Sea M una variedad cerrada y f una función suave. ¿Existe $g \in \mathcal{M}_M$ tal que $s_g = f$?

Como mencionamos en la introducción, cuando la dimensión de M es 2 el Teorema de Gauss-Bonnet nos provee ciertas restricciones topológicas para que f sea la curvatura escalar (Gaussiana) de una métrica Riemanniana de M. Recordamos que si f es la curvatura escalar de una métrica, entonces

$$\begin{cases} f \text{ es positiva en alguna región de } M & \text{si } \chi(M) > 0 \ (Y(M) > 0), \\ f \equiv 0 \text{ o cambia de signo} & \text{si } \chi(M) = 0 \ (Y(M) = 0), \\ f \text{ es negativa en alguna región de } M & \text{si } \chi(M) < 0 \ (Y(M) < 0). \end{cases} \tag{60}$$

Una consecuencia inmediata es que como $\chi(T^2) = 0$, $Y(T^2) = 0$, ya que la curvatura escalar de toda métrica de curvatura escalar constante debe ser igual a cero. En realidad, se tiene que $Y(T^n) = 0$ para todo $n \geq 2$. Para $n = 3$ esto fue probado por R. Schoen y S.T. Yau en [47] y para $n \geq 4$ por M. Gromov y H. B. Lawson [18].

Kazdan y Warner probaron en [23] y [24] que para superficies compactas la condición (60) también resulta suficiente. Tenemos que

Teorema 6.10. *Sea M una superficie cerrada y $f \in C^\infty(M)$. Luego, existe $g \in \mathcal{M}_M$ tal que $s_g = f$ si y solo si f satisface la condición (60).*

Kazdan y Warner prueban que dado f , si tomamos una métrica cualquiera g_0 de curvatura escalar constante (que sea constante en realidad no es necesario), existe una métrica g_1 en la clase conforme $[g_0]$ y un difeomorfismo φ de M, tal que la métrica $g_2 = \varphi^*(g_1)$ satisface que $s_{g_2} = f$. Decimos que g_2 es conformemente equivalente a g_0

Para dimensiones mayores que 2, si $Y(M) \leq 0$, y f es la curvatura escalar de una métrica Riemanniana, f no puede ser una función positiva y, por lo tanto, debe ser no positiva en alguna región de M.

En [25] y [26], Kazdan y Warner probaron el siguiente resultado:

Teorema 6.11. *Sea M una variedad cerrada de dimensión mayor o igual a 3.*

a) $Y(M) > 0$ *si y solo si toda función suave es la curvatura escalar de una métrica Riemanniana.*

b) *Si $Y(M) = 0$ y el invariante se realiza, $f = s_g$ para alguna $g \in \mathcal{M}_M$ si y solo si $f \equiv 0$ o f es negativa en alguna región de M.*

c) *Si $Y(M) < 0$ o $Y(M) = 0$ y el invariante no se realiza (es decir, $Y(M, [g]) < 0$ para toda $[g] \in \mathcal{C}$), $f = s_g$ para alguna $g \in \mathcal{M}_M$ si y solo si f es negativa en alguna región de M.*

La consecuencia inmediata del Teorema anterior es

Corolario 6.12. *Si f es negativa en alguna región de M, entonces es la curvatura escalar de una métrica Riemanniana.*

Idea de la prueba del Teorema:

Por definición del invariante de Yamabe se deduce la condición suficiente de i) y la condición necesaria de ii) y iii).

Dada $f \in C^\infty(M)$, la idea será ver cuando existe $g_0 \in \mathcal{M}_M$ tal que f es la curvatura escalar de una métrica conformemente equivalente a g_0. Es decir, que exista $u > 0$ suave y un difeomorfismo $\varphi : M \longrightarrow M$ tal que se cumpla

$$a_n\Delta_{g_0}u + s_{g_0}u = (f \circ \varphi)u^{p_n-1}.$$

Si $g_0 \in \mathcal{M}_M$ es tal que $Y(M, [g_0]) < 0$, se puede ver que ([25], Teorema 3.3) una función f es la curvatura escalar de una métrica conformemente equivalente a g_0 si y solo si f es negativa en alguna región de M. La condición necesaria de iii) se deduce de que no hay restricción para la existencia de métricas Riemannianas con curvatura escalar negativa (ver Teorema 2.9). Luego, si f es negativa en alguna región podemos tomar g_0 con $Y(M, [g_0]) < 0$ y aplicar el Teorema 3.3 de [25]. Lo mismo podemos hacer en ii) cuando f no es la función nula. Por lo tanto, también queda probada la vuelta de ii).

Veamos ahora cuando $Y(M) > 0$. Por el mismo motivo que antes, cualquier función que sea negativa en algún lugar de M es la curvatura escalar de una métrica. Por otro lado, como M admite métricas de curvatura escalar positiva, por el Teorema 3.13, sabemos que existe una métrica de curvatura escalar constante cero.

Supongamos que tenemos $f \geq 0$ pero no idénticamente nula.

En ([26], Teorema A) se prueba que dado una variedad Riemanniana cerrada (M, g_0), si $\rho \in C^\infty(M)$ satisface que

$$\text{mín}\,\rho < s_g(x) < \text{máx}\,\rho$$

para todo $x \in M$, entonces existe $g \in \mathcal{M}_M$ tal que $s_g = \rho$.

Como $Y(M) > 0$, sea g_0 tal que s_{g_0} es constante, positiva y cumple que $\text{mín}\, f < s_{g_0}(x) < \text{máx}\, f$ para todo $x \in M$. Luego, tenemos que f es la curvatura escalar de una métrica Riemanniana.

7. Apéndice

7.1. Curvatura escalar en clases conformes.

Sea (M, g) una variedad Riemanniana de dimensión $n \geq 3$ y $\tilde{g} \in [g]$, es decir, $\tilde{g} = u^{p_n-1}g$ con $u \in C^\infty_{>0}(M)$. En este apartado, veremos como se expresa la curvatura escalar de g en términos de s_g y u. Deduciremos la ecuación (7.1) que recordamos aquí:

$$s_{\tilde{g}} = u^{1-p_n}\Big(a_n\Delta_g u + s_g u\Big).$$

Sea (U, φ) un sistema de coordenadas y $\{\Gamma^k_{ij}\}$ los símbolos de Christoffel de la métrica g en dicha carta, es decir,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial\varphi^i}}\frac{\partial}{\partial\varphi^j} = \sum_{k=1}^n \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial\varphi^k}.$$

Los símbolos de Christoffel son derivadas del tensor métrico (ver por ejemplo [14]):

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^n\Big(\frac{\partial g_{ir}}{\partial\varphi^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial\varphi^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial\varphi^r}\Big)g^{kr},$$

donde g^{kr} son las entradas (k, r) de la matriz inversa de la métrica g en la carta (U, φ).

Luego, si $\tilde{g} = fg$ tenemos que sus símbolos de Christofell se escriben

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^n\Big(\frac{\partial\tilde{g}_{ir}}{\partial\varphi^j} + \frac{\partial\tilde{g}_{jr}}{\partial\varphi^i} - \frac{\partial\tilde{g}_{ij}}{\partial\varphi^r}\Big)\tilde{g}^{kr}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\Big(\frac{\partial f g_{ir}}{\partial \varphi^j} + \frac{\partial f g_{jr}}{\partial \varphi^i} - \frac{\partial f g_{ij}}{\partial \varphi^r}\Big) f^{-1} g^{kr}$$

$$= \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\Big(f^{-1}\frac{\partial f}{\partial \varphi^j} g_{ir} + f^{-1}\frac{\partial f}{\partial \varphi^i} g_{jr} - f^{-1}\frac{\partial f}{\partial \varphi^r} g_{ij}\Big) g^{kr}$$

$$= \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\Big(\frac{\partial \ln f}{\partial \varphi^j} g_{ir} + \frac{\partial \ln f}{\partial \varphi^i} g_{jr} - \frac{\partial \ln f}{\partial \varphi^r} g_{ij}\Big) g^{kr}.$$

Es bien conocida la siguiente fórmula para el tensor de Ricci:

$$Ricc_{ij}(g) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial \varphi^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^k}{\partial \varphi^j} + \sum_{r,k} \Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^k - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^k. \tag{61}$$

Luego, aplicando la fórmula (61) para la métrica $\tilde{g}$, tenemos que

$$Ricc(\tilde{g})_{ij} = Ricc(g)_{ij} - \frac{n-2}{2}\frac{\partial^2(\ln f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i u^j}$$

$$+\frac{n-2}{4}\frac{\partial(\ln f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}\frac{\partial \ln f \circ \varphi^{-1}}{\partial u^j} - \frac{1}{2}\Big(\Delta_g \ln f + \frac{n-2}{2}|\nabla \ln f|^2\Big) g_{ij}.$$

Eventualmente conviene considerar, para simplificar los cálculos, (U, φ) una carta normal.

Como $s_{\tilde{g}} = \sum_{ij} \tilde{g}^{ij} Ricc(\tilde{g})_{ij} = f^{-1}\sum_{ij} g^{ij} Ricc(\tilde{g})_{ij}$ se obtiene que

$$s_{\tilde{g}} = f^{-1} s_g - (n-1) f^{-2}\Delta_g f - \frac{(n-1)(n-6)}{4}|\nabla f|^2.$$

Realizando la sustitución $f = u^{p_n - 2}$, resulta que

$$s_{\tilde{g}} = u^{-\frac{n+2}{n-2}}\Big(\frac{4(n-1)}{(n-2)}\Delta_g u + s_g u\Big)$$

$$= u^{1-p_n}\Big(a_n \Delta_g u + s_g u\Big).$$

7.2. Invarianza conforme de L_g.

Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada y $h = u^{p_n-2} g$. Luego, el Laplaciano conforme L_g satisface la siguiente propiedad de invarianza:

$$L_h f = u^{1-p_n} L_g(uf)$$

para toda $f \in C^\infty(M)$.

De la escritura local del Laplaciano (ver fórmula 5), tenemos que

$$\Delta_h f = -\frac{1}{u^{p_n}\sqrt{\det g}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big(u^2 g^{ij}\sqrt{\det g}\frac{\partial f}{\partial \varphi^j}\Big)$$

$$= \frac{1}{u^{p_n-2}}\Delta_g f - \frac{2}{u^{p_n-1}} < \nabla u, \nabla f > .$$

Por otro lado, de la ecuación de curvatura escalar (ver Apéndice 7.1), tenemos que

$$s_h f = u^{1-p_n}\big(f a_n \Delta_g u + s_g u f\big).$$

Con lo cual,

$$L_h(f) = \frac{a_n}{u^{p_n-2}}\Delta_g f + \frac{2a_n}{u^{p_n-1}} < \nabla u, \nabla f > + u^{1-p_n} f a_n \Delta_g u + s_g u^{2-p_n} f. \tag{62}$$

Como $\Delta_g(uf) = f\Delta_g u + u\Delta_g f - 2 < \nabla u, \nabla f >$, se sigue finalmente de (62) que

$$L_h f = u^{1-p_n} L_g(uf).$$

7.3. Teoremas de integración.

En esta sección mencionamos sin demostración algunos resultados clásicos de integración que fueron utilizados en estas notas (para los detalles ver por ejemplo ver [16], [9] entre otros).

Sea (M, g) una variedad Riemanniana y sea $\mathfrak{X}(M)$ el espacio de campos tangentes diferenciables de M. La divergencia es un función $div\mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ (si X es k veces diferenciable, $div(X) \in C^{k-1}(M)$) que se define por

$$div(X)(p) := -traza(v \longrightarrow \nabla_v X).$$

Se tienen las siguientes propiedades:

Proposición 7.1. *Sea $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $u, f \in C^2(M)$*

a) $div(X + Y) = div(X) + div(Y)$.
b) $div(fX) = fdiv(X) + < \nabla f, X >$.
c) $\Delta_g f = div(\nabla f)$.
d) $div(u\nabla f) = u\Delta_g f - < \nabla u, \nabla f >$.
e) $\Delta_g(uf) = u\Delta_g f + f\Delta_g u - 2 < \nabla u, \nabla f >$.

Teorema 7.2. [Teorema de la Divergencia] *Sea (M, g) una variedad cerrada y X un campo diferenciable. Entonces se tiene que*

$$\int_M div(M) dv_g = 0.$$

Teorema 7.3. [Teorema de Green] *Sea (M, g) una variedad cerrada y $u, f \in C^2(M)$. Se tiene que*

$$\int_M u\Delta_g f dv_g = \int_M < \nabla u, \nabla f > dv_g. \tag{63}$$

Como consecuencia, el Laplaciano es un operador autoadjunto:

$$\int_M u\Delta_g f dv_g = \int_M f\Delta_g u dv_g. \tag{64}$$

Demostración. Aplicando el Teorema de la divergencia al campo $X = u\nabla f$ tenemos que

$$\int_M div(u\nabla f) dv_g = 0.$$

Por el item d) de la Proposición 7.1 se tiene que

$$\int_M u\Delta_g f - < \nabla u, \nabla f > dv_g = 0.$$

La igualdad (64) se deduce directamente de (63). □

7.3.1. Desigualdad de Hölder.

Sea (M, g) una variedad cerrada y $p, q \in (1, +\infty)$ tales que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Luego dada u y v funciones medibles, se tiene la desigualdad de Hölder:

$$\int_M |uv| dv_g \leq \Big(\int_M |u|^p dv_g \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_M |v|^q dv_g \Big)^{\frac{1}{q}} = \|u\|_p \|v\|_q.$$

La igualdad se da si y solo si existe una constante positiva c tal que $|v|^q = c|u|^p$ para casi todo punto.

7.4. Constantes de Gagliardo-Nirenberg.

Sean m y n enteros positivos, la constante de Gagliardo-Nirenberg $\alpha_{m,n}$ se define por

$$\alpha_{m,n} := \Big[\inf_{u \in H_1^2(\mathbb{R}^n) - \{0\}} \frac{(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dv_{g_e})^{\frac{n}{m+n}} (\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dv_{g_e})^{\frac{m}{m+n}}}{(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p_{m+n}} dv_{g_e})^{\frac{m+n-2}{m+n}}} \Big]^{-1}.$$

Estas constantes resultan positivas y pueden calcularse numéricamente (en [1] se calculan para $m + n \leq 9$ con $n, m \geq 2$).

Referencias

[1] K. Akutagawa, L. Florit, and J. Petean, *On Yamabe constant of Riemannian Products*, Communications in Analysis and Geometry **15** (2007), 947-969.

[2] B. Ammann, M. Dahl, and E. Humbert, *Smooth Yamabe invariant and surgery*, Journal of Differential Geometry **94** (2013), 1:1-58.

[3] B. Ammann, M. Dahl, and E. Humbert, *The conformal Yamabe constant of product manifolds*, Proceedings of the American Mathematical Society **141** (2013), 295-307.

[4] M. T. Anderson, *Canonical metrics on 3-manifolds and 4-manifolds*, Asian J. Math. **10** (2006), 127-163.

[5] T. Aubin, *Équations différentielles non-linéaires et probléme de Yamabe concernant la courbure scalaire*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **55** (1976), 3:269-296.

[6] T. Aubin , *ProblÃĺmes isopÃľrimÃľtriques et espaces de Sobolev*, J. Differential Geom. **11** (1976), 4:573-598.

[7] T. Aubin, *Some Non-Linear Problem in Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, (1998).

[8] M. Berger, *A panoramic view of Riemannian geometry*, Springer-Verlag, Berlin, (2003).

[9] A. L. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, (1987).

[10] L. A. Caffarelli, B. Gidas, J. Spruck *Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth*, Communications on Pure and Applied Mathematics **42** (1989), 3:271-297.

[11] J. Cao *The existence of generalized isothermal coordinates for higher dimensional Riemannian manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **324** (1991), 901-920.

[12] I. Chavel, *Eigeinvalues in Riemannian Geometry*, 1st edition, Academic Press, INC., (1984).

[13] M. P. do Carmo, *Geometria Diferencial de curvas y superficies*, sexta edición, SBM, (2006).

[14] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, segunda edición, Projeto Euclides, IMPA, (1988).

[15] H. Elíasson, *On variations of metrics*, Math. Scand., **29** (1971), 317-327.

[16] G. Gallot, D. Hulin y J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, 3rd edition, Universitext, Springer-Verlag, (2004).

[17] G. Gilbarg, N. S. Trüdinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, New York (2001).

[18] M. Gromov, H. B. Lawson *The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature* Ann. Math. **111** (1980), 423-434.

[19] M. Günther, *Conformal normal coordinates*, Ann. Global Anal. Geom., **11** (1993), 173-184.

[20] E. Hebey, *Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev spaces and Inequalities*, Courant Lecture Notes **5**, AMS (1999).

[21] E. Hebey, *Variational methods and elliptic equations in Riemannian geometry*, Workshop and Conference on Recent Trends in Nonlinear Variational Problems (2003) ICTP, Publications ICTP.

[22] G. Henry, J. Petean *Isoparametric hypersurfaces and metrics of constant scalar curvature*, The Asian Journal of Mathematics, **18** (2014), 1:53-68.

[23] J. L. Kazdan, F. W. Warner, *Curvature functions for compact 2-manifolds*, Ann. Math., **99** (1974), 1:14-47.

[24] J. L. Kazdan, F. W. Warner, *Existence and conformal deformation of metrics with prescribed Gaussian and scalar curvatures*, Ann. Math., **101** (1975), 2:317-331.

[25] J. L. Kazdan, F. W. Warner, *Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure*, J. Differential Geom., **10** (1975), 1:113-134.

[26] J. L. Kazdan, F. W. Warner, *A direct approach to the determination of Gaussian and scalar curvature functions*, Inventiones Math., **28** (1975), 227-230.

[27] O. Kobayashi, *Scalar curvature of a metric with unit volume*, Mathematische Annalen, **279** (1987), 2:253-265.

[28] A. Kosinski, *Differential Manifolds*, Dover Publications, Inc. (2007)

[29] C. LeBrun, *Yamabe constants and the perturbed Seiberg-Witten equations*, Comm. Anal. Geom. **5** (1997), 535âĂŞ553.

[30] C. Lebrun, *Einstein metrics and the Yamabe problem*, Trends in mathematical physics (Knoxville, TN, 1998), ,AMS/IP Stud. Adv. Math., **13**, (1999) , 353-376

[31] C. LeBrun, *Kodaira dimension and the Yamabe problem*, Comm. Anal. Geom., **7** (1999), 1: 133-156.

[32] J. M. Lee, *Riemmannian Geometry, an introduction to curvature*, GTM, Springer-Verlag (1997).

[33] J. M. Lee, T. H. Parker, *The Yamabe problem*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **17**, (1987), 1:37âĂŞ91.

[34] M. Obata, *The conjetures on conformal transformation of Riemannian manifolds*, J. Differential Geom., **6** (1971), 2:247-258.

[35] J. Petean, *Computations of the Yamabe invariant*, Mathematical Research Letters, **5** (1998), 703-709.

[36] J. Petean, *The Yamabe invariant of simply connected manifolds*, J. Reine Angew. Math., **523** (2000), 225-231.

[37] J. Petean, *Isoperimetric Regions in spherical cones and Yamabe constants of $M \times S^1$*, Geometriae Dedicata **143** (2009), 37-48.

[38] J. Petean, *Metrics of constant scalar curvature conformal to Riemannian products*, Proceedings of the American Mathematical Society **138** (2010), 8:2897-2905.

[39] J. Petean, J. M. Ruiz, *Isoperimetric profile comparisons and Yamabe constants*, Annals of Global Analysis and Geometry, **40** (2011), 177-189.

[40] J. Petean, J. M. Ruiz, *On the Yamabe constants of $S^2 \times \mathbb{R}^3$ and $S^3 \times \mathbb{R}^2$*, Differential Geometry and its Aplications, **31** (2013), 2:308-319.

[41] J. Petean, G. Yun, *Surgery and the Yamabe invariant*, GAFA, **9** (1999), 1189-1199.

[42] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, GTM **171**, Springer, Second edition (2006).

[43] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, Journal of Differential Geometry **20** (1984), 2:479-495.

[44] R. Schoen, *Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics*, Lecture Notes in Mathematics **1365**, Springer-Verlag, Berlin (1987), 120-154.

[45] R. Schoen, S. T. Yau, *On the proof of the positive mass conjecture in general realtivity* , Comment. Math. Phys. **65** (1979), 45-76.

[46] R. Schoen, S. T. Yau, *On the structure of manifolds with positive scalar curvature* Manuscr. Math., **28** (1979), 159-183.

[47] R. Schoen, S. T. Yau, *Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature*, Ann. of Math., **110** (1979), 127-142.

[48] R. Schoen, S. T. Yau *Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature*, Invent. Math. **1** (1988), 47-71.

[49] R. Schoen, S. T. Yau *Lectures on Differential Geometry*, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology **1** (1986), International Press Publications.

[50] G. Talenti, *Best constants in Sobolev inequality*, Ann. Math. **10** (1976), 353-372.

[51] N. S. Trüdinger, *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa **22** (1968), 265-274.

[52] Q. M. Wang, *Isoparametric functions on Riemannian manifolds. I*, Math. Ann. **277** (1987), 639-646.

[53] E. Witten, *A new proof of the positive energy theorem*, Comm. Math. Phys. **80** (1981), 381-402.

[54] H. Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Mathematical Journal **12** (1960), 21-37.

Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pab. I., C1428EHA, Buenos Aires, Argentina.

E-mail address: ghenry@dm.uba.ar