K-teoría algebraica y la construcción + de Quillen

Eugenia Ellis

Tutor: Guillermo Cortiñas

Septiembre de 2007

Trabajo tutelado de investigación
Doctorado en Matemática
Departamento de Álgebra y Geometría y Topología
Universidad de Valladolid

A la memoria de mi padre

Jorge Eduardo Ellis Martín

Índice general

Introducción vii

1. Espacio clasificante de un grupo **1**
1.1. Conjuntos simpliciales . . . 1
1.1.1. La categoría $\mathbb{S}$ . . . 2
1.1.2. Categoría simpleja $(\mathbf{\Delta} \downarrow X)$ . . . 7
1.1.3. Homotopía simplicial . . . 9
1.1.4. Morfismos simpliciales triviales y localmente triviales . . . 10
1.2. Espacios de Kelley . . . 11
1.2.1. La categoría **Ke** . . . 11
1.2.2. Funtor Ke . . . 12
1.3. Realización geométrica de conjuntos simpliciales . . . 18
1.3.1. El funtor $|\ |$ . . . 18
1.3.2. El funtor Sing . . . 21
1.4. El conjunto simplicial WG y los espacios $EG_\bullet$ y $BG_\bullet$ . . . 31
1.4.1. El conjunto simplicial WG . . . 31
1.4.2. Grupos y acciones simpliciales . . . 32
1.4.3. Los espacios $EG_\bullet$ y $BG_\bullet$ . . . 38
1.5. Espacio clasificante . . . 40
1.5.1. Conjuntos simpliciales punteados . . . 40
1.5.2. Espacio clasificante . . . 40
1.5.3. Funtorialidad del espacio clasificante . . . 40
1.5.4. Propiedad universal del espacio clasificante . . . 41
1.5.5. Otras propiedades . . . 41
1.6. Unicidad del espacio clasificante . . . 42
1.6.1. Propiedad de extensión de secciones . . . 42
1.6.2. Unicidad del espacio clasificante . . . 50

2. Construcción "+" de Quillen **53**
2.1. Homología con coeficientes locales . . . 53
2.1.1. Coeficientes locales vía módulos . . . 54
2.1.2. Morfismo inducido en homología . . . 56
2.2. Fibraciones, Cofibraciones y funciones acíclicas . . . 57

2.2.1. Fibraciones . . . 57
2.2.2. Cofibraciones . . . 58
2.2.3. Espacio de arcos asociado a una función continua. . . . 59
2.2.4. Fibra homotópica . . . 60
2.2.5. Funciones acíclicas . . . 63
2.2.6. Grupos perfectos . . . 64
2.3. Construcción "+" de Quillen . . . 65
2.3.1. Funtorialidad de la construcción "+" . . . 71
2.3.2. Algunas propiedades . . . 72
2.4. Construcción "+" como una localización . . . 73
2.5. Construcción "+" en fibraciones . . . 74
2.5.1. Fibraciones quasi-nilpotentes . . . 77
2.6. Construcción "+" en BG . . . 78
2.6.1. Extensiones centrales de un grupo . . . 78
2.6.2. Propiedades de la construcción "+" en BG . . . 79

3. K-teoría algebraica **83**
3.1. Anillos y grupos asociados a un anillo. . . . 83
3.1.1. Anillo y grupo de matrices. . . . 84
3.1.2. Grupos de matrices en **PRng** . . . 85
3.1.3. Unitización de un anillo. . . . 86
3.1.4. Cono y suspensión de un anillo . . . 87
3.2. Los primeros K-funtores . . . 87
3.2.1. K_0 . . . 87
3.2.2. K_1 . . . 88
3.2.3. Propiedades de K_0 y K_1 . . . 89
3.3. K-teoría de orden superior . . . 90
3.3.1. K-grupos de anillos con unidad . . . 90
3.3.2. K-grupos de anillos sin unidad . . . 91
3.3.3. K-grupos relativos . . . 92
3.4. Pseudo-conjugación en $\mathrm{GL}\, R$. . . . 93
3.5. Estructura de H-grupo de $\mathrm{BGL}(R)^+$ . . . 96
3.6. Estabilidad del funtor K_n . . . 100
3.7. K_n-grupos de un anillo con suma infinita . . . 102
3.7.1. $K_n(\mathbf{C}R) = 0$ . . . 103
3.8. El producto de Loday . . . 104
3.8.1. Producto tensorial de matrices . . . 104
3.8.2. La aplicación $\gamma_{pp'}^{RR'}$ . . . 107
3.8.3. El producto $\star$ . . . 112
3.9. El isomorfismo $K_n(R) \cong K_{n+1}(\mathbf{S}R)$ y la K-teoría negativa . . . 115
3.10. El funtor $\mathbf{K} : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Spt}$ . . . 117
3.10.1. Espacio de caminos y de lazos de un conjunto simplicial . . . 118
3.10.2. La categoría **Spt** . . . 119

3.10.3. Las aplicaciones $\eta_R : \mathrm{BGL}^+(R) \to \Omega\,\mathrm{BGL}^+(\mathbf{S}R)$ 119
3.10.4. El espectro $\mathbf{K_R}$ 121

A. Preliminares **123**
A.1. Lema de Urysohn 123
A.2. G-espacios topológicos 123
A.3. Grupos de homología 124
A.4. Grupos de homotopía 125

Bibliografía **133**

Introducción

El objetivo de este trabajo es exponer qué es la K-teoría algebraica de un anillo. La K-teoría algebraica se puede expresar de dos maneras:

- Como una familia de funtores $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de la categoría de anillos con unidad en la categoría de grupos
$$K_n : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Grp}.$$
- Como un funtor de la categoría de anillos con unidad en la categoría de espectros
$$\mathbf{K} : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Spt}.$$

Aunque estos funtores forman parte de una misma teoría, fueron definidos de maneras distintas y en momentos distintos. El primero en ser definido fue $K_0 : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Grp}$. Éste fue introducido por Grothendieck en su reformulación del teorema de Riemann-Roch, [Gro71]. Sean $\mathcal{P}(R)$ la categoría de clases de isomorfismos de R-módulos proyectivos finitamente generados y $\oplus$ la suma directa de módulos, entonces $(\mathcal{P}(R), \oplus)$ es un monoide abeliano. Se define

$$K_0(R) := \text{Grupo de Grothendieck de } (\mathcal{P}(R), \oplus) \qquad \text{ver sección 3.2.1.}$$

La definición del funtor $K_1 : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Grp}$ se le atribuye a Whitehead y a Bass, [Bas68]. Si bien el K_0 tiene sus orígenes en la geometría algebraica, el trabajo de Whitehead se centraba en la geometría topológica. Milnor en [Mil61] introduce el término "grupo de Whitehead" para referirse a lo que hoy se conoce como el $K_1(R)$. Denotamos por $\mathrm{GL}(R)$ al grupo de matrices invertibles con coeficientes en R. Se define

$$K_1(R) := \mathrm{GL}(R)_{\mathrm{ab}} \qquad \text{ver sección 3.2.2} \tag{1}$$

Los funtores K_0 y K_1 son semi exactos, es decir, si $0 \to A \to B \to C \to 0$ es una sucesión exacta de anillos entonces

$$K_1(A) \to K_1(B) \to K_1(C) \qquad K_0(A) \to K_0(B) \to K_0(C) \quad \text{ver sección 3.2.3}$$

son sucesiones exactas de grupos. Una de las propiedades que hace que K_0 y K_1 sean considerados como parte de una misma teoría, es la existencia de un morfismo $\partial : K_1(C) \to K_0(A)$ tal que

$$K_1(A) \to K_1(B) \to K_1(C) \xrightarrow{\partial} K_0(A) \to K_0(B) \to K_0(C) \quad \text{ver sección 3.2.3} \tag{2}$$

es exacta. Los funtores K_0 y K_1 también se pueden definir para anillos sin unidad, ver sección 3.2.3

Sean

- $\mathcal{M}R = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{M}_n(R)$
- $\mathbf{C}R = \{M : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to R : A_i = \{m_{ij} \neq 0\}_{j\in N} \quad B_j = \{m_{ij} \neq 0\}_{i\in N} \text{ son conjuntos finitos}\}$
- $\mathbf{S}R = \mathbf{C}R/\mathcal{M}R$,

ver sección 3.1. En [Wag72] Wagoner prueba que $K_0(\mathcal{M}R) = K_0(R)$ y $K_0(\mathbf{C}R) = K_1(\mathbf{C}R) = 0$. Considera la sucesión exacta (2) asociada a la sucesión extacta

$$0 \to \mathcal{M}R \to \mathbf{C}R \to \mathbf{S}R \to 0,$$

y obtiene que

$$K_1(\mathbf{S}R) \cong K_0(R).$$

Por este motivo define los K-grupos negativos como

$$K_n(R) := K_0(\mathbf{S}^{-n}R) \qquad n < 0 \text{ ver sección 3.9.}$$

Así se obtiene una familia de funtores $\{K_n\}_{n\geq 0}$ tales que si $0 \to A \to B \to C \to 0$ es una sucesión exacta de anillos, entonces

$$\begin{array}{c} K_1(A) \to K_1(B) \to K_1(C) \to K_0(A) \to K_0(B) \to K_0(C) \to \\ K_{-1}(A) \to K_{-1}(B) \to K_{-1}(C) \to \ldots \to K_{-n}(A) \to K_{-n}(B) \to K_{-n}(C) \to \ldots \end{array} \tag{3}$$

es exacta. Aunque no existe una familia $\{K_n\}_{n\geq 1}$ de funtores que extienda la sucesión (2) a la izquierda, existe una sucesión exacta de seis términos que sí puede ser extendida a la izquierda, ver sección 3.3.3. Es por este motivo que se introducen los K-grupos relativos.

La aparición de los K-grupos de orden superior no fue inmediata pero sí sorprendente. Daniel Quillen, inspirado en su resolución de la conjetura de Adams, definió los funtores $\{K_n\}_{n\geq 1}$ de manera elegante, [Qui73]. Esta definición consiste en considerar $K(R)$ un espacio topológico asociado al anillo R y luego sus grupos de homotopía

$$K_n(R) := \pi_n(K(R)) \qquad n \geq 1, \text{ ver sección 3.3.} \tag{4}$$

Para obtener el espacio $K(R)$ necesitamos dos construcciones topológicas:

- El espacio clasificante de un grupo discreto, ver capítulo 1.
- La construcción "+" de Quillen, ver capítulo 2.

En los dos primeros capítulos de este trabajo nos detendremos a estudiar en detalle estas construcciones.

El espacio clasificante de un grupo discreto G es la clase de homotopía punteada BG de un espacio $\mathrm{BG}_\bullet$. Aunque en ocasiones omitiremos el punto distinguido, trabajaremos con espacios punteados. Las siguientes propiedades muestran cómo en cierta manera BG conserva las propiedades del grupo G:

- El revestimiento universal de BG existe, es contráctil y lo llamamos EG. Existe una acción libre y propiamente discontinua de G en EG. El espacio BG es el conjunto de órbitas de la acción de G en EG, ver proposición 1.4.12.
- $\pi_n(\mathrm{BG}) = \begin{cases} \mathrm{G} & n = 1 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$ ver observación 1.4.13
- Para todo CW-complejo conexo X, el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones $X \to \mathrm{BG}$ está en biyección con $\hom(\pi_1(X), G)$ el conjunto de morfismos de grupos del grupo fundamental de X en G, ver teorema 1.5.3.
- Si M es un grupo G-módulo trivial, la homología de grupo $H_\bullet(\mathrm{G}, M)$ es isomorfa a la homología singular $H_\bullet(\mathrm{BG}; M)$, ver teorema 1.5.7.

El espacio $\mathrm{BG}_\bullet$ es un espacio de Kelley y lo definimos como la realización geométrica de un conjunto simplicial VG, ver sección 1.4. Por este motivo exponemos dichos conceptos en la secciones 1.1, 1.2 y 1.3. El teorema 1.3.20 nos dice que la realización de un morfismo simplicial localmente trivial con fibra F es un fibrado de Kelley localmente trivial con fibra $|F|$. Este resultado es la clave para probar la primera de las caracterizaciones del BG recientemente indicadas. En la sección 1.6 se muestra que dicha caracterización define al espacio clasificante, ver teorema 1.6.14.

La construcción "+" de un CW-complejo conexo X, consiste en otro CW-complejo X^+ que se obtiene pegando células de dimensión 2 y 3 a X. Ésto se hace de manera tal que el grupo fundamental de X^+ es el grupo fundamental de X cocientado por un subgrupo normal y perfecto de él. Además, los grupos de homología de X y X^+ son isomorfos en todos los niveles. En la sección 2.3 realizamos en detalle esta construcción. Aquí veremos que aunque la construcción depende de la elección de un conjunto generador del grupo fundamental de X, es única a menos de homotopía, ver proposición 2.3.7. En las secciones 2.1 y 2.2 repasamos los conceptos de homología con coeficientes locales, fibraciones, cofibraciones, funciones acíclicas y grupos perfectos que son necesarios para el desarrollo del capítulo. Nos interesa el caso que el conmutador del grupo fundamental de X es perfecto. Si realizamos la construcción "+" de X con respecto al conmutador obtenemos las siguientes propiedades

- La inclusión $X \to X^+$ induce la proyección $\pi_1(X) \to \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ a nivel de grupos fundamentales. En particular $\pi_1(X^+)$ es abeliano, ver teorema 2.3.2.
- La inclusión $X \to X^+$ es acíclica, ver teorema 2.3.2.
- X es acíclico si y solo si X^+ es contráctil, ver proposición 2.3.11.

La sucesión exacta larga que relaciona los K-grupos de orden superior la obtendremos considerando la sucesión exacta larga asociada a una determinada fibración. Por este motivo nos interesa saber cuando la construcción "+" preserva fibraciones. Es decir, para qué fibraciones $F \to E \xrightarrow{p} B$ se tiene que $F^+ \to E^+ \xrightarrow{p^+} B^+$ es una fibración. Esto lo discutiremos en la sección 2.5 y veremos que este resultado es garantizado por las siguientes hipótesis

- Teorema 2.5.2: $\pi_1(B)$ es abeliano.
- Teorema 2.5.5:
  - $\pi_1(B)$ y $\pi_1(E)$ son perfectos
  - $\pi_1(B)$ actúa trivialmente en $H_*(F;\mathbb{Z})$
  - F^+ y la fibra homotópica de p^+ son débilmente simples.
- Teorema 2.5.8: La acción de $\pi_1(F^+)$ en $\pi_n(F^+)$ es nilpotente y p es quasi-nilpotente.

Cada teorema generaliza al anterior. En la sección 2.6 consideramos el caso en que $[\mathrm{G},\mathrm{G}]$ es perfecto y $X = \mathrm{BG}$. Éste es interesante ya que los primeros grupos de homotopía de BG^+ los podemos expresar en función de los grupos de homología de grupos relacionados con G, ver teorema 2.6.6:

- $\pi_1(\mathrm{BG}^+) \cong H_1(\mathrm{G},\mathbb{Z})$
- $\pi_2(\mathrm{BG}^+) \cong H_2(\mathrm{N},\mathbb{Z})$, $\mathrm{N} = [\mathrm{G},\mathrm{G}]$.
- $\pi_3(\mathrm{BG}^+) \cong H_3(\hat{\mathrm{N}},\mathbb{Z})$, $\hat{\mathrm{N}}$ es la extensión central universal de N.

Luego de haber estudiado estas dos construcciones topológicas, estaremos en condiciones de definir $K(R)$,

$$K(R) := \mathrm{BGL}^+(R).$$

Aplicando el teorema 2.6.6, vemos que $\pi_1(K(R)) = \mathrm{GL}(R)_{ab} = K_1(R)$ y por lo tanto las definiciones (1) y (4) coinciden. Aplicando este mismo resultado se puede ver que el K_2 definido previamente por Milnor coincide con (4).

Las principales propiedades del espacio $\mathrm{BGL}^+(R)$ y del funtor K_n, $n \geq 1$ que veremos son las siguientes:

- $\mathrm{BGL}^+(R)$ tiene estructura de H-grupo, ver sección 3.5.
- $K_n(R) = K_n(\mathcal{M}_p(R))$, ver proposición 3.6.2.
- El funtor $K_n : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Grp}$ es $\mathcal{M}_2$-estable, ver proposición 3.6.4.
- El espacio $\mathrm{BGL}^+(\mathbf{C}R)$ es contráctil, ver sección 3.7.1.
- Si R es conmutativo el producto de Loday le da estructura de anillo conmutativo graduado a $K_*(R) = \oplus_{n\geq 1} K_n(R)$, ver proposición 3.8.11.

Tenemos definido un funtor de la categoría de anillos con unidad en la categoría de clases de homotopía de CW-complejos,

$$R \mapsto K(R).$$

Así como se tiene un modelo estrictamente funtorial para el espacio clasificante, se tiene un modelo estrictamente funtorial para $K(R)$, ver teorema 3.8.7. Éste nos será útil para

probar que existen $\imath_R : \mathrm{BGL}^+(R) \to \mathrm{BGL}^+(R)$, naturales en R, tal que $\imath_R$ es inversa homotópica de la operación de la estructura de H-grupo de $\mathrm{BGL}^+(R)$, ver sección 3.8.2. Denotaremos por ΩX al espacio de lazos del espacio X. En la sección 3.9, veremos que existe una equivalencia débil de homotopía

$$\Omega\eta_R : \Omega\,\mathrm{BGL}^+(R) \to \Omega^2\,\mathrm{BGL}^+(\mathbf{S}R).$$

De esta manera se prueba que

$$K_{n+1}(\mathbf{S}R) \cong K_n(R) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

En la sección 3.10 vemos que esta equivalencia la podemos tomar natural en R. Ésta nos permitirá definir un Ω-espectro fibrante $\mathbf{K_R} = \{E_n, \mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$E_n = \Omega(\mathrm{BGL}^+(\mathbf{S}^{n+1}R)) \qquad \mu_n = \Omega\eta_{\mathbf{S}^{n+1}R}$$

tal que

$$\pi_n(\mathbf{K_R})) = \begin{cases} \pi_0(E_{-n}) & n < 0 \\ \pi_n(E_0) & n \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \pi_0(\Omega\,\mathrm{BGL}^+(\mathbf{S}^{-n+1}R)) & n < 0 \\ \pi_n(\Omega(\mathrm{BGL}^+(\mathbf{S}R))) & n \geq 0 \end{cases} = K_n(R) \quad n \in \mathbb{Z}$$

Además se define para todo morfismo de anillos $f : R \to S$ un morfismo de Ω-espectros fibrantes $\mathbf{f} : \mathbf{K_R} \to \mathbf{K_S}$ tal que

$$\pi_n(\mathbf{f}) = K_n(f) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Finalmente tenemos definido un funtor de la categoría **Ring** a la categoría **Spt** que representa a la K-teoría algebraica,

$$\mathbf{K} : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Spt}.$$

Los resultados expuestos en éste trabajo no son originales y al principio de cada capítulo se detalla la bibliografía consultada.

Quiero agradecer a Willie por su paciencia y por el tiempo que ha dedicado en la dirección de este trabajo.

Capítulo 1

Espacio clasificante de un grupo

El espacio clasificante de un grupo G es la clase de homotopía de un espacio topológico $\mathrm{BG}_\bullet$, que más precisamente es un espacio de Kelley.

En este trabajo, el funtor $G \rightsquigarrow \mathrm{BG}_\bullet$ lo definimos como la composición de dos funtores

$$\mathrm{V} : \mathbf{Grp} \to \mathbb{S}_\star \qquad || : \mathbb{S}_\star \to \mathbf{Ke}_\star.$$

Aquí $\mathbb{S}_\star$ y $\mathbf{Ke}_\star$ son las categorías de conjuntos simpliciales punteados y de espacios de Kelley punteados. Por dicho motivo en la sección 1.1 presentamos la categoría de conjuntos simpliciales $\mathbb{S}$, en la sección 1.2 presentamos la categoría de espacios de Kelley $\mathbf{Ke}$ y en la sección 1.3 estudiamos el funtor realización geométrica de conjuntos simpliciales $||$. Vemos que la realización geométrica de un conjunto simplicial punteado es un espacio de Kelley punteado. En la sección 1.4 nos ocupamos de definir el conjunto simplicial VG como el conjunto de órbitas de un conjunto simplicial WG de una acción de G. Luego en la sección 1.5 definimos el espacio clasificante del grupo G y exponemos las propiedadades más importantes. Finalmente en la sección 1.6 probamos que el espacio clasificante está definido a menos de homotopía como el espacio tal que su revestimiento universal X existe, es contráctil y tal que G actúa de manera libre y propiamente discontinua en él.

Existen otras construcciones de modelos del espacio clasificante BG de un grupo G. En [Mil57] se construye un modelo usando "join" de espacios topológicos cuando G es un grupo topológico. En [Hat02] pag. 89 se contruye un $K(G,1)$-espacio y se presenta la notación "bar".

La bibliografía utilizada para las primeras cinco secciones es [GZ67], [ML98], [May92] y [GJ99] y en la sección 6 es [Dol63] y [Ros94].

1.1. Conjuntos simpliciales

En esta sección estudiamos la categoría de conjuntos simpliciales. Para un estudio más profundo se puede consultar [May92] y [GJ99].

1.1.1. La categoría $\mathbb{S}$

Consideremos la categoría $\mathbf{\Delta}$ de los ordinales finitos, cuyos objetos son los conjuntos ordenados $[n] = (\{0, 1, \ldots, n\}, \leq)$ con $n \in \mathbb{N}$, y cuyos morfismos son las funciones monótonas crecientes:

$$\mathrm{Obj}(\mathbf{\Delta}) = \{[n] : n \in \mathbb{N}\} \quad \hom_{\mathbf{\Delta}}([n],[m]) = \{f : [n] \to [m] : si \quad i \leq j \Rightarrow f(i) \leq f(j)\}$$

Definición 1.1.1 (Objeto simplicial)**.** Un objeto simplicial en una categoría $\mathcal{C}$ es un funtor de la categoría opuesta de $\mathbf{\Delta}$ en $\mathcal{C}$:

$$X : \mathbf{\Delta}^{op} \to \mathcal{C}.$$

Definición 1.1.2 (morfismo simplicial)**.** Un morfismo de objetos simpliciales, o morfismo simplicial, de X en Y en una categoría $\mathcal{C}$ es una transformación natural $f : X \to Y$.

Definición 1.1.3 (categoría simplicial)**.** La categoría simplicial $\mathcal{C}^{\mathrm{sim}}$ asociada a $\mathcal{C}$ es la categoría cuyos objetos son los objetos simpliciales en $\mathcal{C}$ y cuyos morfismos son los morfismos simpliciales.

Denotaremos por $\mathbb{S}$ a la categoría de conjuntos simpliciales:

$$\mathbb{S} := \mathbf{Set}^{\mathrm{sim}}.$$

Ejemplo 1.1.4. Sea **Top** la categoría de espacios topológicos y $|\Delta^n|$ el n-símplex topológico estándar en $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$|\Delta^n| = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / \quad \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, \quad t_i \geq 0\}.$$

Dado $\Theta : [n] \to [m]$ definimos $\Theta_* : |\Delta^n| \to |\Delta^m|$ como

$$\Theta_*(t_0, \ldots, t_n) = (s_0, \ldots, s_m) \qquad s_i = \begin{cases} 0 & si \quad \Theta^{-1}(i) = \emptyset \\ \displaystyle\sum_{j \in \Theta^{-1}(i)} t_j & si \quad \Theta^{-1}(i) \neq \emptyset \end{cases}$$

Definimos el funtor $F : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{Top}$:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathrm{Obj}(\mathbf{\Delta}) & \to & \mathrm{Obj}(\mathbf{Top}) \\ & [n] & \mapsto & |\Delta^n| \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} F: & \hom_{\mathbf{\Delta}}([n],[m]) & \to & \hom_{\mathbf{Top}}(|\Delta^n|, |\Delta^m|) \\ & \Theta & \mapsto & \Theta_* \end{array}$$

Observemos que efectivamente si $(t_0, \ldots, t_n) \in |\Delta^n|$ entonces $(s_0, \ldots, s_m) \in |\Delta^m|$ dado que

$$\sum_{i=0}^{m} s_i = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j \in \Theta^{-1}(i)} t_j = \sum_{i=0}^{n} t_j = 1.$$

La función Θ_* es afín y por lo tanto continua.

Dado un espacio topológico A, definimos el conjunto singular asociado a A como el conjunto simplicial definido por

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Sing}(A): & \mathbf{\Delta}^{op} & \to & \mathbf{Set} \\ & [n] & \mapsto & \hom_{\mathbf{Top}}(|\Delta^n|, A), \end{array}$$

en otras palabras $\mathrm{Sing}(A) = \hom_{\mathbf{Top}}(-, A) \circ F$.

Definición 1.1.5 (cocaras y codegeneraciones)**.** Los siguientes endomorfismos de la categoría $\mathbf{\Delta}$ se denominan cocaras

$$d_n^i : [n-1] \to [n]$$
$$d_n^i(m) = \begin{cases} m & si \quad m < i \\ m+1 & si \quad m \geq i \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N} \quad n \neq 0 \quad i \in \{0, \ldots n\}$$

Los siguientes endomorfismos de $\mathbf{\Delta}$ se denominan codegeneraciones

$$s_n^j : [n+1] \to [n]$$
$$s_n^j(m) = \begin{cases} m & si \quad m \leq j \\ m-1 & si \quad m > j \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N} \qquad j \in \{0, \ldots n\}$$

En algunas ocasiones omitiremos los subíndices de las cocaras y codegeneraciones.

Proposición 1.1.6. Las cocaras y codegeneraciones satisfacen las siguientes identidades llamadas identidades cosimpliciales

$$\begin{cases} d^j d^i = d^i d^{j-1} & si \quad i < j \\ s^j d^i = d^i s^{j-1} & si \quad i < j \\ s^j d^j = 1 = s^j d^{j+1} & \\ s^j d^i = d^{i-1} s^j & si \quad i > j+1 \\ s^j s^i = s^i s^{j+1} & si \quad i \leq j \end{cases} \tag{1.1}$$

Demostración: Directo de la definición se verifican las identidades. □

Lema 1.1.7 ([ML98] pag. 177)**.** Sean $f : [n] \to [n']$ un morfismo de la categoría $\mathbf{\Delta}$, h y k tales que

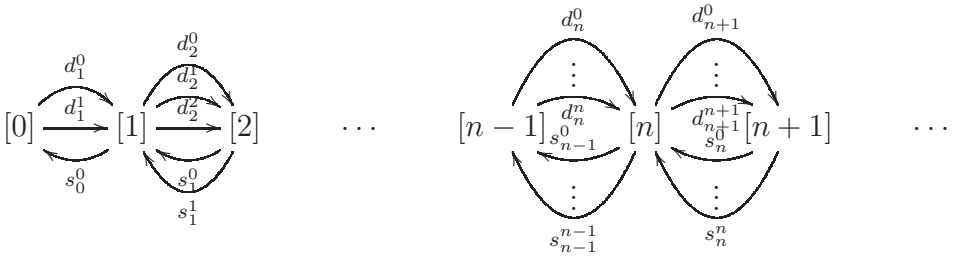
$$n - h + k = n' \qquad n' > i_1 > \ldots > i_k \geq 0 \qquad 0 \leq j_1 < \ldots < j_h < n,$$

entonces f tiene una única representación de la forma

$$f = d^{i_1} \ldots d^{i_k} s^{j_1} \ldots s^{j_h}.$$

□

Lema 1.1.8. La categoría $\mathbf{\Delta}$ es la categoría libre generada por el siguiente grafo sujeta a las relaciones descriptas en (1.1).

$\mathcal{G}:$ 

Es decir, si $\mathcal{D}$ es una categoría y $\varphi : \mathcal{G} \to G_{\mathcal{D}}$ es un morfismo de grafos ($G_{\mathcal{D}}$ denota el grafo asociado a $\mathcal{D}$) tal que en $\mathcal{D}$ se verifican las siguientes igualdades

$$\begin{cases} \varphi(d^j)\varphi(d^i) = \varphi(d^i)\varphi(d^{j-1}) & si \quad i < j \\ \varphi(s^j)\varphi(d^i) = \varphi(d^i)\varphi(s^{j-1}) & si \quad i < j \\ \varphi(s^j)\varphi(d^j) = 1 = \varphi(s^j)\varphi(d^{j+1}) & \\ \varphi(s^j)\varphi(d^i) = \varphi(d^{i-1})\varphi(s^j) & si \quad i > j+1 \\ \varphi(s^j)\varphi(s^i) = \varphi(s^i)\varphi(s^{j+1}) & si \quad i \leq j \end{cases} \tag{1.2}$$

entonces existe un único funtor $F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{D}$ tal que si $\mu : \mathcal{G} \to G_{\mathbf{\Delta}}$ es la inclusión entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\mu} & G_{\mathbf{\Delta}} \\ & \searrow^{\varphi} & \downarrow{\scriptstyle G_F} \\ & & G_{\mathcal{D}} \end{array} \tag{1.3}$$

Análogamente, la categoría Δ^{op} es la categoría libre generada por el grafo $\mathcal{G}^{op}$ sujeta a las relaciones

$$\begin{cases} d_i d_j = d_{j-1} d_i & si \quad i < j \\ d_i s_j = s_{j-1} d_i & si \quad i < j \\ d_j s_j = 1 = d_{j+1} s_j & \\ d_i s_j = s_j d_{i-1} & si \quad i > j+1 \\ s_i s_j = s_{j+1} s_i & si \quad i \leq j \end{cases} \tag{1.4}$$

Demostración: Supongamos que existe $F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{D}$ tal que el diagrama (1.3) conmuta, entonces $F([n]) = F(\mu([n])) = \varphi([n])$. Por el lema 1.1.7 todo morfismo se escribe de manera única como $f = d^{i_1} \dots d^{i_k} s^{j_1} \dots s^{j_h}$, entonces

$$\begin{aligned} F(f) &= F(d^{i_1}) \dots F(d^{i_k}) F(s^{j_1}) \dots F(s^{j_h}) \\ &= F \circ \mu(d^{i_1}) \dots F \circ \mu(d^{i_k}) F \circ \mu(s^{j_1}) \dots F \circ \mu(s^{j_h}) \\ &= \varphi(d^{i_1}) \dots \varphi(d^{i_k}) \varphi(s^{j_1}) \dots \varphi(s^{j_h}) \end{aligned}$$

luego F es único.

Sea $F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{D}$ tal que $F([n]) = \varphi([n])$ y $F(f) = \varphi(d^{i_1}) \dots \varphi(d^{i_k}) \varphi(s^{j_1}) \dots \varphi(s^{j_h})$ cuando $f = d^{i_1} \dots d^{i_k} s^{j_1} \dots s^{j_h}$. Usando las identidades (1.2) se prueba que F es un funtor.

Dado que $\mathbf{\Delta}$ es la categoría generada por $\mathcal{G}$ sujeta a las relaciones (1.1), $\mathbf{\Delta}^{op}$ es la categoría generada por $\mathcal{G}^{op}$ sujeta a las relaciones opuestas a las relaciones (1.1) que son las descriptas en (1.4). □

Observación 1.1.9. Del lema 1.1.8 concluimos que, para dar un conjunto simplicial es suficiente definir conjuntos de n-simplices X_n para $n \in \mathbb{N}$, caras

$$X(d^i) = \tilde{d}_i : X_n \to X_{n-1} \quad 0 \leq i \leq n$$

y degeneraciones

$$X(s^j) = \tilde{s}_j : X_n \to X_{n+1} \quad 0 \leq j \leq n$$

que satisfagan las identidades simpliciales descriptas en (1.4).

Ejemplo 1.1.10. Definimos el n-símplex estándar en $\mathbb{S}$ como

$$\Delta^n := \hom_{\mathbf{\Delta}}(-, [n])$$

Definición 1.1.11 (Inmersión de Yoneda)**.** Dada una categoría $\mathcal{C}$ definimos el funtor de Yoneda o inmersión de Yoneda de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccll} Y: & \mathcal{C} & \to & \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}) & \\ & c & \mapsto & \hom_{\mathcal{C}}(-, c) & c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \\ & \alpha & \mapsto & \hom_{\mathcal{C}}(-, \alpha) & \alpha \in \hom_{\mathcal{C}}(a, b) \end{array} .$$

Lema 1.1.12 (Lema de Yoneda)**.** ([ML98] pag. 61) Sea $\mathcal{D}$ una categoría. Si $K : \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ es un funtor y $r \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ entonces la siguiente aplicación es una biyección natural

$$\begin{array}{rccc} \tau_r: & \mathrm{Nat}(\hom_{\mathcal{D}}(r, -), K) & \to & K(r) \\ & \mu & \mapsto & \mu_r(\mathrm{id}_r). \end{array}$$

□

Observación 1.1.13. Si consideramos el caso particular del lema 1.1.12 con $\mathcal{D} = \mathbf{\Delta}^{op}$, tenemos que

$$\mathrm{Nat}(\hom_{\mathbf{\Delta}^{op}}([n], -), K) = \hom_{\mathbb{S}}(\hom_{\mathbf{\Delta}}(-, [n]), K) = \hom_{\mathbb{S}}(\Delta^n, K)$$

entonces para todo conjunto simplicial X se cumple que $\hom_{\mathbb{S}}(\mathbf{\Delta}^n, X) \cong X_n$, y la biyección está dada por $\tau_n : \hom_{\mathbb{S}}(\Delta^n, X) \to X_n$, $\tau_n(\sigma) = \sigma_n(\mathrm{id}_{[n]})$. Que τ sea una biyección natural quiere decir que si tenemos un morfismo en $\mathbf{\Delta}$, $\alpha : [n] \to [m]$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \hom_{\mathbb{S}}(\Delta^n, X) & \xrightarrow{\tau_n} & X_n \\ {\scriptstyle \alpha^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle X(\alpha)} \\ \hom_{\mathbb{S}}(\Delta^m, X) & \xrightarrow[\tau_m]{} & X_m \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Delta(\alpha)(f) = \alpha \circ f \\ \alpha^*(\sigma) = \sigma \circ \Delta(\alpha) \end{array}$$

De esta manera podemos ver a un n-símplex x como un morfismo simplicial $\tilde{x} : \Delta^n \to X$ al cual denominaremos símplex singular asociado a x.

Definición 1.1.14 (símplex degenerado)**.** Sean X un conjunto simplicial y $x \in X_m$ un m-símplex de X. Decimos que x es degenerado si existen un epimorfismo $s : [m] \to [n]$ en $\mathbf{\Delta}$ con $n < m$ y un n-símplex y tales que

$$x = X(s)(y).$$

Si X es un conjunto simplicial denotamos por NX_n al conjunto de n-símplices no degenerados.

Proposición 1.1.15 (Lema de Eilenberg-Zilber)**.** Para $x \in X_m$, existen un epimorfismo $s : [m] \to [n]$ en $\mathbf{\Delta}$ y un n-símplex no degenerado y tales que $x = X(s)(y)$. Además, el par (s, y) es único.

Demostración: : Si x es degenerado, la existencia de s y de y está garantizada por definición. Si x es no degenerado entonces podemos escribir $x = X(\mathrm{id})(x)$, luego alcanza tomar $y = x$ y $s = \mathrm{id}$. Veamos la unicidad. Supongamos que (s, y) y (s', y') verifican las condiciones del enunciado

$$\begin{array}{ll} s : [m] \to [n] & s' : [m] \to [n'] \\ x = X(s)(y) & x = X(s')(y'). \end{array}$$

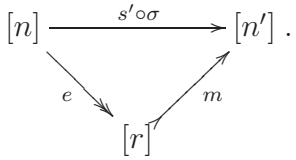
Sean σ y σ' secciones en $\mathbf{\Delta}$ de s y s' respectivamente, luego

$$\begin{array}{c} y = X(s \circ \sigma)(y) = X(\sigma)X(s)(y) = X(\sigma)(x) \\ y' = X(s' \circ \sigma')(y') = X(\sigma')X(s')(y') = X(\sigma')(x) \end{array}$$

entonces

$$y = X(\sigma)(x) = X(\sigma)X(s')(y') = X(s' \circ \sigma)(y').$$

Sean $[r]$ la imagen de $s' \circ \sigma$, $e = s' \circ \sigma$ y m la inclusión de $[r]$ en $[n']$. Podemos factorizar $s' \circ \sigma$ de la siguiente manera



Entonces

$$y = X(m \circ e)(y') = X(e)(X(m)(y')),$$

como y es no degenerado y e es un epimorfismo, $r = n$ y $e = \mathrm{id}$. Por lo tanto $m = s' \circ \sigma$ y $s' \circ \sigma$ es un monomorfismo. Entonces $n' \geq n$. Análogamente se prueba que $n \geq n'$ y resulta $n = n'$. Luego $s' \circ \sigma$ es una biyección y por lo tanto $s' \circ \sigma = \mathrm{id}_{[n]}$ entonces $y = X(s' \circ \sigma)(y') = X(\mathrm{id})(y') = y'$. Sea $i \in [m]$ y σ una sección de s tal que $\sigma \circ s(i) = i$ entonces

$$s(i) = s \circ \sigma s(i) = s' \circ \sigma \circ s(i) = s'(i)$$

luego $s = s'$. □

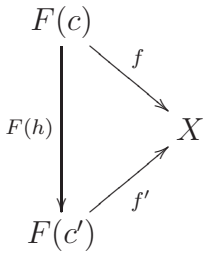
1.1.2. Categoría simpleja ($\mathbf{\Delta} \downarrow X$)

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías y $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la categoría cuyos objetos son los funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y cuyos morfismos son las transformaciones naturales. Observar que $\mathcal{C}^{\mathrm{sim}} = \mathrm{Fun}(\Delta^{op}, \mathcal{C})$.

Definición 1.1.16 (Categoría coma)**.** Sean $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor y X un objeto de $\mathcal{D}$. Definimos la categoría coma $F \downarrow X$, de la siguiente manera: A nivel de objetos,

$$\mathrm{Obj}(F \downarrow X) = \{(c, f) : c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \quad y \quad f : F(c) \to X\}$$

y un morfismo en $\hom_{F\downarrow X}((c, f), (c', f'))$ es un morfismo $h : c \to c'$ en $\mathcal{C}$ tal que el diagrama conmuta



Definición 1.1.17 (funtor constante)**.** Definimos el funtor constante $\delta : \mathcal{D} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ de la siguiente manera:

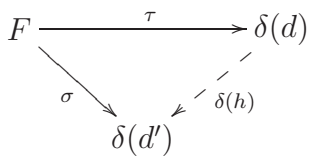
- A nivel de objetos, si $d \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ entonces $\delta(d) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor tal que

  $$\delta(d)(c) = d \quad \forall c \in \mathcal{C}$$

  y si $f \in \hom_{\mathcal{C}}(c, c')$ entonces $\delta(d)(f) = \mathrm{id}_d$.

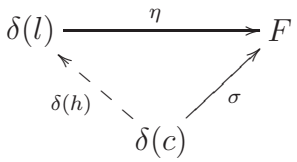
- A nivel de morfismos, si $h \in \hom_{\mathcal{D}}(d, d')$ entonces $\delta(h) : \delta(d) \to \delta(d')$ es la transformación natural tal que $\delta(h)_c = h$ para todo c.

Definición 1.1.18 (Colímite de un funtor)**.** Un colímite para un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es el objeto inicial de la categoría $\delta \downarrow F$. En otras palabras, es un par (d, τ) siendo d un objeto de $\mathcal{D}$ y $\tau : F \to \delta(d)$ una transformación natural tales que para toda transformación natural $\sigma : F \to \delta(d')$, existe un único morfismo $h : d \to d'$ tal que el siguiente diagrama conmuta



Decimos que $\mathcal{D}$ es cocompleta o que tiene colímites, si para cada categoría pequeña $\mathcal{C}$ todo funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tiene colímites. En general, si $\mathcal{D}$ tiene colímites, $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ también y el colímite se calcula puntualmente. Es decir, si $F : J \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ es un funtor entonces $(\mathrm{colim}_J F_j)(c) = \mathrm{colim}_J(F_j(c))$. Es bien sabido que **Set** y **Top** tienen colímites, luego $\mathbb{S} = \mathrm{Fun}(\mathbf{\Delta}^{op}, \mathbf{Set})$ tiene colímites.

Definición 1.1.19 (Límite)**.** Un límite para un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un colímite para $F^{op} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}^{op}$. En otras palabras, es un par (l, η) siendo l un objeto de $\mathcal{D}$ y $\eta : \delta(l) \to F$ una transformación natural tales que si $\sigma : \delta(c) \to F$ es otra transformación natural, existe un único morfismo $h : c \to l$ en $\mathcal{C}$ tal que el diagrama conmuta



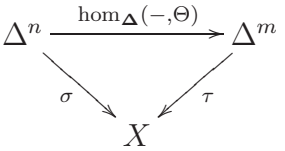
Decimos que $\mathcal{D}$ es completa o que tiene límites, si para cada categoría pequeña $\mathcal{C}$ todo funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tiene límites.

Definición 1.1.20 (categoría simpleja)**.** Si X es un conjunto simplicial e Y el funtor de Yoneda para $\mathcal{C} = \mathbf{\Delta}$, definimos la categoría simpleja $\mathbf{\Delta} \downarrow X$ como la categoría coma $Y \downarrow X$.

Explícitamente,

$$\mathrm{Obj}(\mathbf{\Delta} \downarrow X) = \{([n], \sigma) : n \in \mathbb{N}, \quad \sigma \in \hom_{\mathbb{S}}(\Delta^n, X)\}$$

$$\Theta \in \hom_{\mathbf{\Delta}\downarrow X}(([n], \sigma), ([m], \tau)) \iff \Theta : [n] \to [m] \quad \text{tal que}$$



Observación 1.1.21. Teniendo en cuenta la observación 1.1.13 podemos interpretar la categoría $\mathbf{\Delta} \downarrow X$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Obj}(\mathbf{\Delta} \downarrow X) &= \{([n], \sigma) : n \in \mathbb{N}, \quad \sigma \in \hom_{\mathbb{S}}(\Delta^n, X)\} \\
&= \{([n], \tau_n^{-1}(x)) : n \in \mathbb{N}, \quad x \in X_n\} \\
&\cong \{([n], x) : n \in \mathbb{N}, \quad x \in X_n\} \\
&= \coprod_{n\in\mathbb{N}} X_n
\end{aligned}$$

Un elemento de $\hom_{\mathbf{\Delta}\downarrow X}(([n], \sigma), ([m], \eta))$ es un morfismo $\theta : [n] \to [m]$ tal que $\eta \circ \Delta(\theta) = \sigma$. Dada la biyección natural definida por τ, sabemos que para todo $x \in X_n$ e $y \in X_m$ existen σ, η tales que $\tau_n(\sigma) = x$ y $\tau_m(\eta) = y$. Además por la naturalidad de τ tenemos que $\tau_n \circ \theta^* = X(\theta) \circ \tau_m$, entonces

$$\begin{aligned}
&\theta : [n] \to [m] \text{ es tal que } \eta \circ \Delta(\theta) = \sigma && \Leftrightarrow \\
&\theta : [n] \to [m] \text{ es tal que } \tau_n(\eta \circ \Delta(\theta)) = \tau_n(\sigma) && \Leftrightarrow \\
&\theta : [n] \to [m] \text{ es tal que } \tau_n(\eta \circ \Delta(\theta)) = (\tau_n \circ \theta^*)(\eta) = (X(\theta) \circ \tau_m)(\eta) = \tau_n(\sigma) && \Leftrightarrow \\
&\theta : [n] \to [m] \text{ es tal que } X(\theta)(y) = x
\end{aligned}$$

Luego

$$\hom_{\mathbf{\Delta}\downarrow X}(([n], x), ([m], y)) = \{\theta : [n] \to [m] : X(\theta)(y) = x\}.$$

Lema 1.1.22 ([ML98] pag 76)**.** Sea X un conjunto simplicial. Consideramos el funtor

$$T_X : \mathbf{\Delta} \downarrow X \to \mathbb{S}$$

el cual a nivel de objetos lo definimos

$$([n], x) \mapsto \Delta^n$$

y a nivel de morfismos

$$\theta : [n] \to [m] \mapsto \ \Delta^n \xrightarrow{\hom_{\mathbf{\Delta}}(-,\Theta)} \Delta^m \ .$$

Si denotamos por $\underset{\mathbf{\Delta}\downarrow X}{\operatorname{colim}}\Delta^k$ al colímite del funtor T_X entonces

$$X = \underset{\mathbf{\Delta}\downarrow X}{\operatorname{colim}}\Delta^k.$$

□

1.1.3. Homotopía simplicial

Definición 1.1.23 (homotopía de morfismos simpliciales)**.** Decimos que dos morfismos simpliciales, $f, g : X \to Y$, son estrictamente homotópicos y lo denotamos por $f \simeq g$, si existe un morfismo simplicial $h : X \times \Delta^1 \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X \times \Delta^0 = X & & \\ \downarrow{\scriptstyle 1\times d_1^1} & \searrow^{f} & \\ X \times \Delta^1 & \xrightarrow{h} & X \\ \uparrow{\scriptstyle 1\times d_1^0} & \nearrow_{g} & \\ X \times \Delta^0 = X & & \end{array}$$

Decimos que h es una homotopía simplicial estricta entre f y g.

Definición 1.1.24 (homotopía de conjuntos simpliciales)**.** Decimos que dos conjuntos simpliciales, X e Y, son estrictamente homotópicamente equivalentes y lo denotamos por $X \simeq Y$, si existen $\varphi : X \to Y$ y $\psi : Y \to X$ morfismos simpliciales tales que $\varphi \circ \psi \simeq \mathrm{id}_Y$ y $\psi \circ \varphi \simeq \mathrm{id}_X$.

Definición 1.1.25 (contráctil)**.** Un conjunto simplicial X es contráctil si $X \simeq \Delta^0$.

1.1.4. Morfismos simpliciales triviales y localmente triviales

Definición 1.1.26 (producto fibrado)**.** El producto fibrado del siguiente diagrama en $\mathbb{S}$

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow[g]{} & X \end{array}$$

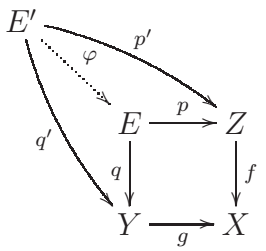
es el límite del mismo. Es decir, es un conjunto simplicial E y dos morfismos simpliciales p y q tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & Z \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow[g]{} & X \end{array}$$

conmuta y si E', p' y q' son tales que

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{p'} & Z \\ {\scriptstyle q'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow[g]{} & X \end{array}$$

conmuta entonces existe un único $\varphi : E' \to E$ tal que



también conmuta. Notamos a $E = Y \underset{g,f}{\times} Z = f^{-1}(Y)$. Se prueba que $E_n = \{(y, z) \in Y_n \times Z_n : g_n(y) = f_n(z)\}$, $p_n = \mathrm{pr}_{Z_n} : E_n \to Z_n$ y $q_n = \mathrm{pr}_{Y_n} : E_n \to Y_n$.

Definición 1.1.27 (morfismo simplicial trivial)**.** Un morfismo simplicial $f : Y \to X$ es trivial si existen un conjunto simplicial F y un isomorfismo $\alpha : X \times F \to Y$ tales que $\mathrm{pr}_1 = f \circ \alpha$ siendo pr_1 la proyección en la primera coordenada,

$$\begin{array}{ccc} X \times F & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & X\,. \\ & {\scriptstyle\alpha}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle f} & \\ & Y & \end{array}$$

Decimos que F es la fibra de f.

Observación 1.1.28. Sea $f : Y \to X$ un morfismo simplicial trivial. Si $x \in X_0$ y $\tilde{x} : \Delta^0 \to X$ es el morfismo simplicial asociado, entonces $f^{-1}(x) = \Delta^0 \underset{\tilde{x},f}{\times} Y$ es isomorfo a la fibra F de f.

Demostración: Como f es trivial, los productos fibrados de los siguientes diagramas son isomorfos

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \Delta^0 & \xrightarrow[\tilde{x}]{} & X \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & & X \times F \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ \Delta^0 & \xrightarrow[\tilde{x}]{} & X \end{array}$$

luego $f^{-1}(x)$ es isomorfo a F. □

Definición 1.1.29 (morfismo simplicial localmente trivial)**.** Sea un morfismo simplicial $f : Y \to X$. Sean $\sigma \in X_n$ y $\tilde{\sigma} : \Delta^n \to X$ el simplex singular asociado. Definimos $f^{-1}(\sigma) = \Delta^n \underset{\tilde{\sigma},f}{\times} Y$ y denotamos por $p_\sigma : f^{-1}(\sigma) \to \Delta^n$ a la proyección en la primera coordenada. Decimos que f es localmente trivial si p_σ es un morfismo trivial para todo σ.

Si f es localmente trivial y las fibras de los morfismos p_σ son todas isomorfas, decimos que esa clase de isomorfismos es la fibra de f.

1.2. Espacios de Kelley

La categoría **Ke** de espacios de Kelley, o de espacios compactamente generados, es una subcategoría plena de **Top**. Los espacios de **Ke** tienen la característica de ser colímite de sus subespacios compactos. Ésto hace que la categoría **Ke** tenga propiedades que **Top** no, ver la proposición 1.2.14.

1.2.1. La categoría Ke

Definición 1.2.1 (Espacio de Kelley)**.** Un espacio topológico de Hausdorff es un espacio de Kelley si todo $F \subseteq X$ cumple que si $F \cap C$ es cerrado para todo C compacto entonces F es cerrado.

Ejemplo 1.2.2. Un espacio localmente compacto X (i.e. todo punto tiene un entorno compacto) de Hausdorff es un espacio de Kelley. En efecto, sea F tal que su intersección con cualquier compacto es cerrada. Si x un punto de la clausura de F, consideramos una red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq F$ tal que $x_\lambda \underset{\lambda}{\to} x$. Sea C un entorno compacto de x y sea $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que si $\lambda \geq \lambda_0$, $x_\lambda \in C$. Luego $x \in \overline{F \cap C} = F \cap C$ porque $F \cap C$ es cerrado. Así que $x \in F$ y F es un conjunto cerrado.

Observación 1.2.3. Si X es localmente compacto de Hausdorff entonces todo punto de X tiene una base de entornos compactos.

DEMOSTRACIÓN: Sea $x \in X$, alcanza con probar que si U es un entorno de x entonces existe un entorno compacto K tal que $K \subset U$. Sean V un entorno compacto de x y U un entorno de x el cual podemos considerar en V (de lo contrario tomamos $U \cap \overset{\circ}{V}$). Como V es compacto y de Hausdorff entonces es normal, entonces por el lema de Urysohn (lema A.1) existe $f : V \to [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f = 0$ en $V \setminus U$. El conjunto $W = f^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$ es cerrado en V, y como V es de Hausdorff, W es compacto. Además $W \subseteq U$ que era lo que queríamos demostrar.

Observación 1.2.4.

1. La unión disjunta de espacios de Kelley es un espacio de Kelley.

2. Un subespacio cerrado de un espacio de Kelley es un espacio de Kelley.

3. Si X es un espacio de Kelley y $X/\sim$ es de Hausdorff, entonces $X/\sim$ es un espacio de Kelley.
   DEMOSTRACIÓN: Sea $F \subseteq X/\sim$ tal que $F \cap K$ es cerrado en $X/\sim$ para todo K compacto de $X/\sim$. Sean C un compacto de X y $p : X \to X/\sim$ la proyección. Como $p(C)$ es compacto, $F \cap p(C)$ es cerrado, entonces $p^{-1}(F) \cap p^{-1}(p(C)) = p^{-1}(F \cap p(C))$ es cerrado en X. Como $C \subseteq p^{-1}(p(C))$ tenemos

   $$p^{-1}(F) \cap C = C \cap p^{-1}(p(C)) \cap p^{-1}(F) = C \cap p^{-1}(p(C) \cap F)$$

   y además $C \cap p^{-1}(p(C) \cap F)$ es cerrado por ser intersección de dos cerrados, entonces $p^{-1}(F) \cap C$ es cerrado. Por ser X de Kelley $p^{-1}(F)$ es cerrado, entonces F es cerrado en $X/\sim$.

Sea **Ke** la subcategoría plena de **Top**, cuyos objetos son los espacios de Kelley.

1.2.2. Funtor Ke

Dado Y un espacio de Hausdorff, definimos $Y_{\mathbf{Ke}}$ como el espacio topológico que como conjunto es el mismo que Y y los cerrados son los $F \subseteq Y$ tales que $F \cap C$ es cerrado en Y para todo compacto de C en Y.

Si F es cerrado en Y y C es un compacto en Y, al ser Y de Hausdorff entonces $F \cap C$ es cerrado en Y, luego F es cerrado en $Y_{\mathbf{Ke}}$. Entonces la topología de $Y_{\mathbf{Ke}}$ es más fina que la de Y. Luego $\mathrm{id}_Y : Y_{\mathbf{Ke}} \to Y$ es continua e $Y_{\mathbf{Ke}}$ es de Hausdorff.

Veamos que $Y_{\mathbf{Ke}}$ es de Kelley. Sea $A \subseteq Y_{\mathbf{Ke}}$ compacto; como la topología en $Y_{\mathbf{Ke}}$ es más fina que la de Y, A es compacto en Y. Sea $F \subseteq Y_{\mathbf{Ke}}$ tal que $F \cap A$ es cerrado en $Y_{\mathbf{Ke}}$, entonces $F \cap A \cap A = F \cap A$ es cerrado en Y. Luego F es cerrado en $Y_{\mathbf{Ke}}$ y por lo tanto $Y_{\mathbf{Ke}}$ es de Kelley.

Si $f : X \to Y$ es una función continua de espacios de Hausdorff, definimos $f_{\mathbf{Ke}} : X_{\mathbf{Ke}} \to Y_{\mathbf{Ke}}$ como la misma función f. Para ver que $f_{\mathbf{Ke}}$ es continua, alcanza ver que si tenemos una función continua $g : Z \to Y$, con Z de Kelley e Y de Hausdorff, y $F \subseteq Y$ cerrado en $Y_{\mathbf{Ke}}$, entonces $g^{-1}(F)$ es cerrado en Z. Sea F un cerrado en $Y_{\mathbf{Ke}}$ y K compacto

de Y, entonces $F \cap K$ es cerrado en Y luego $g^{-1}(F \cap K) = g^{-1}(F) \cap g^{-1}(K)$ es cerrado en Z. Sea C compacto de Z, como $g(C)$ es compacto en Y entonces es cerrado en $Y_{\mathbf{Ke}}$. Considerando $K = g(C)$ y viendo que

$$g^{-1}(F) \cap C = g^{-1}(F) \cap C \cap g^{-1}(g(C)) = C \cap g^{-1}(F \cap g(C))$$

concluimos que $g^{-1}(F) \cap C$ es cerrado, ya que C es compacto y $g^{-1}(F \cap g(C))$ es cerrado. Luego como Z es de Kelley $g^{-1}(F)$ es cerrado.

Denotemos por **Hff** a la subcategoría plena de **Top** formada por los espacios de Hausdorff. Hemos probado que las asignaciones siguientes definen un funtor

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ke}: & \mathbf{Hff} & \to & \mathbf{Ke} \\ & X & \mapsto & X_{\mathbf{Ke}} \\ & f & \mapsto & f_{\mathbf{Ke}}. \end{array}$$

Observación 1.2.5. Si Y es de Kelley entonces $Y = Y_{\mathbf{Ke}}$.

Observación 1.2.6. Consideramos $\iota : \mathbf{Ke} \to \mathbf{Hff}$, el funtor inclusión. Como

$$\hom_{\mathbf{Hff}}(\iota(Z), Y) = \hom_{\mathbf{Top}}(Z, Y) = \hom_{\mathbf{Top}}(Z, Y_{\mathbf{Ke}}) = \hom_{\mathbf{Ke}}(Z, Y_{\mathbf{Ke}}) \tag{1.5}$$

el funtor ι es adjunto a izquierda de Ke.

Proposición 1.2.7. ([ML98] pag. 182) La categoría **Ke** es completa y cocompleta. □

Proposición 1.2.8. Un abierto de un espacio de Kelley es un espacio de Kelley.

Demostración: Sea X un espacio de Kelley. Si K recorre los compactos de X entonces

$$X = \operatorname*{colim}_{K \subseteq X} K.$$

Luego si $U \subseteq X$ es un abierto entonces

$$U = X \cap U = (\operatorname{colim} K) \cap U = \operatorname{colim}(K \cap U).$$

Como K es compacto y de Hausdorff, por la observación 1.2.3 todo punto de K tiene una base de entornos compactos. Luego todo punto de $K \cap U$ tiene una base de entornos compactos, luego $K \cap U$ es localmente compacto. En particular es un espacio de Kelley y como **Ke** tiene colímites, U es un espacio de Kelley. □

Definición 1.2.9 (Topología compacto-abierta)**.** Sean Y y Z espacios topológicos, K un compacto de Y y U un abierto de Z, definimos en

$$CO(Y, Z) = \{f : Y \to Z : \ f \text{ es continua}\}$$

la topología compacto-abierta que tiene como sub-base a los siguientes subconjuntos

$$M(K, U) = \{f : Y \to Z : f(K) \subseteq U\}.$$

Proposición 1.2.10. Si Y es de Hausdorff y localmente compacto, entonces:

1. La evaluación
$$\begin{array}{rccc} ev: & CO(Y,X)\times Y & \to & X \\ & (f,y) & \mapsto & f(y) \end{array}$$
es una función continua.

2. Una función $f: Y\times Z\to X$ es continua si y sólo si $\hat{f}: Z\to CO(Y,X)$, $\hat{f}(z)(y)=f(y,z)$ es continua.

Demostración:

1. Sean $(f,y)\in CO(Y,X)\times Y$ y $U\subseteq X$ entorno abierto de $f(y)$. Como Y es localmente compacto y f es continua, existe un entorno compacto K de y en Y tal que $f(K)\subseteq U$. Entonces $M(K,U)\times K$ es un entorno de (f,y) en $CO(Y\times X)\times Y$ tal que $ev(M(K,U)\times K)\subseteq U$, entonces ev es continua.

2. Supongamos $f: Y\times Z\to X$ continua. Claramente $\hat{f}(z)$ es continua ya que $f: Y\times\{z\}\to X$ es continua para todo $z\in Z$. Para ver que $\hat{f}: Z\to CO(Y,X)$ es continua, alcanza probar que $\hat{f}^{-1}(M(K,U))$ es abierto para todo $K\subseteq Y$ compacto y $U\subseteq X$ abierto. Sea $z\in\hat{f}^{-1}(M(K,U))=\{z\in Z: f(K,z)\subseteq U\}$. Entonces $f^{-1}(U)$ es un entorno abierto de $K\times\{z\}$, luego para todo $k\in K$ existen abiertos $V_k\subseteq Y$ y $W_k\subseteq Z$ tales que $\{k\}\times\{z\}\subseteq V_k\times W_k\subseteq f^{-1}(U)$. Como K es compacto y $\{V_k\}_{k\in K}$ es un cubrimiento, existe un subcubrimiento finito $V_{k_1}\dots V_{k_n}$. Sean
$$V=\bigcup_{i=1}^{n}V_{k_i}\qquad W=\bigcap_{i=1}^{n}W_{k_i}$$
Como $K\subseteq V$ y $z\in W_{k_i}$ para todo $i=1,\dots n$, $K\times\{z\}\subseteq V\times W$. Observemos que si $(v,w)\in V\times W$ entonces existe i tal que $v\in V_{k_i}$ luego
$$(v,w)\in V_{k_i}\times W_{k_i}\subseteq f^{-1}(U)\Rightarrow K\times\{z\}\subseteq V\times W\subseteq f^{-1}(U)$$
Luego W es un entorno de z tal que $W\subseteq\hat{f}^{-1}(M(K,U))$ ya que $\hat{f}(W)(K)=f(K,W)\subseteq f(V,W)\subseteq U$, entonces $\hat{f}$ es continua. Observar que hasta ahora no hemos usado la hipótesis de que Y es localmente compacto. Reciprocamente, si $\hat{f}: Z\to CO(Y,X)$ es continua e Y es localmente compacto entonces $f=ev\circ(\mathrm{id}\times\hat{f})$ es continua por ser composición de funciones continuas
$$f:\ Y\times Z\xrightarrow[id\times\hat{f}]{}Y\times CO(Y,X)\xrightarrow[ev]{}X\ .$$

□

Observación 1.2.11. Si X, Y y Z son espacios topológicos con Y localmente compacto de Hausdorff, entonces tenemos biyecciones inversas dadas por

$$\begin{array}{lcl} \hom_{\mathbf{Top}}(X \times Y, Z) & \overset{\cong}{\leftrightarrow} & \hom_{\mathbf{Top}}(X, CO(Y,Z)) \\ f : X \times Y \to Z & \to & g : X \to CO(Y,Z) \\ & & g(x)(y) = f(x,y) \\ f : X \times Y \to Z & \leftarrow & g : X \to CO(Y,Z) \\ f(x,y) = g(x)(y) & & \end{array}$$

En otras palabras, el funtor $X \rightsquigarrow X \times Y$ es adjunto a izquierda del funtor $Z \rightsquigarrow CO(Y,Z)$, por lo tanto el funtor $X \rightsquigarrow X \times Y$ conmuta con los colímites. Es decir, si I es una categoría pequeña y $F : I \to \mathbf{Top}$ es un funtor entonces

$$(\operatorname{colim}_{i \in I} F(i)) \times Y \cong \operatorname{colim}_{i \in I}(F(i) \times Y)$$

Proposición 1.2.12. Si $X \in \mathbf{Ke}$ e Y es localmente compacto de Hausdorff entonces $X \times Y = (X \times Y)_{\mathbf{Ke}}$

Demostración: Como X es un espacio de Kelley, si K recorre los compactos de X tenemos que $X = \operatorname{colim}_{K \subseteq X} K$. Entonces

$$\begin{array}{rcll} X \times Y & = & (\operatorname{colim}_{K \subseteq X} K) \times Y & \\ & = & \operatorname{colim}_{K \subseteq X}(K \times Y) & \text{por 1.2.11} \end{array}$$

Al ser $K \times Y$ localmente compacto de Hausdorff es de Kelley, entonces $X \times Y$ es un espacio de Kelley por ser colímite de espacios de Kelley. Entonces por observación 1.2.5

$$(X \times Y)_{\mathbf{Ke}} = X \times Y.$$

□

Observación 1.2.13. Si Y es un espacio de Kelley e Y' recorre los compactos de Y, entonces

$$CO(Y,Z) = \lim_{Y' \subset Y} CO(Y', Z).$$

Demostración: Como Y es un espacio de Kelley tenemos que $Y = \operatorname{colim}_{Y' \subset Y} Y'$. Luego

$$\hom_{\mathbf{Top}}(Y,Z) = \lim_{Y' \subset Y} \hom_{\mathbf{Top}}(Y', Z) \qquad \text{[ML98] pag. 113.}$$

La función $\eta_{Y'} : CO(Y,Z) \to CO(Y',Z)$ $\eta_{Y'}(f) = f|_{Y'}$ es continua porque $\eta_{Y'}^{-1}(M(K,U)) = M(K,U)$ para todo compacto K de Y' y abierto U de Z. Si X es un espacio topológico y $\sigma : \delta(X) \to CO(-,Z)$ es una transformación natural, existe una única función $\mu : X \to CO(Y,Z)$ tal que para todo Y' compacto de Y el siguiente diagrama conmuta en **Set**,

$$\begin{array}{ccc} CO(Y,Z) & \xrightarrow{\eta_{Y'}} & CO(Y',Z)\,. \\ & {\scriptstyle \mu} \nwarrow \quad \nearrow {\scriptstyle \sigma_{Y'}} & \\ & X & \end{array} \tag{1.6}$$

Para ver que μ es continua observemos que para todo $M(K,U)$ el conjunto

$$\mu^{-1}(M(K,U)) = \mu^{-1}(\eta_K^{-1}(M(K,U))) = \sigma_K^{-1}(M(K,U))$$

es abierto por ser σ_K es continua. Concluimos que el diagrama (1.6) conmuta en **Top** y si Y' recorre los compactos de Y entonces

$$CO(Y,Z) = \lim_{Y' \subset Y} CO(Y',Z).$$

□

Proposición 1.2.14. Sea Y un espacio de Kelley. En la categoría **Ke**, el funtor $X \rightsquigarrow (X \times Y)_{\mathbf{Ke}}$ es adjunto a izquierda del funtor $Z \rightsquigarrow (CO(Y,Z))_{\mathbf{Ke}}$. Luego el funtor $X \rightsquigarrow (X \times Y)_{\mathbf{Ke}}$ conmuta con colímites.

Demostración: Sean X, Y y Z espacios de Kelley. Si K recorre los compactos de $(X \times Y)_{\mathbf{Ke}}$ entonces

$$(X \times Y)_{\mathbf{Ke}} = \operatorname{colim}_{K \subset (X \times Y)_{\mathbf{Ke}}} K.$$

Todo compacto K de $(X \times Y)_{\mathbf{Ke}}$ es un compacto de $X \times Y$ y a su vez está contenido en $\pi_X(K) \times \pi_Y(K)$, siendo π_X y π_Y las proyecciones. Por este motivo si X' recorre los compactos de X e Y' recorre los compactos de Y entonces

$$(X \times Y)_{\mathbf{Ke}} = \operatorname{colim}_{\substack{X' \subset X \\ Y' \subset Y}} X' \times Y'.$$

Finalmente tenemos

$$\begin{array}{rcll}
\hom_{\mathbf{Ke}}((X \times Y)_{\mathbf{Ke}}, Z) & \simeq & \hom_{\mathbf{Top}}(\operatorname{colim}_{X',Y'} X' \times Y', Z) & \\
& \cong & \lim_{X',Y'} \hom_{\mathbf{Top}}(X' \times Y', Z) & \\
& \cong & \lim_{X',Y'} \hom_{\mathbf{Top}}(X', CO(Y',Z)) & \text{por 1.2.10} \\
& \cong & \lim_{X'} \hom_{\mathbf{Top}}(X', \lim_{Y'} CO(Y',Z)) & \\
& \cong & \lim_{X'} \hom_{\mathbf{Top}}(X', CO(Y,Z)) & \text{por 1.2.13} \\
& \cong & \hom_{\mathbf{Top}}(\operatorname{colim}_{X'} X', CO(Y,Z)) & \\
& \cong & \hom_{\mathbf{Top}}(X, CO(Y,Z)) & \\
& \cong & \hom_{\mathbf{Ke}}(X, (CO(Y,Z))_{\mathbf{Ke}}) & \text{por 1.2.6.}
\end{array}$$

□

Observación 1.2.15. Sean X, B y B' espacios de Kelley y $\xi : X \to B$ y $f : B' \to B$ funciones continuas. Observar que si consideramos el siguiente diagrama cartesiano en **Top**

$$\begin{array}{ccc}
f^{-1}(X) & \xrightarrow{p_B} & B \\
{\scriptstyle p_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
X & \xrightarrow[\xi]{} & B'
\end{array}$$

el siguiente es un diagrama cartesiano en **Ke**,

$$\begin{array}{ccc} (f^{-1}(X))_{\mathbf{Ke}} & \xrightarrow{p_B} & B \\ {\scriptstyle p_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X & \xrightarrow[\xi]{} & B' \end{array} .$$

Definición 1.2.16 (cambio de base)**.** Sean B un espacio de Kelley e Y el funtor de Yoneda para $\mathcal{C} = \mathbf{Ke}$. Consideramos $\mathbf{Ke} \downarrow \mathbf{B}$ la categoría coma $Y \downarrow B$. Si B' es otro espacio de Kelley y $f : B' \to B$ es una función continua definimos el cambio de base definido por f al siguiente funtor

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{Ke} \downarrow \mathbf{B} & \longrightarrow & \mathbf{Ke} \downarrow \mathbf{B'} \\ \xi : X \to B & \rightsquigarrow & \mathrm{pr}_{B'} : (f^{-1}(X))_{\mathbf{Ke}} \to B' \\ \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\xi} & B \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \nearrow_{\eta} & \\ Y & & \end{array} & \rightsquigarrow & \begin{array}{ccc} (f^{-1}(X))_{\mathbf{Ke}} & \xrightarrow{\mathrm{pr}_{B'}} & B' \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\underset{B}{\times} g}\downarrow & \nearrow_{\mathrm{pr}_{B'}} & \\ (f^{-1}(Y))_{\mathbf{Ke}} & & \end{array} \end{array}$$

Proposición 1.2.17 ([GZ67] pag. 48)**.** Sean B un espacio de Kelley, $f : B' \to B$ un objeto de $\mathbf{Ke} \downarrow \mathbf{B}$, $\iota : \mathbf{Ke} \to \mathbf{Top}$ el funtor inclusión y $\delta : T \to \mathbf{Ke} \downarrow \mathbf{B}$ un diagrama que asocia cada $t \in Obj(T)$ a $\delta(t) : d(t) \to B$ un objeto de $\mathbf{Ke} \downarrow \mathbf{B}$. Supongamos que el $\mathrm{colim}(\iota \circ d)$ es un espacio de Hausdorff, entonces

$$\mathrm{colim}_{i \in T}((f^{-1}(d(t)))_{\mathbf{Ke}}) \simeq (f^{-1}(\mathrm{colim}_{i \in T}\, d(t)))_{\mathbf{Ke}}$$

y el isomorfismo esta dado por el morfismo canónico. □

Definición 1.2.18 (fibrado trivial)**.** Una función continua $u : L \to K$ de espacios topológicos es un fibrado trivial con fibra T si existe un homeomorfismo $\beta : K \times T \to L$ tal que $u \circ \beta = \mathrm{pr}_1$.

Definición 1.2.19 (fibrado localmente trivial)**.** Una función continua $u : L \to K$ de espacios topológicos es un fibrado localmente trivial si cada $x \in K$ tiene un entorno abierto V tal que $u|_{u^{-1}(V)} : u^{-1}(V) \to V$ es un fibrado trivial. Si las fibras de estas funciones continuas triviales son todas isomorfas a un mismo espacio topológico T, decimos que T es la fibra de u.

Definición 1.2.20 (fibrado de Kelley trivial)**.** Una función continua $u : L \to K$ de espacios de Kelley es un fibrado de Kelley trivial con fibra T si existe un homeomorfismo $\beta : (K \times T)_{\mathbf{Ke}} \to L$ tal que $u \circ \beta = \mathrm{pr}_1$.

Definición 1.2.21 (fibrado de Kelley localmente trivial)**.** Una función continua $u : L \to K$ de espacios de Kelley es un fibrado de Kelley localmente trivial si cada $x \in K$ tiene un entorno abierto V tal que $u|_{u^{-1}(V)} : u^{-1}(V) \to V$ es un fibrado de Kelley trivial. Observar que V y $u^{-1}(V)$ son espacios de Kelley por proposición 1.2.8. Si las fibras de estos fibrados de Kelley triviales son todas isomorfas a un mismo espacio de Kelley T, decimos que T es la fibra de u.

Observación 1.2.22. Las definiciones anteriores difieren en que el producto en **Ke** no es el mismo que en **Top**. Si L y K son espacios de Kelley y $u : L \to K$ es un fibrado localmente trivial, también es fibrado de Kelley localmente trivial.

Observación 1.2.23. Un fibrado localmente trivial con fibra discreta es un espacio de revestimiento.

Observación 1.2.24. Si X es un espacio de Hausdorff entonces

$$\pi_n(X, x_0) = \pi_n(X_{\mathbf{Ke}}, x_0).$$

En otras palabras, la aplicación $X \to X_{\mathbf{Ke}}$ es una equivalencia débil.

1.3. Realización geométrica de conjuntos simpliciales

La realización geométrica de un conjunto simplicial la definiremos de manera tal que la realización del n-símplex estándar en $\mathbb{S}$ (definido en 1.1.10) es el n-símplex estándar en **Top**.

1.3.1. El funtor $|\ |$

Definición 1.3.1 (realización de un conjunto simplicial)**.** Sea X un conjunto simplicial. Consideramos el funtor T_X definido en el lema 1.1.22. Sea $|T_X|$ el siguiente funtor

- A nivel de objetos, $|T_X|([n], x) = |\Delta^n|$ donde $|\Delta^n|$ es el n-símplex topológico estándar.
- A nivel de morfismos, $|T_X|(\Theta) = \Theta_*$ donde Θ_* es la función continua definida en el ejemplo 1.1.4.

Definimos la realización geométrica de X como

$$|X| := \operatorname{colim} |T_X|.$$

Definición 1.3.2 (realización geométrica de un morfismo simplicial)**.** Sea $f : X \to Y$ un morfismo simplicial, los colímites de los funtores $|T_X|$ y $|T_Y|$ vienen acompañados de transformaciones naturales a las cuales llamamos τ^X y τ^Y respectivamente

$$\tau^X : |T_X| \to \delta(\operatorname{colim} |T_X|) \qquad \tau^X : |T_Y| \to \delta(\operatorname{colim} |T_Y|).$$

Consideremos δ el funtor constante definido en 1.1.17, la transformacion natural

$$\nu^f : |T_X| \to \delta(\operatorname{colim} |T_Y|) \qquad \nu^f_{([n],x)} = \tau^Y_{([n],f(x))} = \tau^Y_{f_*([n],x)}$$

y

$$\begin{array}{rccc} f_* : & \mathbf{\Delta} \downarrow X & \to & \mathbf{\Delta} \downarrow Y \\ & ([n], x) & \mapsto & ([n], f(x)) \end{array}.$$

En otras palabras, si c es un objeto de $\mathbf{\Delta} \downarrow X$, $\nu_c^f = \tau^Y_{f_*(c)}$. De esta manera se ve que la naturalidad de ν es inmediata a partir de la naturalidad de τ^Y. Por la propiedad universal del colímite existe una única $|f|$ tal que

$$|f| : \operatorname{colim} |T_X| \to \operatorname{colim} |T_Y| \quad \text{tal que} \quad \begin{array}{ccc} |T_X| & \xrightarrow{\tau^X} & \delta(\operatorname{colim} |T_X|) \\ & {\scriptstyle \nu^f} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \delta(|f|)} & \\ & \delta(\operatorname{colim} |T_Y|) & \end{array}$$

Veamos que la aplicación $|\ |$ es funtorial. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ entonces $|f|$ y $|g|$ son las únicas funciones contínuas que hacen conmutativos los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} |T_X| & \xrightarrow{\tau^X} & \delta(\operatorname{colim} |T_X|) \\ & {\scriptstyle \nu^f} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \delta(|f|)} & \\ & \delta(\operatorname{colim} |T_Y|) & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} |T_Y| & \xrightarrow{\tau^Y} & \delta(\operatorname{colim} |T_Y|) \\ & {\scriptstyle \nu^g} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \delta(|g|)} & \\ & \delta(\operatorname{colim} |T_Z|) & \end{array}$$

entonces

$$\delta(|g|) \circ \delta(|f|) \circ \tau^X = \delta(|g|) \circ \nu^f = \delta(|g|) \circ \tau^Y_{f_*} = \nu^g_{f_*} = \tau^Z_{g_* \circ f_*} = \tau^Z_{(g \circ f)_*} = \nu^{g \circ f}$$

luego el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} |T_X| & \xrightarrow{\tau^X} & \delta(\operatorname{colim} |T_X|) \\ & {\scriptstyle \nu^{g\circ f}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \delta(|g|\circ|f|)} & \\ & \delta(\operatorname{colim} |T_Z|) & \end{array}$$

entonces $|g \circ f| = |g| \circ |f|$. En conclusión tenemos definido un funtor de la categoría de conjuntos simpliciales a la de espacios topológicos, que llamamos realización geométrica:

$$|\ | : \mathbb{S} \to \mathbf{Top}.$$

Proposición 1.3.3. Sea X un conjunto simplicial. Consideramos la topología discreta en X_n para todo n. Definimos en $\coprod_{n\in\mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n|$ la menor relación de equivalencia $\sim$ que relaciona $(X(\theta)(x), t)$ con $(x, \theta_* t)$ para todo morfismo θ de $\mathbf{\Delta} \downarrow X$. Entonces

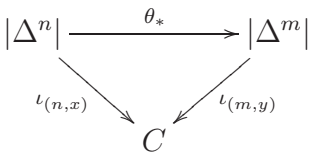
$$|X| = (\coprod_{n\in\mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n|)/\sim .$$

Demostración: Veremos que $C = (\coprod_{n\in\mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n|)/\sim$ verifica las siguientes condiciones:

1. Sea $\iota_{(n,x)} : |\Delta^n| \to C$, $t \mapsto [x, t]$. Podemos escribir a $\iota_{(n,x)}$ como la composición

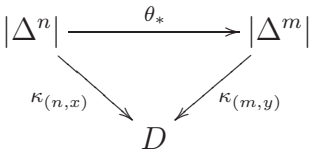
$$\iota_{(n,x)} : \ |\Delta^n| \xrightarrow[\{x\}\times \mathrm{id}]{} \{x\} \times |\Delta^n| \xrightarrow[\mathrm{inc}]{} \coprod_{n\in\mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n| \xrightarrow[q]{} (\coprod_{n\in\mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n|)/\sim$$

Estas aplicaciones son tales que el siguiente diagrama conmuta:



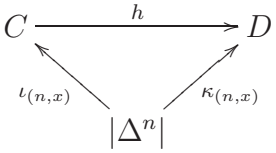
$\forall \theta \in \hom_{\mathbf{\Delta}\downarrow X}(([n],x),([m],y))$.

2. Si $\kappa_{(n,x)} : |\Delta^n| \to D$ son tales que el siguiente diagrama conmuta



(1.7)

$\forall \theta \in \hom_{\mathbf{\Delta}\downarrow X}(([n],x),([m],y))$, entonces existe una única función continua $h : C \to D$ tal que el diagrama conmuta



(1.8)

para todo $([n],x) \in \mathbf{\Delta} \downarrow X$.

Si $\theta \in \hom_{\mathbf{\Delta}\downarrow X}(([n],x),([m],y))$ entonces

$$\iota_{(m,y)} \circ \theta_*(t) = [y, \theta_*(t)] = [X(\theta)(y), t] = [x,t] = \iota_{(n,x)}(t)$$

luego la condición (1) se verifica.

Probemos que se cumple la condición (2). Definimos

$$\begin{array}{rccc} h: & \coprod_{n\in\mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n| & \to & D \\ & (x,t) & \mapsto & \kappa_{(n,x)}(t) \end{array}$$

Claramente h es continua porque las funciones $\kappa_{(n,x)}$ son continuas y en X_n tenemos la topología discreta. Si $\theta \in \hom_{\mathbf{\Delta}\downarrow X}(([n],x),([m],y))$, se verifica

$$h(x,t) = h(X(\theta)(y),t) = \kappa_{(n,X(\theta)(y))}(t) \overset{\text{por (1.7)}}{=} \kappa_{(m,y)}(\theta_*(t)) = h(y,\theta_*(t))$$

Luego h pasa al cociente teniendo definido la función continua buscada. Para ver la unicidad, supongamos que h' es tal que el diagrama (1.8) conmuta, luego

$$h'([x,t]) = h'(\iota_{(n,x)}(t)) = \kappa_{(n,x)}(t) = h([x,t]).$$

□

Observación 1.3.4. Si $f : X \to Y$ es un morfismo simplicial, podemos ver explícitamente a $|f| : |X| \to |Y|$ de la siguiente manera

$$\begin{array}{rccc} |f| : & (\coprod_{n\in\mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n|)/\sim & \to & (\coprod_{n\in\mathbb{N}} Y_n \times |\Delta^n|)/\sim \\ & [x,t] & \mapsto & [f_n(x),t] \end{array} .$$

Observación 1.3.5. Veamos que para todo morfismo θ en $\mathbf{\Delta}$ se verifica que $(X(\theta)(x),t) \sim (x,\theta_*(t))$ si y solo si se verifica $(X(s^i(x)),t) \sim (x,s^i_*(t))$ y $(X(d^j(x)),t) \sim (x,d^j_*(t))$ para toda codegeneración d^j y cocara s^i. La implicancia directa es obvia. Para ver la otra implicancia, consideramos θ un morfismo en $\mathbf{\Delta}$ y lo escribimos como $\theta = d^{i_1}\dots d^{i_k}s^{j_1}\dots s^{j_h}$ según el lema 1.1.7, luego

$$\begin{array}{rcl} (X(\theta)(x),t) & = & (X(s^{j_h})\dots X(s^{j_1})X(d^{i_k})\dots X(d^{i_1})(x),t) \\ & \sim & (\dots X(s^{j_1})X(d^{i_k})\dots X(d^{i_1})(x),s^{j_h}_*(t)) \\ & \sim & \dots \\ & \sim & (x,d^{i_1}_*\dots d^{i_k}_* s^{j_1}_*\dots s^{j_h}_*(t)) \\ & = & (x,\theta_*(t)). \end{array}$$

1.3.2. El funtor Sing

En esta sección definimos un funtor adjunto a derecha del funtor $||$ que nos permitirá obtener algunas propiedades de la realización geométrica.

Definición 1.3.6. Definimos el funtor

$$\text{Sing} : \ \mathbf{Top} \ \to \ \mathbb{S}$$

de la siguiente manera:

- Si A es un espacio topológico $\text{Sing}(A)$ es el conjunto simplicial definido en el ejemplo 1.1.4.
- Si $f : A \to B$ es una función continua entonces

$$\begin{array}{rccc} \text{Sing}(f) : & \text{Sing}(A) & \to & \text{Sing}(B) \\ (\text{Sing}(f))_n : & \hom_{\mathbf{Top}}(|\Delta^n|,A) & \to & \hom_{\mathbf{Top}}(|\Delta^n|,B) \\ & \alpha & \mapsto & f\circ\alpha \end{array} .$$

Proposición 1.3.7. El funtor $||$ es adjunto a izquierda del funtor Sing, es decir existe un isomorfismo

$$\eta_{X,A} : \hom_{\mathbf{Top}}(|X|,A) \xrightarrow{\cong} \hom_{\mathbb{S}}(X,\text{Sing}(A))$$

natural en $X \in \mathbb{S}$ y en $A \in \mathbf{Top}$.

Demostración: Observemos que

$$\hom_{\mathbf{Top}}(|\Delta^n|,A) = \text{Sing}(A)([n]) \cong \hom_{\mathbb{S}}(\Delta^n,\text{Sing}(A)). \tag{1.9}$$

Luego

$$\begin{array}{rcll} \hom_{\mathbf{Top}}(|X|, A) & \cong & \hom_{\mathbf{Top}}(\operatorname{colim}|T_X|, A) & \text{por 1.3.1} \\ & \cong & \lim \hom_{\mathbf{Top}}(|\Delta^n|, A) & \text{por [ML98] pag. 113} \\ & \cong & \lim \hom_{\mathbb{S}}(\Delta^n, \operatorname{Sing}(A)) & \text{por (1.9)} \\ & \cong & \hom_{\mathbb{S}}(\operatorname{colim} T_X, \operatorname{Sing}(A)) & \\ & \cong & \hom_{\mathbb{S}}(X, \operatorname{Sing}(A)) & \text{por 1.1.22} \end{array} .$$

□

Corolario 1.3.8. El funtor $||$ conmuta con los colímites. Es decir, si $F : I \to \mathbb{S}$ es un funtor, entonces

$$|\operatorname*{colim}_I F| \cong \operatorname*{colim}_I |F|$$

Demostración: Se sigue de que $||$ tiene adjunto a derecha. □

Definición 1.3.9 (esqueleto)**.** Sea X un conjunto simplicial, definimos el n-esqueleto $\mathrm{sk}^n X$ de X como el subconjunto simplicial de X tal que

$$(\mathrm{sk}^n X)_p = \{x \in X_p : \text{ existen } s \in \hom_\Delta([p],[q]), \quad q \leq n, \text{ e } y \in X_q \text{ tales que } x = X(s)(y)\}$$

Observemos que $(\mathrm{sk}^n X)_p = X_p$ si $p \leq n$,

$$\mathrm{sk}^0 X \subseteq \mathrm{sk}^1 X \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{sk}^n X \subseteq \ldots X$$

y

$$X = \operatorname{colim}_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{sk}^n X.$$

Definición 1.3.10 (dimensión)**.** La dimensión de un conjunto simplicial X es el mínimo n tal que $\mathrm{sk}^n X = X$. En caso de que $\mathrm{sk}^n X \neq X$ para todo n decimos que X no tiene dimensión finita.

Definición 1.3.11 (contorno)**.** Si X es un conjunto simplicial de dimensión n, denominamos contorno de X a $\mathrm{sk}^{n-1} X$ y lo denotamos por ∂X.

Observemos que si X es un conjunto simplicial y σ es un n-símplex entonces podemos considerar $\tilde{\sigma} : \Delta^n_\sigma \to X$ el simplex singular asociado. Como $\hom_{\mathbb{S}}(\Delta^n_\sigma, X) \cong X_n = (\mathrm{sk}^n X)_n \cong \hom_{\mathbb{S}}(\Delta^n_\sigma, \mathrm{sk}^n X)$ entonces $\tilde{\sigma} : \Delta^n_\sigma \to \mathrm{sk}^n X$.

Proposición 1.3.12. Sea X un conjunto simplicial. El siguiente diagrama es cocartesiano

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\sigma\in NX_n} \partial\Delta^n_\sigma & \xrightarrow{f} & \mathrm{sk}^{n-1} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\sigma\in NX_n} \Delta^n_\sigma & \xrightarrow[g]{} & \mathrm{sk}^n X \end{array} \tag{1.10}$$

Aquí g se define como

$$g = \coprod_{\sigma \in NX_n} \tilde{\sigma}$$

y f es la restricción.

DEMOSTRACIÓN: La categoría formada por los conjuntos simpliciales truncados de orden n (i.e. los funtores de $\underset{n}{\mathbf{\Delta}}^{\mathrm{op}}$ en **Set** siendo $\underset{n}{\mathbf{\Delta}}$ es la subcategoría plena de $\mathbf{\Delta}$ formada por todos los $[p]$ tal que $p \leq n$) es equivalente a la subcategoría plena de $\mathbb{S}$ formada por todos los conjuntos simpliciales de dimensión menor o igual que n, ver [GZ67] pag. 29. Por lo tanto probar que el diagrama (1.10) es un diagrama cocartesiano es equivalente a probar que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\sigma \in NX_n} (\partial \Delta^n_\sigma)_i & \xrightarrow{f_i} & (\mathrm{sk}^{n-1} X)_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\sigma \in NX_n} (\Delta^n_\sigma)_i & \xrightarrow[g_i]{} & (\mathrm{sk}^{n} X)_i \end{array} \tag{1.11}$$

es cocartesiano para todo $i \leq n$. Para $i < n$ las inclusiones en (1.11) son igualdades y por lo tanto (1.11) es un diagrama de cocartesiano. Para $i = n$, observemos que el complemento de $(\partial \Delta^n_\sigma)_n$ en $(\Delta^n_\sigma)_n$ es $\mathrm{id}[n]_\sigma$ ya que es el único n-símplex no degenerado de Δ^n_σ. Además $\tilde{\sigma}_n(\mathrm{id}[n]) = \sigma$, entonces g_n es una biyección entre el complemento de $\coprod_{\sigma \in NX_n} (\partial \Delta^n_\sigma)_n$ en $\coprod_{\sigma \in NX_n} (\Delta^n_\sigma)_n$ y el complemento de $(\mathrm{sk}^{n-1} X)_n$ en $(\mathrm{sk}^n X)_n$. Por este motivo el diagrama (1.11) con $i = n$ es un diagrama cocartesiano. □

Proposición 1.3.13. Si X es un conjunto simplicial entonces $|X|$ es un CW-complejo con una n-célula por cada n-símplex no degenerado de X.

DEMOSTRACIÓN: En la proposición 1.3.12 vimos que el diagrama (1.10) es cocartesiano. Además, como el funtor $|\ |$ conmuta con colímites tenemos que el siguiente diagrama es cocartesiano

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\sigma \in NX_n} |\partial \Delta^n_\sigma| & \xrightarrow{|f|} & |\,\mathrm{sk}^{n-1} X\,| \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\sigma \in NX_n} |\Delta^n_\sigma| & \xrightarrow[|g|]{} & |\,\mathrm{sk}^{n} X\,| \end{array} \tag{1.12}$$

La idea es probar que la realización geométrica del contorno de Δ^n es el borde topológico de la realización geométrica de Δ^n. De esta manera obtenemos que $(|\,\mathrm{sk}^n(X)|, |\,\mathrm{sk}^{n-1}(X)|)$ es una adjunción de n-células, una por cada $\sigma \in NX_n$.

Consideremos los siguientes morfismos

$$u_j = \Delta(d^{j-1}_{n-1}) \qquad v_i = \Delta(d^i_{n-1}) \qquad p_k = \Delta(d^k_n)$$

Observemos que para $i < j$ tenemos que

$$p_i u_j = \Delta(d^i)\Delta(d^{j-1}) = \Delta(d^i d^{j-1}) \overset{(1.1)}{=} \Delta(d^j d^i) = \Delta(d^j)\Delta(d^i) = p_j v_i$$

Definimos

$$u = \coprod_{0\le i<j\le n} u_j \qquad v = \coprod_{0\le i<j\le n} v_i \qquad p = \coprod_{0\le i\le n} p_i$$

y obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\coprod_{0\le i<j\le n} \Delta^{n-2} \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} \coprod_{0\le i\le n} \Delta^{n-1} \xrightarrow{\ p\ } \Delta^n \tag{1.13}$$

Como $pu = pv$, existe un único morfismo $\varphi : \operatorname{coker}(u, v) \to \Delta^n$ tal que el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\coprod_{0\le i\le n} \Delta^{n-1} & \xrightarrow{\ \mathrm{ck}\ } & \operatorname{coker}(u,v) \\ & \searrow^{p} & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ & & \Delta^n \end{array} \tag{1.14}$$

Observemos que la imagen de p es el subconjunto simplicial de Δ^n tal que

$(\operatorname{Im} p)_i = \{x \in \Delta^n_i : x = p_k(y) = \Delta(d^k_n)(y) = y \circ d^k_n$ para algún $y \in \Delta^{n-1}_i$ y $k \in \{0, \dots n\}\}$.

Es decir, los $x \in \Delta^n_i$ que se pueden factorizar de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccc} [i] & \xrightarrow{\ x\ } & [n] \\ & \searrow^{y} & \uparrow{\scriptstyle d^k_n} \\ & & [n-1]. \end{array}$$

Éste se puede hacer si x no es sobreyectivo. Si $i < n$, x no es sobreyectivo para todo $x \in \Delta^n_i$. Si $i = n$, x no es sobreyectivo si x no es $\mathrm{id}_{[n]}$. Luego

$$(\operatorname{Im} p)_i = \begin{cases} \Delta^n_i & \text{si} \quad i < n \\ \{x \in \Delta^n_n : x \neq \mathrm{id}_{[n]}\} & \text{si} \quad i = n \end{cases} = (\mathrm{sk}^{n-1}(\Delta^n))_i = (\partial\Delta^n)_i$$

e $\operatorname{Im} p = \partial\Delta^n$. Definimos ψ tal que el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\coprod_{0\le i\le n} \Delta^{n-1}_i & \xrightarrow{\ \mathrm{ck}\ } & \operatorname{coker}(u,v) \\ & \searrow^{p} & \uparrow{\scriptstyle \psi} \\ & & \partial\Delta^n \end{array} \tag{1.15}$$

luego, $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ por la unicidad de la propiedad universal del cokernel y

$$\varphi \circ \psi(p(y)) = \varphi \circ \mathrm{ck}(y) = p(y)$$

luego $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$. Entonces el siguiente diagrama es un diagrama de coigualadores

$$\coprod_{0\leq i<j\leq n} |\Delta^{n-2}| \underset{|v|}{\overset{|u|}{\rightrightarrows}} \coprod_{0\leq i\leq n} |\Delta^{n-1}| \xrightarrow{|p|} |\partial\Delta^n| \tag{1.16}$$

Observemos que

$$|u_j| = (d^{j-1}_{n-1})_* \quad (d^{j-1}_{n-1})_*(t_0,\ldots,t_{n-2}) = (t_0,\ldots,t_{j-2},0,t_{j-1},\ldots t_{n-2})$$

$$|v_i| = (d^{i}_{n-1})_* \quad (d^{i}_{n-1})_*(t_0,\ldots,t_{n-2}) = (t_0,\ldots,t_{i-1},0,t_{i},\ldots t_{n-2})$$

$$|p_k| = (d^{k}_{n})_* \qquad |p_k|(t_0,\ldots,t_{n-1}) = (t_0,\ldots,t_{k-1},0,t_{k},\ldots,t_{n-1})$$

la imagen de $|p_k|$ corresponde a la k-ésima $n-1$ cara de $|\Delta^n|$ y $|u_j|$, $|v_i|$ corresponden a las funciones continuas de pegado de las mismas formando así el borde de $|\Delta^n|$. Luego $|\partial\Delta^n| \cong \partial|\Delta^n|$. Por lo tanto tenemos un diagrama cocartesiano

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\sigma\in NX_n} \partial|\Delta^n_\sigma| & \xrightarrow{|f|} & |\operatorname{sk}^{n-1} X| \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\sigma\in NX_n} |\Delta^n_\sigma| & \xrightarrow[|g|]{} & |\operatorname{sk}^{n} X| \end{array} \tag{1.17}$$

y $|X| = \operatorname{colim} |\operatorname{sk}^n X|$, luego $|X|$ es un CW-complejo con una n-célula por cada n-símplex no degenerado. □

Observación 1.3.14. En [Mil56] pag. 362 se prueba que si X es un espacio topológico, entonces $|\operatorname{Sing}(X)|$ y X son débilmente homotópicos. Si X es un CW-complejo dicha equivalencia débil es un equivalencia de homotopía dado que $|\operatorname{Sing}(X)|$ y X resultan ser CW-complejos.

Como $|X|$ es un CW-complejo, en particular es un espacio de Kelley, luego el funtor realización geométrica se puede considerar

$$|\ | : \mathbb{S} \to \mathbf{Ke}$$

La ventaja de considerar la categoría **Ke** en vez de **Top**, es que visto así el funtor preserva límites finitos.

Proposición 1.3.15 ([GZ67] pag. 49)**.** El funtor $|\ |$ conmuta con límites finitos, en particular si X, Y son conjuntos simpliciales entonces $|X \times Y| \cong (|X| \times |Y|)_{\mathbf{Ke}}$. □

Corolario 1.3.16. Según proposición 1.3.15 existe $\eta : |X \times \Delta^1| \xrightarrow{\cong} (|X| \times |\Delta^1|)_{\mathbf{Ke}}$. Entonces una homotopía simplicial $H : X \times \Delta^1 \to Y$ induce una homotopía de espacios topológicos $|H| \circ \eta^{-1} : |X| \times |\Delta^1| \to |Y|$.

Observar que $(|X| \times |\Delta^1|)_{\mathbf{Ke}} \cong |X| \times |\Delta^1|$ porque $|X|$ es un espacio de Kelley y $|\Delta^1|$ es localmente compacto, ver proposición 1.2.12.

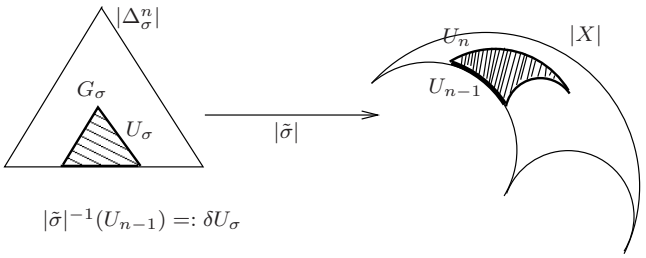
Corolario 1.3.17. Si X es un conjunto simplicial contráctil entonces $|X|$ es un espacio topológico contráctil.

Observación 1.3.18. Veremos a continuación que cada conjunto abierto U_{n-1} de $|\operatorname{sk}^{n-1} X|$ se puede extender a un conjunto abierto U_n de $|\operatorname{sk}^n X|$. Consideremos la familia de todos los n-símplices no degenerados

$$\Sigma = \cup_{n\in\mathbb{N}} NX_n.$$

Sea $\lambda = \{\lambda_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ una familia de números reales tal que $\lambda_\sigma \in (0, 1]$. Para cada $\sigma \in NX_n$ sea G_σ el baricentro del símplex $|\Delta^n_\sigma|$ en $\mathbb{R}^{n+1}$, $|\tilde{\sigma}| : |\Delta^n_\sigma| \to |\operatorname{sk}^n X|$ y

$$U_\sigma = \{x \in |\Delta^n_\sigma| : x = tG_\sigma + (1-t)M \text{ donde } 0 \le t < \lambda_\sigma \text{ y } M \in |\tilde{\sigma}|^{-1}(U_{n-1})\}$$



Observar que $|\tilde{\sigma}|^{-1}(U_{n-1}) \subseteq \partial|\Delta^n_\sigma|$ ya que $\sigma \in NX_n$. Sea

$$U_n = U_{n-1} \bigcup_{\sigma\in NX_n} |\tilde{\sigma}|(U_\sigma).$$

Por construcción $U_n \cap |\operatorname{sk}^{n-1} X| = U_{n-1}$. Denotamos por δU_σ a $|\tilde{\sigma}|^{-1}(U_{n-1})$. Como $|\operatorname{sk}^n X|$ es el CW-complejo que resulta de pegarle células de dimensión n a $|\operatorname{sk}^{n-1} X|$ a través de las funciones continuas de pegado $\partial|\tilde{\sigma}| : \partial|\Delta^n_\sigma| \to |\operatorname{sk}^{n-1} X|$, U_n es abierto en $|\operatorname{sk}^n X|$. En efecto, $|\tilde{\sigma}|^{-1}(U_n) = U_\sigma$ es abierto en $|\Delta^n_\sigma|$ para todo $\sigma \in NX_n$. Luego U_n es un abierto en $|\operatorname{sk}^n X|$ que extiende a U_{n-1}. Es más, si $V \subseteq U_n$ tal que $V \cap U_{n-1}$ (la imagen inversa V_σ de V en U_σ) es abierto en U_{n-1} (en $U_\sigma \quad \forall \sigma \in NX_n$) entonces $V \cap |\operatorname{sk}^{n-1} X|$ ($|\tilde{\sigma}|^{-1}(V)$) coincide con $V \cap U_{n-1}$ (respectivamente con V_σ). Entonces V es abierto en $|\operatorname{sk}^n X|$ y en U_n. Esto significa que tenemos un diagrama cocartesiano.

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\sigma\in NX_n} |\tilde{\sigma}|^{-1}(U_{n-1}) & \longrightarrow & U_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\sigma\in NX_n} U_\sigma & \longrightarrow & U_n \end{array} \tag{1.18}$$

Sustituyendo n por $n+1$ y U_{n-1} por U_n podemos construir un abierto U_{n+1} de $|\operatorname{sk}^{n+1} X|$ de manera que extiende a U_n y de esta manera podemos construir una sucesión

$$U_{n-1} \subset U_n \subset U_{n+1} \ldots \subset U_r \subset \ldots$$

de subconjuntos de $|X|$ con la siguientes porpiedades:

- U_r es abierto en $|\operatorname{sk}^r X|$
- $U_r = |\operatorname{sk}^r X| \cap U_{r+1}$

Luego como $|X| = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} |\operatorname{sk}^n X|$ entonces

$$U_{n-1}^{\lambda} = \bigcup_{r\geq n-1} U_r$$

es un abierto de $|X|$ al cual llamamos extensión de ancho λ de U_{n-1} a $|X|$.

Esta extensión es compatible con intersecciones, es decir, si U_{n-1} y V_{n-1} son dos conjuntos abiertos de $|\operatorname{sk}_{n-1} X|$, tenemos que

$$(U_{n-1} \cap V_{n-1})^{\lambda} = U_{n-1}^{\lambda} \cap V_{n-1}^{\lambda}$$

En particular si U_{n-1} y V_{n-1} son disjuntos U_{n-1}^{λ} y V_{n-1}^{λ} son también disjuntos.

Lema 1.3.19. Sean A y F espacios de Kelley, B un retracto de A y φ un automorfismo de $(B \times F)_{\mathbf{Ke}}$ tales que

$$\begin{array}{ccc} (B \times F)_{\mathbf{Ke}} & \xrightarrow{\varphi} & (B \times F)_{\mathbf{Ke}} \\ & {\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathrm{pr}_1} & \\ & B & \end{array} \tag{1.19}$$

entonces φ se extiende a un automorfismo ψ de $(A \times F)_{\mathbf{Ke}}$ tal que

$$\begin{array}{ccc} (A \times F)_{\mathbf{Ke}} & \xrightarrow{\psi} & (A \times F)_{\mathbf{Ke}} \\ & {\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathrm{pr}_1} & \\ & A & \end{array} \tag{1.20}$$

Demostración: El automorfismo φ es de la forma $\varphi(b, f) = (b, \alpha(b, f))$ con $\alpha : (B \times F)_{\mathbf{Ke}} \to F$ continua. Por la proposición 1.2.14 la función $\hat{\alpha} : B \to (CO(F, F))_{\mathbf{Ke}}$ tal que $\hat{\alpha}(b)(f) = \alpha(b, f)$ es continua. Al ser φ invertible tenemos que $\hat{\alpha}(b)$ es invertible para todo $b \in B$. Sea $r : A \to B$ una retracción de A en B, definimos

$$\psi : (A \times F)_{\mathbf{Ke}} \to (A \times F)_{\mathbf{Ke}} \qquad \psi(a, f) = (a, \gamma(a, f)) = (a, \hat{\alpha}(r(a))(f))$$

el cual resulta ser un automorfismo de $(A \times F)_{\mathbf{Ke}}$ que extiende a φ, compatible con la proyección en la primera coordenada y cuya inversa es $\psi^{-1}(a, f) = (a, (\hat{\alpha}(r(a)))^{-1}(f))$. □

Teorema 1.3.20. El funtor $|| : \mathbb{S} \to \mathbf{Ke}$ transforma morfismos simpliciales localmente triviales con fibra F en fibrados de Kelley localmente triviales con fibra $|F|$.

Demostración: Sea $f : Y \to X$ un morfismo de conjuntos simpliciales localmente trivial con fibra F. Queremos ver que $|f| : |Y| \to |X|$ es un fibrado de Kelley localmente trivial con fibra $|F|$. Sea $x \in |X|$, existe U_m una célula de dimensión m tal que x pertenece al interior de la misma. Como $|X|$ tiene una célula de dimensión i por cara i-símplex no degenerado, consideramos el m-símplex no degenerado correspondiente a U_m, $\sigma \in X_m$. Para $n \geq m$ consideremos U_n el abierto de $|\operatorname{sk}^n X|$ que extiende a U_m y U la extensión de ancho constante $\lambda = 1$ a $|X|$ tal como se detalla en la observación 1.3.18. Como f es localmente trivial $\operatorname{pr}_1 : f^{-1}(\tilde{\sigma}) = \Delta^m \underset{X}{\times} Y \to \Delta^m$ es trivial, es decir existe un isomorfismo $\beta : \Delta^m \times F \overset{\cong}{\to} f^{-1}(\tilde{\sigma})$ tal que

$$\begin{array}{ccc} \Delta^m \times F & \xrightarrow{\beta} & f^{-1}(\tilde{\sigma}) \\ & \searrow^{\pi} & \downarrow{\scriptstyle \operatorname{pr}_1} \\ & & \Delta^m \end{array}$$

conmuta. Como U_m es isomorfo al interior de $|\Delta^m|$ tenemos que

$$(U_m \times |F|)_{\mathbf{Ke}} \cong (|\overset{\circ}{\Delta^m}| \times |F|)_{\mathbf{Ke}} \subseteq (|\Delta^m| \times |F|)_{\mathbf{Ke}} \overset{\text{por 1.3.15}}{\cong} |\Delta^m \times F|$$

entonces identificamos a $(U_m \times |F|)_{\mathbf{Ke}}$ con un abierto de $|\Delta^m \times F|$. Por otro lado

$$|f|^{-1}(U_m) = (U_m \underset{|X|}{\times} |Y|)_{\mathbf{Ke}} \cong (|\overset{\circ}{\Delta^m}| \underset{|X|}{\times} |Y|)_{\mathbf{Ke}} \subseteq (|\Delta^m| \underset{|X|}{\times} |Y|)_{\mathbf{Ke}} \overset{\text{por 1.3.15}}{\cong} |\Delta^m \underset{X}{\times} Y| = |f^{-1}(\tilde{\sigma})|$$

luego $|f|^{-1}(U_m)$ lo identificamos con un abierto de $|f^{-1}(\tilde{\sigma})|$. Definimos $\alpha_m : (U_m \times |F|)_{\mathbf{Ke}} \to |f|^{-1}(U_m)$ como la restricción de $|\beta|$ a $(U_m \times |F|)_{\mathbf{Ke}}$. Como β es un isomorfismo y $\operatorname{pr}_1 \circ \beta = \pi$, entonces $|\beta|$ es un homeomorfismo, $|\operatorname{pr}_1| \circ |\beta| = |\pi|$ y $|\beta|((U_m \times |F|)_{\mathbf{Ke}}) = |f|^{-1}(U_m)$ luego α_m es un homeomorfismo y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} (U_m \times |F|)_{\mathbf{Ke}} & \xrightarrow{\alpha_m} & |f|^{-1}(U_m) \\ & \searrow^{\pi} \quad \swarrow_{\operatorname{pr}_1} & \\ & U_m & \end{array}$$

Supongamos que para $n > m$ tenemos construido $\alpha_{n-1} : (U_{n-1} \times |F|)_{\mathbf{Ke}} \to |f|^{-1}(U_{n-1})$ un homeomorfismo tal que el siguiente diagrama conmuta

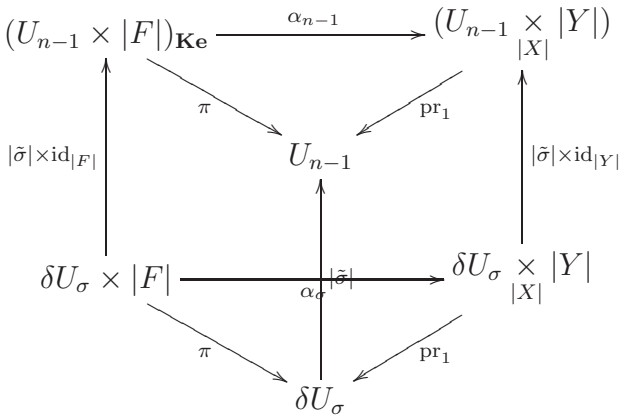
$$\begin{array}{ccc} (U_{n-1} \times |F|)_{\mathbf{Ke}} & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & |f|^{-1}(U_{n-1}) \\ & \searrow^{\pi} \quad \swarrow_{\operatorname{pr}_1} & \\ & U_{n-1} & \end{array}$$

Si al diagrama cocartesiano (1.18) le aplicamos el funtor cambio de base definido por $|f| : |Y| \to |X|$ obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \coprod\limits_{\sigma \in NX_n} |f|^{-1}(\delta U_\sigma) & \longrightarrow & |f|^{-1}(U_{n-1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod\limits_{\sigma \in NX_n} |f|^{-1}(U_\sigma) & \longrightarrow & |f|^{-1}(U_n) \end{array} \tag{1.21}$$

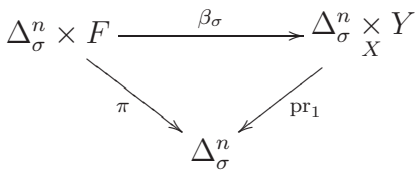
el cual es un diagrama cocartesiano por proposición 1.2.17.

El homeomorfismo α_{n-1} induce para cada $\sigma \in NX_n$ un homeomorfismo $\alpha_\sigma : \delta U_\sigma \times |F| \to \delta U_\sigma \underset{|X|}{\times} |Y|$ compatible con las proyecciones



(1.22)

Observar que $(\delta U_\sigma \times |F|)_{\mathbf{Ke}} = \delta U_\sigma \times |F|$ ya que δU_σ es localmente compacto. Como f es localmente trivial, para cada $\sigma \in NX_n$ existe $\beta_\sigma : \Delta^n_\sigma \times F \overset{\cong}{\to} \Delta^n_\sigma \underset{X}{\times} Y$ que es compatible con las proyecciones en Δ^n_σ, es decir



Como el funtor realización geométrica conmuta con límites finitos (proposición 1.3.15), conmuta con productos finitos y con productos fibrados, luego

$$|\Delta^n_\sigma \times F| = (|\Delta^n_\sigma| \times |F|)_{\mathbf{Ke}} = |\Delta^n_\sigma| \times |F| \qquad |\Delta^n_\sigma \underset{X}{\times} Y| = (|\Delta^n_\sigma| \underset{|X|}{\times} |Y|)_{\mathbf{Ke}} = |\Delta^n_\sigma| \underset{|X|}{\times} |Y|$$

Entonces se inducen homeomorfismos γ_σ y δ_σ compatibles con las proyecciones tales que

$$\begin{array}{ccc} |\Delta^n_\sigma| \times |F| & \xrightarrow{|\beta_\sigma|} & |\Delta^n_\sigma| \underset{|X|}{\times} |Y| \\ \uparrow & & \uparrow \\ U_\sigma \times |F| & \xrightarrow{\gamma_\sigma} & U_\sigma \underset{|X|}{\times} |Y| \\ \uparrow & & \uparrow \\ \delta U_\sigma \times |F| & \xrightarrow{\delta_\sigma} & \delta U_\sigma \underset{|X|}{\times} |Y| \end{array} \tag{1.23}$$

El automorfismo $\delta_\sigma^{-1} \circ \alpha_\sigma$ es tal que

$$\begin{array}{ccc} \delta U_\sigma \times |F| & \xrightarrow{\delta_\sigma^{-1} \circ \alpha_\sigma} & \delta U_\sigma \times |F| \\ & {\scriptstyle \pi} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \pi} & \\ & \delta U_\sigma & \end{array} \tag{1.24}$$

luego por el lema 1.3.19 se puede extender a un automorfismo ψ_σ de $U_\sigma \times |F|$ que es compatible con la proyección en U_σ. Obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \coprod_{\sigma \in NX_n} U_\sigma \times |F| & \longleftarrow & \coprod_{\sigma \in NX_n} \delta U_\sigma \times |F| & \longrightarrow & (U_{n-1} \times |F|)_{\mathbf{Ke}} \\ \downarrow {\scriptstyle \coprod \gamma_\sigma \circ \psi_\sigma} & & \downarrow {\scriptstyle \coprod \alpha_\sigma} & & \downarrow {\scriptstyle \alpha_{n-1}} \\ \coprod_{\sigma \in NX_n} U_\sigma \underset{|X|}{\times} |Y| & \longleftarrow & \coprod_{\sigma \in NX_n} \delta U_\sigma \underset{|X|}{\times} |Y| & \longrightarrow & (U_{n-1} \underset{|X|}{\times} |Y|)_{\mathbf{Ke}} \end{array} \tag{1.25}$$

Si consideramos el colímite de las flechas horizontales superiores obtenemos el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\sigma \in NX_n} \delta U_\sigma \times |F| & \longrightarrow & (U_{n-1} \times |F|)_{\mathbf{Ke}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\sigma \in NX_n} U_\sigma \times |F| & \longrightarrow & (U_n \times |F|)_{\mathbf{Ke}} \end{array}$$

si consideramos el colímite de las flechas inferiores obtenemos el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\sigma \in NX_n} |f|^{-1}(\delta U_\sigma) & \longrightarrow & (|f|^{-1}(U_{n-1}))_{\mathbf{Ke}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\sigma \in NX_n} |f|^{-1}(U_\sigma) & \longrightarrow & (|f|^{-1}(U_n))_{\mathbf{Ke}} \end{array}$$

luego el colímite de las flechas verticales nos da un homeomorfismo

$$\alpha_n : (U_n \times |F|)_{\mathbf{Ke}} \to (|f|^{-1}(U_n))_{\mathbf{Ke}}$$

compatible con las proyecciones.

Definimos $\alpha = \operatorname{colim} \alpha_n$,

$$\alpha : \operatorname{colim}(U_n \times |F|) \to \operatorname{colim}(|f|^{-1}U_n)$$

como $|f|^{-1}(U) = \operatorname{colim}(|f|^{-1}(U_n))$ y $(U \times |F|)_{\mathbf{Ke}} = \operatorname{colim}(U_n \times |F|)_{\mathbf{Ke}}$, tenemos construido un homeomorfismo $\alpha : (U \times |F|)_{\mathbf{Ke}} \to |f|^{-1}(U)$ tal que $q \circ \alpha = \mathrm{pr}_1$, luego $|f|$ induce una fibrado de Kelley trivial de $|f|^{-1}(U)$ a U y por lo tanto $|f|$ es un fibrado de Kelley localmente trivial con fibra $|F|$. □

1.4. El conjunto simplicial WG y los espacios EG$_\bullet$ y BG$_\bullet$

1.4.1. El conjunto simplicial WG

Definición 1.4.1 (WG)**.** Sea G un grupo, definimos $\mathrm{WG}_n = \underbrace{\mathrm{G} \times \ldots \times \mathrm{G}}_{(n+1)-veces}$ y si $\alpha : [n] \to [m]$ es un morfismo en Δ,

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{WG}(\alpha): & \mathrm{WG}_m & \to & \mathrm{WG}_n \\ & (g_0, \ldots, g_m) & \mapsto & (g_{\alpha(0)}, \ldots, g_{\alpha(n)}) \end{array}$$

Claramente $\mathrm{WG}(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ y $\mathrm{WG}(\alpha) \circ \mathrm{WG}(\beta) = \mathrm{WG}(\beta \circ \alpha)$, luego tenemos definido un conjunto simplicial WG.

Proposición 1.4.2. El conjunto simplicial WG es contráctil.

Demostración: Sea e el elemento neutro de G y consideremos los siguientes morfismos simpliciales

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathrm{WG} & \to & \Delta^0 \\ \varphi_n: & \mathrm{WG}_n & \to & \Delta^0_n \\ & g & \mapsto & 0_n \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \psi: & \Delta^0 & \to & \mathrm{WG} \\ \psi_n & \Delta^0_n & \to & \mathrm{WG}_n \\ & 0_n & \mapsto & (e, \ldots, e) \end{array}$$

Es claro que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\Delta^0}$, entonces si probamos que $\psi \circ \varphi \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{WG}}$ tenemos que WG es contráctil.

Sea δ^n_i el elemento de Δ^1_n, que asigna el 0 a los primeros i elementos y 1 a los restantes y

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathrm{WG} \times \Delta^1 & \to & \mathrm{WG} \\ h_n: & \mathrm{WG}_n \times \Delta^1_n & \to & \mathrm{WG}_n \\ & ((g_0, g_1, \ldots, g_n), \delta^n_i) & \mapsto & (e, \ldots, e, g_i, \ldots, g_n). \end{array}$$

Para ver que h es simplicial necesitamos probar que para todo morfismo $\alpha : [n] \to [m]$ el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{WG}_m \times \Delta^1_m & \xrightarrow{\mathrm{WG}(\alpha)\times\Delta^1(\alpha)} & \mathrm{WG}_n \times \Delta^1_n \\ \downarrow{\scriptstyle h_m} & & \downarrow{\scriptstyle h_n} \\ \mathrm{WG}_m & \xrightarrow[\mathrm{WG}(\alpha)]{} & \mathrm{WG}_n \end{array} \tag{1.26}$$

Sea i tal que $\alpha(i-1) < j$ y $j \leq \alpha(i)$, por un lado

$$\begin{aligned} h_n \circ \mathrm{WG}(\alpha) \times \Delta^1(\alpha)((g_0, \ldots, g_m), \delta^m_j) &= h_n((g_{\alpha(0)}, \ldots, g_{\alpha(n)}), \delta^m_j \circ \alpha) \\ &= h_n((g_{\alpha(0)}, \ldots, g_{\alpha(n)}), \delta^m_i) \\ &= (\underbrace{e, \ldots, e}_{\text{i veces}}, g_{\alpha(i)}, \ldots, g_{\alpha(n)}) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \mathrm{WG}(\alpha) \circ h_m((g_0, \ldots, g_m), \delta^m_j) &= \mathrm{WG}(\alpha)(\underbrace{e, \ldots, e}_{\text{j veces}}, g_j, \ldots, g_m) \\ &= (\tilde{g}_{\alpha(0)}, \ldots, \tilde{g}_{\alpha(n)}) \end{aligned}$$

con $\tilde{g}_k = \begin{cases} e & si \quad k < j \\ g_k & si \quad k \geq j \end{cases}$, es decir $\tilde{g}_{\alpha(k)} = \begin{cases} e & si \quad \alpha(k) < j \\ g_{\alpha(k)} & si \quad \alpha(k) \geq j \end{cases}$. Como i es tal que $\alpha(i-1) < j$, $j \leq \alpha(i)$ y α es monótona tenemos

$$(\tilde{g}_{\alpha(0)}, \ldots, \tilde{g}_{\alpha(n)}) = (\underbrace{e, \ldots, e}_{\text{i veces}}, g_{\alpha(i)}, \ldots, g_{\alpha(n)})$$

luego el diagrama (1.26) conmuta y h es un morfismo simplicial. Además es claro que

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{WG} \times \Delta^0 = \mathrm{WG} & & \\ \downarrow{\scriptstyle 1\times d^1_1} & \searrow^{\psi\varphi} & \\ \mathrm{WG} \times \Delta^1 & \xrightarrow{h} & \mathrm{WG} \\ \uparrow{\scriptstyle 1\times d^0_1} & \nearrow_{\mathrm{id}_{\mathrm{WG}}} & \\ \mathrm{WG} \times \Delta^0 = \mathrm{WG} & & \end{array}$$

conmuta, entonces h es una homotopía entre $\psi\varphi$ y $\mathrm{id}_{\mathrm{WG}}$. □

1.4.2. Grupos y acciones simpliciales

Sea **Grp** la categoría de grupos. Un grupo simplicial es un elemento de la categoría simplicial asociada a **Grp**.

Definición 1.4.3 (acción simplicial)**.** Una acción de un grupo simplicial H en un conjunto simplicial X es un morfismo simplicial $\mu : H \times X \to X$ tal que si m la multiplicación en H e $i(x) = (e, x)$ entonces los diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} H \times H \times X & \xrightarrow{\mathrm{id}_H \times \mu} & H \times X \\ {\scriptstyle m\times \mathrm{id}_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ H \times X & \xrightarrow[\mu]{} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & & \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \searrow^{\mathrm{id}_X} & \\ H \times X & \xrightarrow[\mu]{} & X \end{array}$$

En otras palabras, cada X_n es un H_n-conjunto y las acciones son compatibles con la estructura simplicial.

Consideremos el grupo simplicial constante en G y definimos

$$\begin{array}{lccc} \mu : & \mathrm{G} \times \mathrm{WG} & \to & \mathrm{WG} \\ \mu_n : & \mathrm{G} \times \mathrm{G}^{n+1} & \to & \mathrm{G}^{n+1} \\ & (g, (g_0, \ldots, g_n)) & \mapsto & (gg_0, \ldots, gg_n) \end{array} \tag{1.27}$$

Claramente cada μ_n es una acción y μ es un morfismo simplicial.

Definición 1.4.4 ($\overline{\mathrm{WG}}$)**.** Definimos el conjunto simplicial $\overline{\mathrm{WG}}$ de la siguiente manera:

- $\overline{\mathrm{WG}}_n = \mathrm{WG}_n / \sim$ siendo $\sim$ la relación de estar en la misma órbita, es decir, $\mathbf{g_1} \sim \mathbf{g_2}$ si y solo si existe $g \in \mathrm{G}$ tal que $g \cdot \mathbf{g_1} = \mathbf{g_2}$.
- Si $\alpha : [n] \to [m]$, $\overline{\mathrm{WG}}(\alpha) : \overline{\mathrm{WG}}_m \to \overline{\mathrm{WG}}_n$ es la función inducida por $\mathrm{WG}(\alpha)$ en el cociente, la cual está bien definida ya que $g \cdot \mathrm{WG}(\alpha)(\mathbf{g}) = \mathrm{WG}(\alpha)(g \cdot \mathbf{g})$.

Observemos que tenemos definido un morfismo simplicial $\overline{q} : \mathrm{WG} \to \overline{\mathrm{WG}}$ tal que $\overline{q}_n$ es la función cociente

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{WG}_n & \to & \mathrm{WG}_n / \sim \\ (g_0, \ldots, g_n) & \mapsto & [g_0, \ldots, g_n]. \end{array}$$

Definición 1.4.5 (VG)**.** Sea VG el siguiente conjunto simplicial:

- $\mathrm{VG}_n = \mathrm{G}^n$
- Si $\alpha : [n] \to [m]$ entonces

$$\mathrm{VG}(\alpha) : \mathrm{G}^m \to \mathrm{G}^n$$

$$\mathrm{VG}(\alpha)(g_1, \ldots, g_m) = \begin{cases} (\overbrace{e, \ldots, e}^{\text{i-1 veces}}, g_{\alpha(i)}, \ldots, g_{\alpha(n)}) & si \quad \alpha(i-1) = 0 \quad y \quad \alpha(i) \neq 0 \\ (g_{\alpha(0)}^{-1} g_{\alpha(1)}, \ldots, g_{\alpha(0)}^{-1} g_{\alpha(n)}) & si \quad \alpha(0) \neq 0 \end{cases}$$

Proposición 1.4.6. El conjunto simplicial $\overline{\mathrm{WG}}$ es isomorfo a VG y el morfismo cociente $\mathrm{WG} \to \overline{\mathrm{WG}}$ se puede interpretar como el morfismo $q : \mathrm{WG} \to \mathrm{VG}$ tal que

$$q_n : \mathrm{WG}_n \to \mathrm{VG}_n \quad q_n(g_0, \ldots, g_n) = (g_0^{-1} g_1, \ldots, g_0^{-1} g_n).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\varphi_n : \mathrm{VG}_n \to \overline{\mathrm{WG}}_n$ tal que $\varphi_n(g_1, \ldots, g_n) = [e, g_1, \ldots, g_n]$. Como todo elemento de $\overline{\mathrm{WG}}_n$ se representa de manera única por un elemento de la forma $(e, g_1, \ldots, g_n)$, φ_n es una biyección para todo n.

Para ver que estas biyecciones son compatibles con las estructuras simpliciales probaremos que si $\alpha : [n] \to [m]$ es un morfismo en $\mathbf{\Delta}$ entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{VG}_m & \xrightarrow{\varphi_m} & \overline{\mathrm{WG}}_m \\ {\scriptstyle \mathrm{VG}(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\mathrm{WG}}(\alpha)} \\ \mathrm{VG}_n & \xrightarrow[\varphi_n]{} & \overline{\mathrm{WG}}_n \end{array}$$

Por un lado

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{WG}}(\alpha)(\varphi_m(g_1, \ldots, g_m)) &= \overline{\mathrm{WG}}(\alpha)([e, g_1, \ldots, g_m]) \\ &= \begin{cases} [e, \ldots, e, g_{\alpha(i)}, \ldots, g_{\alpha(n)}] & si \quad \alpha(i-1) = 0 \quad y \quad \alpha(i) \neq 0 \\ [g_{\alpha(0)}, \ldots, g_{\alpha(n)}] & si \quad \alpha(0) \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \varphi_n(\mathrm{VG}(\alpha))(g_1, \ldots, g_m) &= \begin{cases} \varphi_n(e, \ldots, e, g_{\alpha(i)}, \ldots, g_{\alpha(n)}) & si \quad \alpha(i-1) = 0 \quad y \quad \alpha(i) \neq 0 \\ \varphi_n(g_{\alpha(0)}^{-1} g_{\alpha(1)}, \ldots, g_{\alpha(0)}^{-1} g_{\alpha(n)}) & si \quad \alpha(0) \neq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} [e, e, \ldots, e, g_{\alpha(i)}, \ldots, g_{\alpha(n)}] & si \quad \alpha(i-1) = 0 \quad y \quad \alpha(i) \neq 0 \\ [e, g_{\alpha(0)}^{-1} g_{\alpha(1)}, \ldots, g_{\alpha(0)}^{-1} g_{\alpha(n)}] & si \quad \alpha(0) \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Teorema 1.4.7. Sea G un grupo. Sea X un conjunto simplicial dotado de una acción del grupo simplicial constante G. Sea $f : X \to Y$ un morfismo simplicial tal que $f_n(g \cdot x) = f_n(x)$ para todo $g \in \mathrm{G}$, $x \in X_n$ y $n \geq 0$. Para todo $\sigma : \Delta^n \to Y$, consideramos la acción de G en $f^{-1}(\tilde{\sigma})$ inducida por la acción en X, es decir

$$f^{-1}(\tilde{\sigma}) = \{(x, t) \in X \times \Delta^n : f(x) = \sigma(t)\} \qquad g \cdot (x, t) = (g \cdot x, t)$$

y consideramos siguiente la acción de G en $\Delta^n \times \mathrm{G}$,

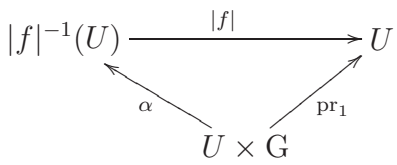
$$g \cdot (t, h) = (t, gh).$$

Supongamos que f es un morfismo localmente trivial con fibra G tal que el isomorfismo $\beta : \Delta^n \times \mathrm{G} \to f^{-1}(\tilde{\sigma})$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n \times \mathrm{G} & \xrightarrow{\beta} & f^{-1}(\tilde{\sigma}) \\ & {\scriptstyle \pi}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ & & \Delta^n \end{array}$$

es equivariante respecto a las acciones anteriormente descriptas. Entonces

- La acción simplicial en X, $\mathrm{G}\times X\to X$, induce una acción continua en $|X|$, $\mathrm{G}\times|X|\simeq|\mathrm{G}\times X|\to|X|$.
- Para todo $y\in|Y|$ existe un entorno U en $|Y|$ tal que existe un homoemorfismo α tal que el diagrama conmuta



y α es equivariante con las siguientes acciones de G en $|f|^{-1}(U)$ y $U\times\mathrm{G}$ respectivamente

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{G}\times|f|^{-1}(U) & \to & |f|^{-1}(U) \\ (g,x) & \mapsto & g\cdot x \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \mathrm{G}\times(U\times\mathrm{G}) & \to & U\times\mathrm{G} \\ (g,(u,h)) & \mapsto & (u,gh) \end{array}$$

Demostración: El morfismo $\mu:\mathrm{G}\times X\to X$ es simplicial, luego $|\mu|:|\mathrm{G}\times X|\to|X|$ es una función continua y $\mathrm{G}\times|X|=|\mathrm{G}|\times|X|\simeq|\mathrm{G}\times X|$ dado que $|\mathrm{G}|$ es discreto. Como μ es una acción, verificar que $|\mu|$ también es una acción es inmediato a partir del hecho de que

$$\begin{array}{rlcl} |\mu|: & \mathrm{G}\times|X| & \to & |X| \\ & (g,[x_n,t]) & \mapsto & [g\cdot x_n,t] \end{array}$$

Por el teorema 1.3.20 la función $|f|:|X|\to|Y|$ es un fibrado de Kelley localmente trivial con fibra G. Nos resta ver que el homeomorfismo α considerado en la prueba de dicho teorema es equivariante. Por hipótesis

$$\beta:\Delta^m\times\mathrm{G}\to f^{-1}(\tilde{\sigma})$$

es equivariante, luego $|\beta|:|\Delta^m\times\mathrm{G}|\to|f^{-1}(\tilde{\sigma})|$ es equivariante ya que si $y_n\in(\Delta^m\times\mathrm{G})_n$

$$|\beta|(g\cdot[y_n,t])=|\beta|([g\cdot y_n,t])=[\beta_n(g\cdot y_n),t]=[g\cdot\beta_n(y_n),t]=g\cdot[\beta_n(y_n),t]=g\cdot|\beta|([y_n,t])$$

La función continua α se construye como el colímite de funciones continuas α_n construidas para todo n mayor o igual que m de forma inductiva. La función continua α_m es la restricción de $|\beta|$ y por lo tanto es equivariante. Suponiendo que α_{n-1} equivariante tenemos que las funciones continuas correspondientes a las flechas verticales en el diagrama (1.25) son equivariantes, luego también α_n es equivariante. □

Proposición 1.4.8. El morfismo $q:\mathrm{WG}\to\mathrm{VG}$ es un morfismo localmente trivial con fibra G.

Demostración: Sea $\sigma:\Delta^n\to\mathrm{VG}$ un morfismo simplicial, queremos ver que $p_\sigma:q^{-1}(\sigma)\to\Delta^n$ es un morfismo trivial con fibra G, es decir, que existe $\varphi:\Delta^n\times\mathrm{G}\to q^{-1}(\sigma)$

isomorfismo tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n \times \mathrm{G} & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & q^{-1}(\sigma) \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_\sigma} & \\ & \Delta^n & \end{array}$$

Consideremos $\sigma_n(\mathrm{id}_{[n]}) = (h_1, \ldots, h_n)$. Como σ es simplicial tenemos que para todo $\alpha : [m] \to [n]$, $\mathrm{VG}(\alpha) \circ \sigma_n = \sigma_m \circ \Delta^n(\alpha)$, luego

$$\begin{array}{rcl} \sigma_m(\alpha) & = & \sigma_m(\mathrm{id}_{[n]} \circ \alpha) \\ & = & (\sigma_m \circ \Delta^n(\alpha))(\mathrm{id}_{[n]}) \\ & = & (\mathrm{VG}(\alpha) \circ \sigma_n)(\mathrm{id}_{[n]}) \\ & = & \left\{ \begin{array}{ll} (e, \ldots, e, h_{\alpha(i)}, \ldots, h_{\alpha(m)}) & si \quad \alpha(i-1) = 0 \quad y \quad \alpha(i) \neq 0 \\ (h_{\alpha(0)}^{-1} h_{\alpha(1)}, \ldots, h_{\alpha(0)}^{-1} h_{\alpha(m)}) & si \quad \alpha(0) \neq 0 \end{array} \right. \end{array} \tag{1.28}$$

Definimos

$$\begin{array}{rccl} \varphi_m : & \Delta_m^n \times \mathrm{G} & \to & (q^{-1}(\sigma))_m \\ & (\alpha, g) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} (\alpha, g, \ldots, g, gh_{\alpha(i)}, \ldots, gh_{\alpha(m)}) & si \quad \alpha(i-1) = 0 \quad y \quad \alpha(i) \neq 0 \\ (\alpha, gh_{\alpha(0)}, \ldots, gh_{\alpha(m)}) & si \quad \alpha(0) \neq 0 \end{array} \right. \end{array} \tag{1.29}$$

Observar que φ_m esta bien definida ya que si $\alpha(i-1) = 0 \quad y \quad \alpha(i) \neq 0$

$$q(g, \ldots, g, gh_{\alpha(i)}, \ldots, gh_{\alpha(m)}) = (e, \ldots, e, h_{\alpha(i)}, \ldots, h_{\alpha(m)}) = \sigma_m(\alpha)$$

y si $\alpha(0) \neq 0$

$$\begin{array}{rcl} q(gh_{\alpha(0)}, \ldots, gh_{\alpha(n)}) & = & ((gh_{\alpha(0)})^{-1} gh_{\alpha(1)}, \ldots, (gh_{\alpha(0)})^{-1} gh_{\alpha(m)}) \\ & = & (h_{\alpha(0)}^{-1} h_{\alpha(1)}, \ldots, h_{\alpha(0)}^{-1} h_{\alpha(m)}) \\ & = & \sigma_m(\alpha) \end{array}$$

Por otro lado definimos

$$\begin{array}{rccl} \psi_m : & (q^{-1}(\sigma))_m & \to & \Delta_m^n \times \mathrm{G} \\ & (\alpha, g_0, \ldots, g_m) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} (\alpha, g_0) & si \quad \alpha(0) = 0 \\ (\alpha, g_0 h_{\alpha(0)}^{-1}) & si \quad \alpha(0) \neq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Como $\psi_m \circ \varphi_m(\alpha, g) = (\alpha, g)$ tenemos que $\psi_m \circ \varphi_m = \mathrm{id}_{\Delta_m^n \times \mathrm{G}}$. Observemos que los elementos de $(q^{-1}(\sigma))_m$ quedan determinados por sus dos primeros términos:

$$\begin{array}{rcl} (q^{-1}(\sigma))_m & = & \{(\alpha, g_0, \ldots, g_m) \in \Delta_m^n \times \mathrm{WG}_m : \sigma_m(\alpha) = (g_0^{-1} g_1, \ldots, g_0^{-1} g_m)\} \\ & \overset{(1.28)}{=} & \{(\alpha, g_0, \ldots, g_m) : (g_0^{-1} g_1, \ldots, g_0^{-1} g_m) = \left\{ \begin{array}{l} (e, \ldots, e, h_{\alpha(i)}, \ldots, h_{\alpha(m)}) \\ (h_{\alpha(0)}^{-1} h_{\alpha(1)}, \ldots, h_{\alpha(0)}^{-1} h_{\alpha(m)}) \end{array} \right. \} \\ & = & \{(\alpha, g_0, \ldots, g_m) \in \Delta_m^n \times \mathrm{WG}_m : g_j = \left\{ \begin{array}{lll} g_0 & si & \alpha(j) = 0 \\ g_0 h_{\alpha(j)} & si & \alpha(j) \neq 0 \\ g_0 h_{\alpha(0)}^{-1} h_{\alpha(j)} & si & \alpha(0) \neq 0 \end{array} \right. \quad \alpha(0) = 0 \ \} \end{array} \tag{1.30}$$

Veamos que $\varphi_m \circ \psi_m = \mathrm{id}_{(q^{-1}(\sigma))_m}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_m \circ \psi_m(\alpha, g_0, \ldots, g_m) &= \begin{cases} \varphi_m(\alpha, g_0) & si \quad \alpha(0) = 0 \\ \varphi_m(\alpha, g_0 h_{\alpha(0)}^{-1}) & si \quad \alpha(0) \neq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\alpha, g_0, g_0 h_{\alpha(i)}, \ldots, g_0 h_{\alpha(m)}) & \alpha(i-1) = 0 \quad \alpha(i) \neq 0 \\ (\alpha, g_0, g_0 h_{\alpha(0)^{-1}} h_{\alpha(1)}, \ldots, g_0 h_{\alpha(0)}^{-1} h_{\alpha(m)}) & \alpha(0) \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

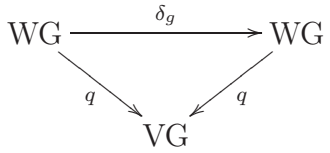
Por la observación recientemente hecha $(\varphi_m \circ \psi_m)(\alpha, g_0, g_1, \ldots g_m) = (\alpha, g_0, g_1, \ldots g_m)$ por coincidir en los dos primeros términos. Si un morfismo simplicial es invertible en cada n entonces su inversa es simplicial, luego alcanza probar que ψ es simplicial.

Sea $\tau : [k] \to [m]$ un morfismo. Por definición

$$\begin{aligned}
(\Delta^n(\tau) \times \mathrm{id})(\psi_m(\alpha, g_0, \ldots, g_m)) &= \begin{cases} (\Delta^n(\tau) \times \mathrm{id})(\alpha, g_0) & \alpha(0) = 0 \\ (\Delta^n(\tau) \times \mathrm{id})(\alpha, g_0 h_{\alpha(0)}^{-1}) & \alpha(0) \neq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\alpha \circ \tau, g_0) & \alpha(0) = 0 \\ (\alpha \circ \tau, g_0 h_{\alpha(0)}^{-1}) & \alpha(0) \neq 0 \end{cases} \\
(\psi_k \circ q^{-1}(\sigma)(\tau))(\alpha, g_0, \ldots, g_m)) &= \psi_k(\alpha \circ \tau, g_{\alpha(0)}, \ldots, g_{\alpha(k)})) \\
&= \begin{cases} (\alpha \circ \tau, g_{\tau(0)}) & \alpha\tau(0) = 0 \\ (\alpha \circ \tau, g_{\tau(0)} h_{\alpha\tau(0)}^{-1}) & \alpha\tau(0) \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Si $\tau(0) = 0$ es claro que ambas expresiones coinciden, si no, coinciden por la caracterización de los elementos de $(q^{-1}(\sigma))_m$ vista en (1.30). □

Observación 1.4.9. Observemos que si denotamos por δ_g a la acción por un elemento g, el siguiente diagrama conmuta



Por lo tanto el morfismo q : WG $\to$ VG cumple con las hipótesis del teorema 1.4.7. Además es fácil ver que la función φ definida en (1.29) es equivariante.

Proposición 1.4.10. Sean G un grupo, N un subgrupo normal de G y π la proyección G $\to$ G/N. Entonces Vπ : VG $\to$ V(G/N) es un morfismo localmente trivial con fibra VN.

Demostración: Sea $\sigma : \Delta^n \to \mathrm{V(G/N)}$ queremos ver que $\mathrm{V}\pi^{-1}(\sigma)$ es un morfismo trivial con fibra VN. Consideremos $(g_1, \ldots, g_n) \in \mathrm{VG}_n$ tal que $\sigma_n(\mathrm{id}_{[n]}) = ([g_1], \ldots, [g_n])$, estamos notando $\pi(g_i) = [g_i]$. Observemos que si $\alpha \in \Delta_m^n$

$$\begin{aligned}
\sigma_m(\alpha) &= \sigma_m(\mathrm{id}_{[n]} \circ \alpha) = (\sigma_m \circ \Delta^n(\alpha))(\mathrm{id}_{[n]}) \\
&= (\mathrm{V(G/N)}(\alpha) \circ \sigma_n)(\mathrm{id}_{[n]}) = \mathrm{V(G/N)}(\alpha)([g_1], \ldots [g_n]) \\
&= \begin{cases} ([e], \ldots, [e], [g_{\alpha(i)}], \ldots, [g_{\alpha(m)}]) & si \quad \alpha(i-1) = 0, \alpha(i) \neq 0 \\ ([g_{\alpha(0)}^{-1} g_{\alpha(1)}], \ldots, [g_{\alpha(0)}^{-1} g_{\alpha(m)}]) & si \quad \alpha(0) \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

luego

$$((\mathrm{V}\pi)^{-1}(\sigma))_m = \{(\alpha, h_1, \ldots, h_m) \in \Delta^n_m \times \mathrm{VG}_m : \sigma_m(\alpha) = (\mathrm{V}\pi)_m(h_1, \ldots, h_m)\}$$

$$= \{(\alpha, h_1, \ldots, h_m) \in \Delta^n_m \times \mathrm{VG}_m : ([h_1], \ldots, [h_m]) = \left\{ \begin{array}{l} ([e], \ldots, [e], [g_{\alpha(i)}], \ldots, [g_{\alpha(m)}]) \\ ([g^{-1}_{\alpha(0)} g_{\alpha(1)}], \ldots, [g^{-1}_{\alpha(0)} g_{\alpha(m)}]) \end{array} \right. \}$$

$$= \{(\alpha, h_1, \ldots, h_m) : \text{ existe } \mathbf{n} \in \mathrm{VN}_m \text{ tal que } \begin{array}{ll} \text{si} & \alpha(i-1) = 0 \\ & \alpha(i) \neq 0 \\ \text{si} & \alpha(0) \neq 0 \end{array} \quad h_j = \left\{ \begin{array}{ll} n_j & j \leq i-1 \\ n_j g_{\alpha(j)} & j > i \end{array} \right. \quad h_j = n_j g^{-1}_{\alpha(0)} g_{\alpha(j)} \quad \}$$

(1.31)

Sea

$$\begin{array}{rcl} \varphi_m : \Delta^n_m \times \mathrm{VN}_m & \to & ((\mathrm{V}\pi)^{-1}(\sigma))_m \\ (\alpha, n_1, \ldots, n_m) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} (\alpha, n_1, \ldots, n_{i-1}, n_i g_{\alpha(i)}), \ldots, n_m g_{\alpha(m)}) & (a) \\ (\alpha, g^{-1}_{\alpha(0)} n_1 g_{\alpha(1)}, \ldots, g^{-1}_{\alpha(0)} n_m g_{\alpha(m)}) & (b) \end{array} \right. \end{array}$$

(a) es el caso $\alpha(i) \neq 0$ y $\alpha(i-1) = 0$ y (b) es el caso $\alpha(0) \neq 0$. Viendo que el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n_m \times \mathrm{VN}_m & \xrightarrow{\varphi_m} & (\mathrm{V}\pi)^{-1}(\sigma)_m \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta^n(\tau) \times \mathrm{VN}(\tau)} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta^n(\tau) \times \mathrm{VG}(\tau)} \\ \Delta^n_k \times \mathrm{VN}_k & \xrightarrow[\varphi_k]{} & (\mathrm{V}\pi)^{-1}(\sigma)_k \end{array}$$

se verifica que φ es simplicial.

Veamos que φ es biyección. Sea $(\alpha, h_1, \ldots, h_m) \in (\mathrm{V}\pi)^{-1}(\sigma)_m$, por lo observado en (1.31) existen $n_i \in N$, $i = 1, \ldots, m$ tal que si $\alpha(i-1) = 0$ y $\alpha(i) \neq 0$ entonces $h_j = \left\{ \begin{array}{ll} n_j & j \leq i-1 \\ n_j g_{\alpha(j)} & j > i \end{array} \right.$ y si $\alpha(0) \neq 0, h_j = n_j g^{-1}_{\alpha(0)} g_{\alpha(j)}$, entonces si $\alpha(0) = 0$

$$\varphi_m(\alpha, n_1, \ldots, n_j, n_{j+1} g^{-1}_{\alpha(j+1)}, \ldots, n_m g^{-1}_{\alpha(m)}) = (\alpha, h_1, \ldots, h_m)$$

Si $\alpha(0) \neq 0$ entonces

$$\varphi_m(\alpha, g_{\alpha(0)} n_1 g^{-1}_{\alpha(1)}, \ldots, g_{\alpha(0)} n_m g^{-1}_{\alpha(m)}) = (\alpha, h_1, \ldots, h_m)$$

entonces φ_m es sobreyectiva. La inyectividad es inmediata. □

1.4.3. Los espacios $\mathrm{EG}_\bullet$ y $\mathrm{BG}_\bullet$

En esta sección definimos el espacio $\mathrm{BG}_\bullet$ que tiene las propiedades que caracterizan al espacio clasificante del grupo G, ver proposición 1.4.12.

Definición 1.4.11 ($\mathrm{EG}_\bullet$ y $\mathrm{BG}_\bullet$)**.** Sean G un grupo, WG el conjunto simplicial definido en 1.4.1 y VG el conjunto simplicial definido en 1.4.5. Definimos los siguientes espacios topológicos

$$\mathrm{EG}_\bullet = |\,\mathrm{WG}\,| \qquad \mathrm{BG}_\bullet = |\,\mathrm{VG}\,|.$$

Proposición 1.4.12.

- $\mathrm{EG}_\bullet$ es un CW-complejo contráctil.
- G actúa libremente y propiamente discontinuamente en $\mathrm{EG}_\bullet$.
- $\mathrm{EG}_\bullet \,/\, \mathrm{G} \simeq \mathrm{BG}_\bullet$.

Demostración: Como $\mathrm{EG}_\bullet$ es la realización geométrica de un conjunto simplicial, es un CW-complejo (proposición 1.3.13). Al ser WG un conjunto simplicial contráctil (proposición 1.4.2), $\mathrm{EG}_\bullet$ es un espacio contráctil. En (1.27) definimos una acción de G en WG

$$\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{WG} \to \mathrm{WG}$$

luego $|\mu| : \mathrm{G} \times |\,\mathrm{WG}\,| \to |\,\mathrm{WG}\,|$ es una acción. Como μ es libre, entonces $|\mu|$ también es libre.

Probemos que la acción es propiamente discontinua. En la observación 1.4.9 vimos que el morfismo $q : \mathrm{WG} \to \mathrm{VG}$ satisface las hipótesis del teorema 1.4.7, entonces para todo $y \in \mathrm{BG}_\bullet$ existen un entorno U de $\mathrm{BG}_\bullet$ y un homeomorfismo β equivariante tales que el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} |q|^{-1}(U) & \xrightarrow{\;|q|\;} & U \\ & {\scriptstyle\beta}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} & \\ & U \times \mathrm{G} & \end{array} \tag{1.32}$$

Sea $x \in \mathrm{EG}_\bullet$ y sean U entorno de $y = |q|(x)$ y β como se detalla en el diagrama (1.32). Sea $(u, g) \in U \times \mathrm{G}$ tal que $\beta(u, g) = x$ y sea $U_x = \beta(U \times \{g\})$. Como β es un homeomorfismo y $U \times \{g\}$ es abierto entonces U_x es un entorno abierto de x. Sea $h \in \mathrm{G}$

$$h \cdot U_x = h \cdot \beta(U \times \{g\}) = \beta(U \times \{hg\})$$

luego $y \in h \cdot U_x \cap U_x$ si y solo si $\beta^{-1}(y) \in U \times \{hg\} \cap U \times \{g\}$ si y solo si $h = e$. La otra condición para que la acción sea propiamente discontinua es inmediata del hecho que $\mathrm{BG}_\bullet$ es de Hausdorff.

El morfismo $q : \mathrm{WG} \to \mathrm{VG}$ es un morfismo simplicial localmente trivial con fibra G (proposición 1.4.8) entonces $|q| : \mathrm{EG}_\bullet \to \mathrm{BG}_\bullet$ es una función continua localmente trivial con fibra G. Como G es discreto la observación 1.2.23 nos permite afirmar que es un espacio de revestimiento con fibra G. Luego $\mathrm{EG}_\bullet \,/\, \mathrm{G} \simeq \mathrm{BG}_\bullet$. □

Observación 1.4.13. Como $\mathrm{EG}_\bullet$ es contráctil y $\mathrm{EG}_\bullet \to \mathrm{BG}_\bullet$ es un espacio de revestimiento, resulta que

$$\pi_n(\mathrm{BG}_\bullet) = \begin{cases} \mathrm{G} & n = 1 \\ 0 & n > 0 \end{cases} .$$

1.5. Espacio clasificante

1.5.1. Conjuntos simpliciales punteados

Sea $\mathbf{Set}_\star$ la categoría de conjuntos con un elemento distinguido. Denotamos por $\mathbb{S}_\star$ a su categoría simplicial,

$$\mathbb{S}_\star := \mathbf{Set}_\star^{\mathrm{sim}}.$$

Sean $\mathbf{Top}_\star$ la categoría de espacios topológicos punteados y $\mathbf{Ke}_\star$ la subcategoría plena de $\mathbf{Top}_\star$ formada por los espacios de Kelley punteados.

El n-símplex estandar en $\mathbf{Top}_\star$ es el n-símplex estandar en $\mathbf{Top}$ con el punto marcado en $t_n^0 = (1, 0, \ldots, 0)$.

Sea X un conjunto simplicial punteado; queremos ver que $|X|$ es un espacio topológico punteado de manera natural.

En la proposición 1.3.3 vimos que

$$|X| = (\coprod_{n\in\mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n|)/\sim .$$

Denotamos por x_n^0 al elemento distinguido de X_n y obsevemos que si $\Theta : [m] \to [n]$ es un morfismo en $\mathbf{\Delta}$ entonces

$$(x_m^0, t_m^0) = (X(\Theta)(x_n^0), t_m^0) \sim (x_n^0, \Theta_*(t_m^0)).$$

En particular, si $\Theta(0) = 0$ entonces $\Theta_*(t_m^0) = t_n^0$ y

$$(x_m^0, t_m^0) \sim (x_n^0, t_n^0)$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Podemos puntear al espacio $|X|$ con el punto $[x_m^0, t_m^0]$.

Si $f \in \mathbb{S}_\star$ entonces queremos ver que $|f| \in \mathbf{Top}_\star$. Como vimos en 1.3.4,

$$\begin{array}{rccc} |f| : & |X| & \to & |Y| \\ & [x_n, t_n] & \mapsto & [f_n(x_n), t_n] \end{array}$$

entonces $|f|[x_n^0, t_n^0] = [f(x_n^0), t_n^0] = [y_m^0, t_m^0]$. Luego $|f|$ respeta los puntos marcados.

1.5.2. Espacio clasificante

Definición 1.5.1 (Espacio clasificante)**.** Sean G un grupo y e su elemento neutro. Consideramos a VG en $\mathbb{S}_\star$ tomando para cada n el elemento $(e, \ldots, e)$. De esta manera $\mathrm{BG}_\bullet \in \mathbf{Top}_\star$. El espacio clasificante de G es la clase de homotopía punteada del espacio $\mathrm{BG}_\bullet$, al cual notaremos por BG.

1.5.3. Funtorialidad del espacio clasificante

Sea $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morfismo de grupos, definimos $\mathrm{B}\, f : \mathrm{BG} \to \mathrm{BH}$ de la siguiente manera

$$\mathrm{V}\, f : \mathrm{VG} \to \mathrm{VH} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{V}\, f_n : \mathrm{G^n} \to \mathrm{H^n} \\ (Vf)_n(g_1, \ldots, g_n) = (f(g_1), \ldots, f(g_n)) \end{array}$$

Finalmente $\mathrm{B}\, f = |\,\mathrm{V}\, f|$.

1.5.4. Propiedad universal del espacio clasificante

Del siguiente teorema obtendremos inmediatamente la propiedad universal del espacio clasificante

Teorema 1.5.2 ([Whi78] pag 225)**.** Si K es un CW complejo conexo, X un espacio asférico (i.e. un espacio arco-conexo tal que $\pi_i(X) = 0$ $i \geq 2$) entonces

$$\begin{array}{ccc} [(K,k_0),(X,x_0)] & \to & \hom(\pi_1(K),\pi_1(X)) \\ f & \mapsto & f_* \end{array}$$

es una biyección.

Notación: Si $\sim$ es la relación de homotopía punteada

$$[(K,k_0),(X,x_0)] = \{f : K \to X : f(k_0) = x_0\}/\sim$$

Proposición 1.5.3 (Propiedad universal del espacio clasificante)**.** Si X es un CW complejo conexo y G un grupo entonces

$$\begin{array}{ccc} [X,\mathrm{BG}] & \to & \hom(\pi_1(X),\mathrm{G}) \\ f & \mapsto & f_* \end{array}$$

es una biyección.

Demostración: Aplicamos el teorema 1.5.2 dado que BG es asférico y $\pi_1(\mathrm{BG}) = \mathrm{G}$, ver observación 1.4.13. □

1.5.5. Otras propiedades

Proposición 1.5.4. Si N es un subgrupo normal de G, entonces BN es un revestimiento de BG asociado al grupo N.

Demostración: Consideramos el revestimeinto universal $q : \mathrm{EG} \to \mathrm{BG}$. Si N es un subgrupo normal de G el revestimiento $q_{\mathrm{N}} : \mathrm{EG}\,/\,\mathrm{N} \to \mathrm{BG}$ es el revestimiento de BG asociado al subgrupo N (ref. [Hat02] pag. 66). Por otro lado N actúa libremente y propiamente discontinuamente en EG y en EN, luego por el teorema 1.6.14 podemos afirmar que $\mathrm{EG}\,/\,\mathrm{N}$ es un modelo de BN. □

Proposición 1.5.5. Sean $\rho_1, \rho_2 : \Gamma \to \mathrm{G}$ morfismos de grupos conjugados por un elemento $v \in \mathrm{G}$, es decir $\rho_2(x) = v\rho_1(x)v^{-1}$ $\forall x \in \Gamma$, entonces $\mathrm{B}\rho_1$ y $\mathrm{B}\rho_2$ son libremente homotópicas.

Demostración: Supongamos $\Gamma = \mathrm{G}$ y $\rho_1 = \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$. Luego si c_v es la conjugación por el elemento v, $\rho_2 = c_v$. Definimos un morfismo simplicial $H : \mathrm{VG} \times \Delta^1 \to \mathrm{VG}$ de la siguiente manera

$$H_n : \mathrm{VG}_n \times \Delta^1_n \to \mathrm{VG}_n \quad H_n((g_1,\ldots,g_n),\delta^n_j) = \begin{cases} (g_1,\ldots,g_n) & j = n+1 \\ (g_1,\ldots,g_{j-1},g_jv,\ldots,g_nv) & j \in \{1,\ldots n\} \\ (v^{-1}g_1v,\ldots,v^{-1}g_nv) & j = 0 \end{cases}$$

Se verifica que H es simplicial, y por lo tanto H es una homotopía simplicial entre $H(-,\delta_0) = \mathrm{id}_{\mathrm{VG}}$ y $H(-,\delta_1) = \mathrm{V}\, c_v$.

Para ver el caso general observemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\rho_1} & G \\ & \searrow^{\rho_2} & \downarrow{\scriptstyle c_v} \\ & & G \end{array}$$

luego $H \circ (\mathrm{V}\,\rho_1 \times \mathrm{id}_{\Delta^1}) : \mathrm{V}\,\Gamma \times \Delta^1 \to \mathrm{VG}$ es una homotopía entre $V\rho_1$ y $\mathrm{V}\,\rho_2$ y por lo tanto $\mathrm{B}\rho_1$ y $\mathrm{B}\rho_2$ son homotópicas. Como la homotopía no preserva los puntos marcados, es una homotopía libre. □

Proposición 1.5.6. Sean G y Γ dos grupos entonces

1. $\mathrm{V}(\mathrm{G} \times \Gamma) \cong \mathrm{VG} \times \mathrm{V}\,\Gamma$.
2. $\mathrm{B}(\mathrm{G} \times \Gamma)_\bullet$ es débilmente homotópicamente equivalente a $\mathrm{BG}_\bullet \times \mathrm{B}\Gamma_\bullet$.

Demostración:

1. Directamente de la definición vemos que
$$\mathrm{V}(\mathrm{G} \times \Gamma)_n = (G \times \Gamma)^n \cong G^n \times \Gamma^n = \mathrm{VG}_n \times \mathrm{V}\,\Gamma_n.$$
2. Directamente de la definición vemos que
$$\mathrm{B}(\mathrm{G} \times \Gamma)_\bullet = |\,\mathrm{V}(G \times \Gamma)| = |\,\mathrm{VG} \times \mathrm{V}\,\Gamma| = (|\,\mathrm{VG}\,| \times |\,\mathrm{V}\,\Gamma|)_{\mathbf{Ke}}.$$
Como la aplicación
$$|\,\mathrm{VG}\,| \times |\,\mathrm{V}\,\Gamma| \to (|\,\mathrm{VG}\,| \times |\,\mathrm{V}\,\Gamma|)_{\mathbf{Ke}}$$
es una equivalencia débil de homotopía, $\mathrm{B}(\mathrm{G} \times \Gamma)_\bullet$ es débilmente homotópicamente equivalente a $|\,\mathrm{VG}\,| \times |\,\mathrm{V}\,\Gamma| = \mathrm{BG}_\bullet \times \mathrm{B}\Gamma_\bullet$.

□

Teorema 1.5.7 ([Ros94] pag. 263)**.** Sea G un grupo. Si M es un grupo abeliano donde G actúa trivialmente, existe un isomorfismo natural entre $H_\bullet(G, M)$ y $H_\bullet(\mathrm{BG}; M)$ donde la primera denota la homología de grupo y la segunda la homología singular.

1.6. Unicidad del espacio clasificante

1.6.1. Propiedad de extensión de secciones

Definición 1.6.1 (sección)**.** Sean E y B espacios topológicos y $p : E \to B$ una función continua, llamamos sección de p a una función continua $s : B \to E$ tal que $p \circ s = id_B$.

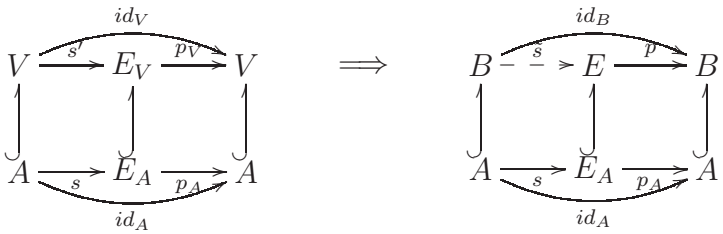
Definición 1.6.2 (halo)**.** Si $A \subseteq B$, un halo alrededor de A es un conjunto V tal que $A \subseteq V \subseteq B$ y existe una función continua $f : B \to [0,1]$ con $f|_A = 1$ y $f|_{V^c} = 0$.

Ejemplo 1.6.3. B es un halo alrededor de $\emptyset$ y de B, tomando $f = 0$ y $f = 1$ respectivamente.

Ejemplo 1.6.4. Sea B un espacio normal. Si A_1 y A_2 son conjuntos disjuntos y cerrados en B, A_1 tiene un halo que no intersecta a A_2. Ésto se debe a que por el lema de Urysohn A.1 existe $f : B \to [0,1]$ tal que $f|_{A_1} = 1$ y $f|_{A_2} = 0$, si tomamos $V = A_2^c$, V es un halo alrededor de A_1 que no interseca a A_2.

De ahora en más notaremos $p_A : E_A \to A$ por $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$.

Definición 1.6.5 (propiedad de extensión de secciones)**.** Decimos que $p : E \to B$ tiene la propiedad de extensión de secciones si dado $A \subseteq B$ y $s : A \to E_A$ sección de p_A la cual se extiende a una sección $s' : V \to E_V$ de p_V para algún halo V alrededor de A, entonces s se extiende (no necesariamente a través de s') a una sección $\tilde{s}$ de p.



En este contexto s es llamada sección local de p y $\tilde{s}$ es llamada sección global de p.

Observación 1.6.6. Si $E = B \times F$ para algún espacio F y p es la proyección en la primera coordenada, entonces las secciones de p son de la forma

$$\begin{array}{rccc} s: & B & \to & B \times F \\ & y & \mapsto & (y, f(y)) \end{array}$$

con $f : B \to F$ una función continua.

Lema 1.6.7. Si $E = B \times F$ para algún espacio contráctil F y si $p : E \to B$ es la proyección en la primera componente, entonces p tiene la propiedad de extensión de secciones.

Demostración: Sean $h : F \times [0,1] \to F$ y $x_0 \in F$ tales que $h(x,1) = x$ y $h(x,0) = x_0$ para todo $x \in F$. Sean $A \subseteq B$, V un halo alrededor de A y $f : B \to [0,1]$ tales que $f|_A = 1$ y $f|_{V^c} = 0$. Si s es una sección de p_A que se extiende a una sección s' de p_V queremos ver que s se extiende a una sección global $\tilde{s}$ de p.

Sean $q : B \times F \to F$ la proyección en la segunda componente, $g = q \circ s$ y $g' = q \circ s'$. Sean

$$\varphi : [0,1] \to [0,1]$$
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2x - 1 & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

y

$$\tilde{g} : B \to F$$
$$\tilde{g}(y) = \begin{cases} x_0 & y \in f^{-1}([0, \frac{1}{2}]) \\ h(g'(y), \varphi(f(y))) & y \in f^{-1}([\frac{1}{2}, 1]) \end{cases}.$$

Veamos que $\tilde{g}$ es continua. La función constante en x_0 es continua en $f^{-1}([0, \frac{1}{2}])$. La función $h(g'(y), \varphi(f(y)))$ es continua en $f^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$ por ser composición de continuas. Ambos conjuntos son cerrados y cubren a B, por lo tanto nos resta probar que coinciden en la intersección. Si $f(y) = \frac{1}{2}$ entonces

$$\varphi(f(y)) = 0 \quad \Rightarrow h(g'(y), \varphi(f(y))) = h(g'(y), 0) = x_0.$$

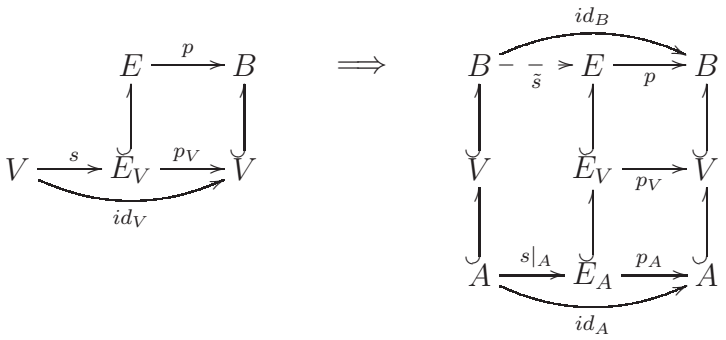
Definimos $\tilde{s} : B \to E$ como $\tilde{s}(y) = (y, \tilde{g}(y))$. Para ver que $\tilde{s}|_A = s$ alcanza probar que $\tilde{g}|_A = g$. Si $y \in A$ entonces

$$\tilde{g}(y) = h(g'(y), \varphi(f(y))) = h(g'(y), \varphi(1)) = h(g'(y), 1) = g'(y) = g(y).$$

□

Observación 1.6.8. Si $p : E \to B$ es una función continua y verifica la siguiente condición entonces p tiene la propiedad de extensión de secciones:

> Si $g : B \to [0, 1]$ es una función continua, $A = g^{-1}(1)$, $V = g^{-1}((0, 1])$ y s sección de p_V entonces $s|_A$ se extiende a una sección global de p



Demostración: Sean $A \subseteq B$ y $s : A \to E_A$ sección de p_A tales que existe V un halo alrededor de A y $s' : V \to E_V$ sección de p_V tal que $s'|_A = s$, tenemos que probar que s se extiende a una sección global $\tilde{s}$ de p. Como V es un halo alrededor de A existe $g : B \to [0, 1]$ continua tal que $g|_A = 1$ y $g|_{V^c} = 0$. Sean $A_1 = g^{-1}(1)$, $V_1 = g^{-1}((0, 1])$ y $s_1 = s'|_{V_1}$, observar que $A \subseteq A_1$ y $V_1 \subseteq V$.

Veamos que s_1 es una sección de p_{V_1}. Si $v \in V_1$ entonces $(p_V \circ s')(v) = v \in V_1$ luego $s_1(v) \in p^{-1}(V_1)$. Además $(p \circ s_1)(v) = (p_V \circ s')(v) = v$, porque s' es sección de p_V, entonces por la propiedad enunciada $s_1|_{A_1}$ se extiende a una sección global $\tilde{s}$ de p. En particular s se extiende a una sección global $\tilde{s}$ de p ya que

$$s_1|_{A_1} = s'|_{A_1} \qquad A \subset A_1 \qquad s = s'|_A.$$

□

Observación 1.6.9. Sea $p : E \to B$ una función continua que tiene la propiedad de extensión de secciones y $\varphi : B \to H$ y $\psi : K \to E$ son homeomorfismos entonces

$$\varphi \circ p : E \to H \quad y \quad p \circ \psi : K \to B$$

tienen la propiedad de extensión de secciones.

□

Lema 1.6.10. Sean $p : E \to B$ una función continua con la propiedad de extensión de secciones $f : B \to [0,1]$ una función continua y $W = f^{-1}((0,1])$, entonces p_W tiene la propiedad de extensión de secciones.

Demostración: Probaremos la propiedad enunciada en la observación 1.6.8. Sean $g : W \to [0,1]$ una función continua, $A = g^{-1}(1)$, $V = g^{-1}((0,1])$ y s sección de p_W sobre V. Queremos ver que $s|_A$ se extiende a una sección global $\tilde{s}$ de p_W. Para esto construiremos inductivamente secciones s_n $(n = 2, 3, \ldots)$ de p tales que $\lim_n s_n|_W = \tilde{s}$. Las secciones s_n se construirán de manera tal que verifiquen las siguientes condiciones:

$$s_{n+1}(x) = s_n(x) \qquad \forall x \in f^{-1}((\frac{1}{n}, 1]) \tag{1.33}$$

$$s_n(x) = s(x) \qquad \forall x \in f^{-1}(\frac{1}{n+1}, 1] \cap g^{-1}((\frac{n-1}{n}, 1]) \tag{1.34}$$

Luego de construidas dichas secciones, definimos $\tilde{s} = \lim_n s_n|_W$, ya que dicho límite existe por la condición (1.33). Por la condición (1.34), si $x \in A$ y m es tal que $\frac{1}{m+1} < f(x)$ entonces

$$\tilde{s}(x) = \lim_n (s_n|_W)(x) = \lim_n s_n(x) = s_m(x) = s(x)$$

Luego $\tilde{s}$ es una sección global de p_W que extiende a $s|_A$.

Para comenzar con la inducción construimos s_2 sección global de p tal que

$$s_2(x) = s(x) \qquad \forall x \in f^{-1}((\frac{1}{3}, 1]) \cap g^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$$

Sea

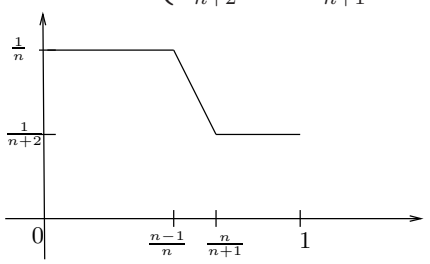
$$fg : B \to [0,1]$$
$$(fg)(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in W^c \\ f(x)g(x) & si \quad x \in W \end{cases} .$$

Es claro que fg es continua. Sea $A_2 = f^{-1}((\frac{1}{3}, 1]) \cap g^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$. Como $s|_{A_2}$ es sección local de p, si probamos que s está definida en un halo de A_2 entonces por la propiedad de extensión de secciones de p existe una extensión global s_2 que coincide con s en A_2 que es lo que queremos. El halo de A_2 en B es la región donde $fg > 0$[1] y s esta definida en dicha región.

[1] La función es la h_2 que construiremos más adelante.

Asumamos construidos $s_2, \ldots, s_n$ que cumplen las propiedades (1.33) y (1.34).
Sea k_n la siguiente función

$$k_n : [0,1] \to [\tfrac{1}{n+2}, \tfrac{1}{n}]$$
$$k_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n} & t \leq \frac{n-1}{n} \\ \frac{1}{n+2} & t \geq \frac{n}{n+1} \end{cases}$$



Observemos que k_n es continua y decreciente. Sean

$$A_{n+1} = \{x \in W : f(x) > k_n(g(x))\}$$
$$V_{n+1} = \{x \in W : f(x) > \tfrac{n}{n+1} k_n(g(x))\}$$

Definimos una sección r en V_{n+1} de la siguiente manera

$$r(x) = \begin{cases} s_n(x) & si \quad f(x) > \frac{1}{n+1} \\ s(x) & si \quad g(x) > \frac{n-1}{n} \end{cases}$$

Observar que si $f(x) \leq \frac{1}{n+1}$ y $g(x) \leq \frac{n-1}{n}$ entonces

$$k_n(g(x)) \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{n k_n(g(x))}{n+1} \geq \frac{1}{n+1} \geq f(x) \Rightarrow x \in V_{n+1}^c$$

Como $s(x) = s_n(x)$ para todo $x \in f^{-1}((\frac{1}{n+1}, 1]) \cap g^{-1}((\frac{n-1}{n}, 1])$, r está bien definida. Para ver que r es continua en V_{n+1}, consideremos $\{x_\lambda\}$ una red en V_{n+1} que converge a $x \in V_{n+1}$. Como f y g son continuas en V_{n+1}, $f(x_\lambda)$ converge a $f(x)$ y $g(x_\lambda)$ converge a $g(x)$. Como $x \in V_{n+1}$, $f(x) > \frac{1}{n+1}$ o $g(x) > \frac{n-1}{n}$, por la observación anterior. Si $f(x) > \frac{1}{n+1}$ entonces existe λ_0 tal que si $f(x_\lambda) > \frac{1}{n+1}$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$ entonces $r(x_\lambda) = s_n(x_\lambda)$ converge a $s_n(x) = r(x)$. En el caso que $g(x) > \frac{n-1}{n}$ razonamos análogamente. Además $A_{n+1} \subseteq V_{n+1}$, asi que $r|_{A_{n+1}}$ se extiende a $r|_{V_{n+1}}$. El conjunto V_{n+1} es un halo alrededor de A_{n+1} porque

$$h_n(x) = \begin{cases} \frac{(n+1)f(x) - n k_n(g(x))}{k_n(g(x))} & x \in V_{n+1} \backslash A_{n+1} \\ 0 & x \notin V_{n+1} \\ 1 & x \in A_{n+1} \end{cases}$$

es continua en todo B. Luego por la propiedad de extensión de secciones de p, $r|_{A_{n+1}}$ se extiende a una sección global s_{n+1} de p.

Nos resta probar que s_{n+1} verifica las condiciones requeridas.
Si $f(x) > \frac{1}{n}$ entonces $x \in A_n$ porque $k_n(g(x)) < \frac{1}{n}$ entonces

$$s_{n+1}(x) = r(x) = s_n(x)$$

lo que muestra que la condición (1.33) se cumple. Si $f(x) > \frac{1}{n+2}$ y $g(x) > \frac{n}{n+1}$ entonces $x \in A_n$ y por lo tanto $s_{n+1}(x) = s(x)$, lo que muestra que la condición (1.34) se cumple. □

Lema 1.6.11. Sean $p : E \to B$ una función continua, $\{f_\alpha : B \to [0,1]\}_{\alpha\in\Lambda}$ una partición de la unidad localmente finita (i.e. $\forall x \in B$ existe un entorno N_x tal que $f_\alpha|_{N_x} = 0$ para todo α salvo una cantidad finita) y $V_\alpha = f_\alpha^{-1}((0,1])$. Si para todo α, p_{V_α} tiene la propiedad de extensión de secciones entonces p tiene la propiedad de extensión de secciones.

DEMOSTRACIÓN: Sean $g : B \to [0,1]$ continua, $A = g^{-1}(1)$, $V = g^{-1}((0,1])$ y s una sección de p_V. Tenemos que mostrar que $s|_A$ tiene una extensión a una sección global de p. Sean $V_T = \cup_{\alpha\in T} V_\alpha$ y

$$\mathcal{F} = \{(T, s_T) : T \subseteq \Lambda \text{ y } s_T \text{ es una sección de } p_{V\cup V_T} \text{ que extiende a } s|_A\}.$$

Definimos el siguiente orden en $\mathcal{F}$

$$(T, s_T) \leq (T', s_{T'}) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ll} a) & T \subseteq T' \\ b) & s_T(b) = s_{T'}(b) \quad \forall b \in B \text{ que verifica } \sum_{\alpha\in T} f_\alpha(b) = \sum_{\beta\in T'} f_\beta(b) > 0 \end{array} \right.$$

Observar que la condición b) es equivalente a

$$s_T(b) \neq s_{T'}(b) \Rightarrow f_\alpha(b) \neq 0 \text{ para algún } \alpha \in T' \setminus T.$$

Veamos que es un orden parcial:

- *Reflexiva:* Es claro que $(T, s_T) \leq (T, s_T)$.
- *Antisimétrica:* Si $(T_1, s_{T_1}) \leq (T_2, s_{T_2})$ y $(T_2, s_{T_2}) \leq (T_1, s_{T_1})$, es claro que $T_1 = T_2$. Además $s_{T_1}(b) = s_{T_2}(b)$ $\forall b \in V \cup V_{T_1}$ ya que $\sum_{\alpha\in T_2} f_\alpha(b) = \sum_{\alpha\in T_1} f_\alpha(b)$, luego $(T_1, s_{T_1}) = (T_2, s_{T_2})$.
- *Transitiva:* Si $(T_1, s_{T_1}) \leq (T_2, s_{T_2})$ y $(T_2, s_{T_2}) \leq (T_3, s_{T_3})$ es claro que $T_1 \subseteq T_3$. Sea $b \in B$ tal que $\sum_{\alpha\in T_1} f_\alpha(b) = \sum_{\alpha\in T_3} f_\alpha(b) > 0$ entonces $\sum_{\alpha\in T_1} f_\alpha(b) = \sum_{\alpha\in T_2} f_\alpha(b) = \sum_{\alpha\in T_3} f_\alpha(b) > 0$, porque $T_1 \subseteq T_2 \subseteq T_3$. Luego $s_{T_1}(b) = s_{T_2}(b) = s_{T_3}(b)$ y por lo tanto $(T_1, s_{T_1}) \leq (T_3, s_{T_3})$.

La familia $\mathcal{F}$ es no vacía ya que $(\emptyset, s) \in \mathcal{F}$. Sea $\mathcal{C} = \{(T_i, s_{T_i})\}_{i\in I}$ una cadena en $\mathcal{F}$; queremos ver que está acotada. Sea $\tilde{T} = \cup_{i\in I} T_i$; definiremos

$$\tilde{s} : V_{\tilde{T}} \cup V \to E_{V_{\tilde{T}}\cup V}$$

tal que $(\tilde{T}, \tilde{s}) \in \mathcal{F}$ y $(T_i, s_i) \leq (\tilde{T}, \tilde{s})$ $\forall i \in I$. Sea $b \in V_{\tilde{T}} \cup V$, como $\{f_\alpha : B \to [0,1]\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una partición de la unidad localmente finita, existe un entorno W de b tal que $W \subseteq V_\alpha^c$ salvo para una cantidad finita de α. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \tilde{T}$ tal que W interseca sólo a $V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \ldots V_{\alpha_r}$.

Sea $\rho = (T_\rho, s_{T_\rho}) \in \mathcal{C}$ tal que $\alpha_i \in T_\rho$ $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$. Definimos $\tilde{s} : V_{\tilde{T}} \cup V \to E$ como $\tilde{s}|_W = s_{T_\rho}|_W$. La definición anterior no depende del ρ elegido ya que si $\rho \leq (T', s_{T'})$

las funciones f_α con $\alpha \in T' \setminus T_\rho$ se anulan en W entonces $s_{T_\rho}|_W = s_{T'}|_W$ dado que $\sum_{\alpha\in T_\rho} f_\alpha(z) = \sum_{\alpha\in T'} f_\alpha(z)\ \forall z \in W$.

Sea W' un entorno de b' tal que W interseca a $V_{\beta_1}, \ldots, V_{\beta_t}$ con $b_i \in \tilde{T}$. Consideramos $\eta = (T_\eta, s_{T_\eta}) \in \mathcal{C}$ tal que $\beta_i \in \tilde{T}$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena podemos suponer que $\eta \leq \rho$. Si $s_{T_\eta}(z) \neq s_{T_\rho}(z)$ entonces $f_\alpha(z) \neq 0$ para algún $\alpha \in T_\rho \backslash T_\eta$, así que $z \notin W'$ y por tanto $s_{T_\eta}|_{W\cap W'} = s_{T_\rho}|_{W\cap W'}$.

Es claro por definición que $(\tilde{T}, \tilde{s}) \in \mathcal{F}$. Probemos que $(\tilde{T}, \tilde{s})$ es una cota de $\mathcal{C}$. Sea $(T, s_T) \in \mathcal{C}$; por construcción $T \subseteq \tilde{T}$. Supongamos que existe $b \in V_T \cup V$ tal que $\tilde{s}(b) \neq s_T(b)$. Sea $(T', s_{T'}) \in \mathcal{C}$ tal que existe un entorno W de b que interseca a una cantidad finita de V_{α_i} y $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in T$. Luego $\tilde{s}(b) = s_{T'}(b)$ y $s_T(b) \neq s_{T'}(b)$. Esto implica que $f_\alpha(b) \neq 0$ para $b \in V_T \cup V$ algún $\alpha \in T' \setminus T \subseteq \tilde{T} \setminus T$ y por lo tanto $(T, s_T) \leq (\tilde{T}, \tilde{s})$. Luego

$$(T_i, s_{T_i}) \leq (\tilde{T}, \tilde{s}) \quad \forall i \in I.$$

Por el lema de Zorn, $\mathcal{F}$ tiene elemento maximal al cual llamamos (M, s_M). La sección global de p buscada es s_M, y lo probaremos viendo que $V \cup V_M = B$. Supongamos que no, entonces existe un V_β no contenido en $V \cup V_M$.

Sea

$$h : V \cup V_M \cup V_\beta \to [0,1]$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & si \quad f_\beta(x) \leq \sum_{\alpha\in M} f_\alpha(x) + g(x) \\ \dfrac{\sum_{\alpha\in M} f_\alpha(x) + g(x)}{f_\beta(x)} & si \quad f_\beta(x) \geq \sum_{\alpha\in M} f_\alpha(x) + g(x) \end{cases}$$

Es claro que h es continua, ya que g, f_α y f_β no se anulan simultáneamente en $V \cup V_M \cup V_\beta$. Observemos que

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow \sum_{\alpha\in M} f_\alpha(x) + g(x) > 0$$

y s_M esta definida en $h^{-1}((0,1]) = V_M \cup V$. Como p_{V_β} tiene la propiedad de extensión de secciones, existe una sección s' de p_{V_β} que extiende a $s_M|_{h^{-1}(1)\cap V_\beta}$, (observar que $(V_M \cup V) \cap V_\beta$ es un halo alrededor de $h^{-1}(1) \cap V_\beta$), es decir $s'|_{h^{-1}(1)\cap V_\beta} = s_M|_{h^{-1}(1)\cap V_\beta}$.

Sea

$$s'' : V \cup V_M \cup V_\beta \to E$$
$$s''(x) = \begin{cases} s_M(x) & si \quad f_\beta(x) \leq \sum_{\alpha\in M} f_\alpha(x) + g(x) \\ s'(x) & si \quad f_\beta(x) \geq \sum_{\alpha\in M} f_\alpha(x) + g(x) \end{cases}$$

Si $f_\beta(x) = \sum_{\alpha\in M} f_\alpha(x) + g(x)$ entonces $h(x) = 1$ y $x \in V_\beta$ luego $x \in h^{-1}(1) \cap V_\beta$ y por construcción de s' tenemos que $s'(x) = s_M(x)$. Así s'' está bien definida y es continua. Si $s_M(b) \neq s''(b)$ para algún $b \in V_M \cup V$ entonces $h(b) < 1$. En efecto si $h(b) = 1$ sucede que $s_M(b) = s'(b) = s''(b)$, luego $f_\beta(b) > \sum_{\alpha\in M} f_\alpha(x) + g(x) \geq 0$ y por tanto $(M, s_M) < (M \cup \{\beta\}, s'')$ lo cual contradice la maximalidad de (M, s_M).

Concluimos que s_M es una sección global extendiendo a $s|_A$ y por la observación 1.6.8 p tiene la propiedad de extensión de secciones. □

El siguiente lema nos será útil en el teorema 1.6.13

Lema 1.6.12. Sean $p : E \to B$ una función continua y $\{f_\alpha : B \to [0,1]\}_{\alpha\in\Lambda}$ una partición de la unidad localmente finita. Denotemos $V_\alpha = f_\alpha^{-1}((0,1])$. Supongamos que para todo α existen F un espacio de Hausdorff contráctil y un homeomorfismo $\varphi_\alpha : p^{-1}(V_\alpha) \to V_\alpha \times F$, tal que el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(V_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & V_\alpha \times F \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}} & \\ & V_\alpha & \end{array}$$

siendo pr la proyección en la primera componente. Sean

$$E \times_B E = \{(x,y) \in E \times E : p(x) = p(y)\}$$

y

$$\begin{array}{rccc} q: & E \times_B E \times [0,1] & \to & E \times [0,1] \\ & (x,y,t) & \mapsto & (x,t) \end{array}$$

entonces q tiene la propiedad de extensión de secciones.

Demostración: Si π es la proyección en la primera componente, consideremos

$$g_\alpha : E \times [0,1] \xrightarrow{\pi} E \xrightarrow{p} B \xrightarrow{f_\alpha} [0,1]$$

Sea $U_\alpha = g_\alpha^{-1}((0,1])$. Observemos que

$$U_\alpha = g_\alpha^{-1}((0,1]) = (f_\alpha \circ p \circ \pi)^{-1}((0,1]) = (p\circ\pi)^{-1}(V_\alpha) = p^{-1}(V_\alpha) \times [0,1].$$

Como $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una partición de la unidad localmente finita de B, $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una partición de la unidad localmente finita de $E\times[0,1]$. Probaremos que q_{U_α} tiene la propiedad de extensión de secciones para todo $\alpha \in \Lambda$, luego por el lema 1.6.11 q tiene la propiedad de extensión de secciones.

Como

$$(x,y,t) \in q^{-1}(U_\alpha) \Leftrightarrow q(x,y,t) = (x,t) \in U_\alpha = p^{-1}(V_\alpha) \times [0,1] \Leftrightarrow p(x) \in V_\alpha, t \in [0,1]$$

y $p(x) = p(y)$, tenemos que $q^{-1}(U_\alpha) = p^{-1}(V_\alpha) \times_{V_\alpha} p^{-1}(V_\alpha) \times [0,1]$. Consideremos los φ_α mencionados en las hipótesis y formemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} q^{-1}(U_\alpha) = p^{-1}(V_\alpha) \times_{V_\alpha} p^{-1}(V_\alpha) \times [0,1] & \xrightarrow{q_{U_\alpha}} & U_\alpha = p^{-1}(V_\alpha) \times [0,1] \\ {\scriptstyle (\varphi_\alpha,\varphi_\alpha,\mathrm{id})}\downarrow \cong & & \\ (V_\alpha \times F) \times_{V_\alpha} (V_\alpha \times F) \times [0,1] & & \cong \downarrow {\scriptstyle \varphi_\alpha \times \mathrm{id}} \\ {\scriptstyle \psi}\downarrow \cong & & \\ V_\alpha \times F \times [0,1] \times F & \xrightarrow[\mathrm{pr}]{} & V_\alpha \times F \times [0,1] \end{array}$$

Aquí $\psi(a, f_1, b, f_2, t) = (a, f_1, t, f_2)$ es un homeomorfismo porque

$$(a, f_1, b, f_2, t) \in (V_\alpha \times F) \times_{V_\alpha} (V_\alpha \times F) \times [0,1] \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a, b \in V_\alpha \\ f_1, f_2 \in F \\ t \in [0,1] \\ a = \pi(a, f_1) = p\varphi_\alpha^{-1}(a, f_1) = p\varphi_\alpha^{-1}(b, f_2) = \pi(b, f_2) = b \end{array} \right.$$

Por el lema 1.6.7 pr tiene la propiedad de extensión de secciones. Luego q_{U_α} tiene la propiedad de extensión de secciones para todo α. □

1.6.2. Unicidad del espacio clasificante

Teorema 1.6.13. Sean B un espacio de Hausdorff paracompacto[2], E y F espacios de Hausdorff. Supongamos que $p : E \to B$ una aplicación continua, abierta, sobreyectiva y localmente trivial con fibra F (1.2.19). Si F es contráctil entonces p es una equivalencia de homotópía. Es más, podemos elegir una sección s de p tal que existe una homotopía entre id_E y $s \circ p$ que es vertical, i.e. conmuta con p.

Demostración: La idea de la prueba es construir s una sección global de p y luego ver que $s \circ p$ es homotópico a la identidad. De esta manera obtenemos que p es una equivalencia de homotopía. Para esto es suficiente probar que p tiene la propiedad de extensión de secciones. En efecto, si aplicamos la propiedad de extensión de secciones al caso $A = \emptyset$, obtenemos una sección global s. Observar que cualquier subconjunto de B es un halo alrededor de $\emptyset$, entonces si tenemos una sección en un subconjunto de B tenemos una sección global de p, tomar por ejemplo $s : \{p(x)\} \to x$.

Sea $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in B}$ el cubrimiento de B formado por abiertos U_x tales que para cada $x \in B$ existe un homeomorfismo $\varphi_x : p^{-1}(U_x) \xrightarrow{\simeq} U_x \times F$ con $p|_{p^{-1}(U_x)} = p_1 \circ \varphi_x$. Como B es paracompacto, el cubrimiento $\mathcal{U}$ puede ser refinado a un cubrimiento $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ tal que existe una partición de la unidad localmente finita f_α subordinada a $\mathcal{V}$ (i.e. $f_\alpha : B \to [0,1]$ continua con soporte en V_α para todo α y $\sum_\alpha f_\alpha = 1$).

Veamos que p_{V_α} tiene la propiedad de extensión de secciones para todo α. Sea $p_1 : V_\alpha \times F \to V_\alpha$ la proyección en la primer variable luego $p_{V_\alpha} = p_1 \circ \varphi_\alpha$ y

$$\varphi_\alpha : p^{-1}(V_\alpha) \xrightarrow{\simeq} V_\alpha \times F.$$

Por el lema 1.6.7 p_1 tiene la propiedad de extensión de secciones y como φ_α es un homeomorfismo, p_{V_α} también. Por otro lado por el lema 1.6.10 podemos sustituir V_α por $f_\alpha^{-1}((0,1])$, al cual seguiremos llamando V_α, y p_{V_α} sigue teniendo la propiedad de extensión de secciones. Entonces por el lema 1.6.11 p tiene la propiedad de extensión de secciones, luego podemos considerar $s : B \to E$ sección global de p.

Para terminar la prueba, veremos que existe una homotopía vertical de id_E a $s \circ p$. Luego como $p \circ s = \mathrm{id}_B$, p es una equivalencia homotópica. Sea

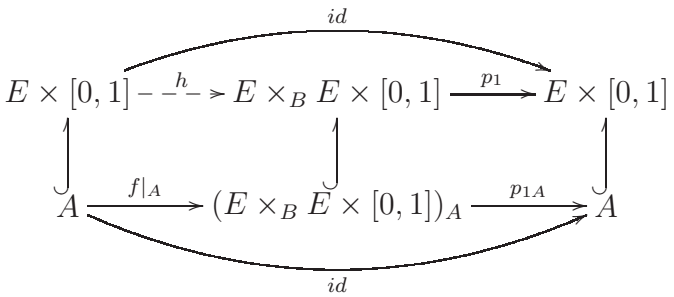
$$p_1 : E \times_B E \times [0,1] \to E \times [0,1]$$

[2]Espacios que son paracompactos: espacios compactos y de Hausdorff; espacios que verifican el segundo axioma de numerabilidad y son localmente compactos de Hausdorff; CW-complejos.

la proyección $p_1(x, y, t) = (x, t)$. Por el lema 1.6.12 p_1 tiene la propiedad de extensión de secciones . Sean $A = E \times \{0, 1\} \subseteq V = E \times ([0, \frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{4}, 1] \subseteq E \times [0, 1]$. El conjunto V es un halo alrededor de A y

$$f : V \to (E \times_B E \times [0, 1])_V$$
$$f(x, t) = \begin{cases} (x, x, t) & t < \frac{1}{4} \\ (x, s \circ p(x), t) & t > \frac{3}{4} \end{cases}$$

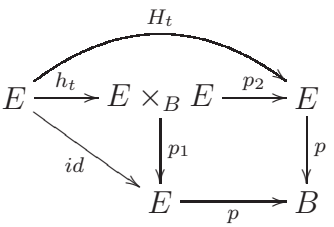
es una sección de $(p_1)_V$. Por la propiedad de extensión de secciones de p_1, la restricción de f a A tiene una extensión global h.



Sean p_2 la proyección en la segunda componente de $E \times_B E$ y

$$H : E \times [0, 1] \xrightarrow{h} E \times_B E \times [0, 1] \xrightarrow{p_2} E.$$

Verfiquemos que H es una homotopía vertical entre $s \circ p$ y id_E:

- $H(x, 0) = (p_2 \circ h)(x, 0) = (p_2 \circ f)(x, 0) = p_2(x, x, 0) = x$
- $H(x, 1) = (p_2 \circ h)(x, 1) = (p_2 \circ f)(x, 1) = p_2(x, (s \circ p)(x), 0) = (s \circ p)(x)$
- 

□

Teorema 1.6.14. Sea G un grupo. Supongamos que X_1 y X_2 son G-espacios de Hausdorff contráctiles donde la acción es libre y propiamente discontinua. Supongamos además que X_1/G y X_2/G son paracompactos. Entonces X_1/G y X_2/G son homotópicamente equivalentes.

Demostración: Por la observación B.4 $q_i : X_i \to X_i/G$ es un cubrimiento, $i = 1, 2$. Como X_i es contráctil (X_i, q_i) es el cubrimiento universal de X_i/G, además $\pi_1(X_i/G) = G$

y G es el grupo de las transformaciones de cubrimiento. Sea $X = X_1 \times X_2$ con la topología producto y la acción diagonal de G

$$g \cdot (x_1, x_2) = (g \cdot x_1, g \cdot x_2)$$

De esta manera tenemos que X es de Hausdorff y contráctil porque X_1 y X_2 lo son. Además, la acción en X es libre porque si

$$g \cdot (x_1, x_2) = (g \cdot x_1, g \cdot x_2) = (x_1, x_2) \Rightarrow g = e$$

y también es fácil ver que es propiamente discontinua. Probaremos que X_i/G es homotópicamente equivalente a X/G para $i = 1, 2$ y con esto queda probado el teorema. Sea $p_1 : X \to X_1$ la proyección, podemos definir $\tilde{p_1} : X/G \to X_1/G$ dado que

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Rightarrow \text{ existe } g \in G \text{ tal que } (x_1, x_2) = g \cdot (y_1, y_2) \Rightarrow x_1 = g \cdot y_1 \Rightarrow x_1 \sim y_1$$

Veamos que $\tilde{p_1}$ satisface las hipótesis del teorema 1.6.13 con $E = X/G$, $B = X_1/G$ y $F = X_2$. Sea $x \in X_1/G$ y $z \in X_1$ tal que $q_1(z) = x$. Sea U_z entorno de z tal que $g \cdot U_z \cap U_z = \emptyset$ para todo $g \neq e$ y $U_x = q_1(U_z)$. Ya vimos que $q_1|_{U_z} : U_z \to U_x$ es un homeomorfismo. Sean $q : X \to X/G$ y $V_x = q(U_z \times X_2)$ tal que $q|_{U_z \times X_2}$ es un homeomorfismo sobre V_x. Para ver la inyectividad alcanza tomar $q(a, b) = q(a', b')$ con a y $a' \in U_z$, luego existe $g \in G$ tal que $a = g \cdot a'$ y $b = g \cdot b'$ entonces $a \in U_z \cap g \cdot U_z$, luego $g = e$, $a = a'$ y $b = b'$. Además, por ser proyección es continua, abierta y sobreyectiva luego es un homeomorfismo. Probemos que si $\varphi_x = (q_1|_{U_z} \times \mathrm{id})^{-1} \circ q|_{U_z \times X_2}$ y π es la proyección en la primera componente, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} U_z \times X_2 & & \\ \downarrow{\scriptstyle q_1|_{U_z} \times \mathrm{id}} & \searrow^{q|_{U_z \times X_2}} & \\ U_x \times X_2 & \xrightarrow{\varphi_x} & V_x \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & \swarrow_{\tilde{p_1}} & \\ U_x & & \end{array} .$$

Sea $a \in U_z$ y $b \in X_2$, por definición el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p_1} & X_1 \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q_1} \\ X/G & \xrightarrow[\tilde{p_1}]{} & X_1/G \end{array}$$

entonces

$$\tilde{p_1}(q(a, b)) = q_1(p_1(a, b)) = q_1(a) = \pi(q_1(a), b) = \pi(q_1|_{U_z} \times \mathrm{id}(a, b))$$

Sea $q(a, b) \in \tilde{p_1}^{-1}(U_x)$ entonces $\tilde{p_1}(q(a, b)) = q_1(p_1(a, b)) = q_1(a) \in U_x$, entonces $q_1(a) \in q_1(U_z)$ entonces existen $c \in U_z$ y $g \in G$ tal que $c = g \cdot a$ luego

$$q(a, b) = q(g \cdot a, g \cdot b) = q(c, g \cdot b) \in V_x$$

luego $p_1^{-1}(U_x) = V_x \overset{\varphi_x}{\simeq} U_x \times X_2$. □

Capítulo 2

Construcción "+" de Quillen

La construcción "+", definida por Daniel G. Quillen, permite definir los K-grupos algebraicos de orden superior de una manera elegante. En este capítulo exponemos dicha construcción y algunas de sus propiedades.

En la primera sección definimos la homología singular de un espacio X con coeficientes en un $\pi_1(X)$-módulo. Esta homología generaliza a la homología singular con coeficientes en un grupo. En la segunda sección definimos el concepto de fibración, cofibración y función acíclica. Estas clases de funciones continuas aparecerán en el resto del capítulo. En la tercera sección definimos la construcción "+" y vemos las primeras propiedades. En la cuarta sección vemos como se puede ver la construcción "+" como una localización. En la quinta sección vemos para qué fibraciones $F \to E \to B$ sucede que $F^+ \to E^+ \to B^+$ es una fibración. Finalmente en la última sección hacemos algunos cálculos en el caso $X = \mathrm{BG}$. También expresamos los primeros tres grupos de homotopía de BG^+ como la homología de ciertos grupos relacionados con G. En general los espacios que consideramos en este capítulo son conexos, punteados y con el tipo de homotopía de un CW-complejo.

La bibliografía utilizada es la siguiente: [Hat02] para la sección 2.1; [Ber82a], [Swi02] y [Hat02] para la sección 2.2; [Lod76], [Ber82a] y [Ros94] para la sección 2.3; [Ber99] para la sección 2.4; [Ber82a] para la sección 2.5 y [Ros94] para la sección 2.6.

2.1. Homología con coeficientes locales

Los grupos de homología con coeficientes locales se definen para un espacio X arco-conexo tal que su revestimiento universal existe. Dichos grupos generalizan a los grupos de homología con coeficientes en un grupo abeliano G, ver ejemplo 2.1.1. El sistema de coeficientes locales se puede ver de dos maneras, como un $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$-módulo o como un G-fibrado. Ambos enfoques son equivalentes aunque el primero es más algebraico y el segundo más geométrico. En este trabajo adoptaremos el enfoque algebraico. Para ver la definición usando G-fibrados y ver que es equivalente a la que expondremos a continuación se puede consultar [Hat02] pag. 327.

2.1.1. Coeficientes locales vía módulos

Sea X un espacio arco-conexo, supondremos que su revestimiento universal existe y lo denotaremos por $p : \tilde{X} \to X$. Sea $\pi = \pi_1(X) = \pi_1(X, x_0)$.

El grupo de transformaciones del revestimiento $p : \tilde{X} \to X$ actúa en $\tilde{X}$ por evaluación. Dicho grupo de transformaciones se identifica con el grupo π porque el revestimiento es universal.

Recordemos cómo es la acción de π en $\tilde{X}$. Elegimos puntos base $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ y $x_0 \in X$ tales que $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Sean $[\gamma] \in \pi$ y $z \in \tilde{X}$. Por propiedad del revestimiento universal existe una aplicación continua $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ y $\gamma(0) = \tilde{x}_0$, mas aún $\tilde{\gamma}$ es único a menos de homotopía. Sea $w : I \to \tilde{X}$ un camino entre $\tilde{x}_0$ y z. Consideramos $v : I \to \tilde{X}$ tal que $p \circ v = p \circ w$ y $v(0) = \tilde{\gamma}(1)$. Se prueba que la siguiente es una acción de π en $\tilde{X}$ bien definida ([Ful95] pag. 182)

$$[\gamma] \cdot z = \varphi_\gamma(z) := v(1).$$

La acción de π en $\tilde{X}$ induce una acción en las n-cadenas singulares de $C_n(\tilde{X})$ de la siguiente manera: si $\sigma : |\Delta^n| \to \tilde{X}$ es un n-símplex singular y $\varphi_\gamma : \tilde{X} \to \tilde{X}$ es la transformación del revestimiento asociada a $\gamma \in \pi$, definimos

$$\varphi_\gamma \cdot \sigma := \varphi_\gamma \circ \sigma.$$

Extendemos la acción a $\mathbb{Z}[\pi]$ teniendo así una estructura de $\mathbb{Z}[\pi]$-módulo a izquierda de $C_n(\tilde{X})$.

Sea M un $\mathbb{Z}[\pi]$-módulo a izquierda; definimos

$$C_n(X; M) := C_n(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} M.$$

Observar que podemos ver a $C_n(\tilde{X})$ como un $\mathbb{Z}[\pi]$-módulo a derecha redefiniendo la acción $x \cdot \gamma = \gamma^{-1} \cdot x$. Sea ∂_s el morfismo diferencial en las cadenas singulares. Observemos que $\partial_s : C_n(\tilde{X}) \to C_{n-1}(\tilde{X})$ es equivariante. En efecto, sean $\gamma \in \pi$ y $\sigma : |\Delta^n| \to \tilde{X}$ luego

$$\partial_s(\gamma \cdot \sigma) = \partial_s(\varphi_\gamma \circ \sigma) = \varphi_\gamma \circ \sigma_{|\partial|\Delta^n|} = \gamma \cdot \partial_s(\sigma)$$

Definimos

$$\partial := \partial_s \otimes \mathrm{id}_M : C_n(X; M) \to C_{n-1}(X; M).$$

La homología de X con coeficientes locales en el módulo M es la homología del complejo de cadenas $\{C_\bullet(X; M), \partial\}$; lo denotamos por $H_\bullet(X; M)$.

Ejemplo 2.1.1. Si M es un $\mathbb{Z}[\pi]$-módulo trivial, entonces $H_n(X; M)$ es la homología de X con coeficientes en el grupo abeliano M.

Demostración: Para cada simplex $\sigma : |\Delta^n| \to X$ elegimos $\tilde{\sigma} : |\Delta^n| \to \tilde{X}$ tal que $p\tilde{\sigma} = \sigma$. De esta manera podemos definir un morfismo

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \to & C_n(\tilde{X}) \\ \sum n_i\sigma_i & \mapsto & \sum n_i\tilde{\sigma}_i \end{array}$$

que induce un morfismo

$$q : C_n(X) \otimes M \to C_n(\tilde{X}) \otimes M.$$

Por otro lado consideramos el morfismo inducido por el revestimiento $p : \tilde{X} \to X$

$$t : C_n(\tilde{X}) \otimes M \to C_n(X) \otimes M.$$

Sean $\tilde{\sigma} : |\Delta^n| \to \tilde{X}$, $m \in M$ y $\gamma \in \pi$. Como

$$t(\sigma \otimes m) = p \circ \tilde{\sigma} \otimes m = p \circ (\gamma \cdot \tilde{\sigma}) \otimes \gamma \cdot m = t(\gamma \cdot \tilde{\sigma} \otimes \gamma \cdot m)$$

podemos considerar $\overline{t}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} C_n(\tilde{X}) \otimes M & \xrightarrow{t} & C_n(X) \otimes M \\ \downarrow{\scriptstyle r} & \nearrow{\scriptstyle \overline{t}} & \\ C_n(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} M & & \end{array}$$

Como t es sobreyectiva, $\overline{t}$ es sobreyectiva. Como además $\overline{t} \circ r \circ q = \mathrm{id}$, $\overline{t}$ es inyectiva. Por lo tanto $\overline{t}$ es biyectiva y de esta manera podemos identificar $C_n(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} M$ con $C_n(X) \otimes M$.0 □

Ejemplo 2.1.2. Si $M = \mathbb{Z}[\pi]$ con la acción regular entonces $C_n(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} \mathbb{Z}[\pi] \cong C_n(\tilde{X})$ luego

$$H_n(X; \mathbb{Z}[\pi]) \cong H_n(\tilde{X}; \mathbb{Z}).$$

Ejemplo 2.1.3. Sea $p : X' \to X$ el revestimiento asociado a un subgrupo normal N de π. Entonces el grupo abeliano $\mathbb{Z}[\pi/N]$ libremente generado por las coclases γN, es un $\mathbb{Z}[\pi]$-módulo. Como

$$C_n(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} \mathbb{Z}[\pi/N] \cong C_n(X')$$

tenemos que

$$H_n(X; \mathbb{Z}[\pi/N]) \cong H_n(X'; \mathbb{Z}).$$

En general, si M es un $\mathbb{Z}[\pi]$-módulo, N el núcleo del siguiente morfismo

$$\rho : \pi \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(M) \qquad \rho(\gamma)(m) = \gamma \cdot m$$

y $p : X' \to X$ el revestimiento asociado a N, entonces

$$C_n(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} M \cong C_n(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} \mathbb{Z}[\pi/N] \otimes_{\mathbb{Z}[\pi/N]} M \cong C_n(X') \otimes_{\mathbb{Z}[\pi/N]} M.$$

De ahora en más $\otimes_\pi$ denotará el producto $\otimes_{\mathbb{Z}[\pi]}$.

Definición 2.1.4 (espacio débilmente simple)**.** Decimos que un espacio X es débilmente simple si la acción de $\pi_1(X)$ en $H_n(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ es trivial.

2.1.2. Morfismo inducido en homología

Sea $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ una función continua entre espacios arco-conexos con revestimientos universales $p_X : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ y $p_Y : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (Y, y_0)$ respectivamente. Sea $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ el morfismo inducido por f en los grupos fundamentales. Si M es un $\mathbb{Z}[\pi_1(Y)]$-módulo, definimos $f^*(M)$ como el $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$-módulo que consiste en el grupo abeliano M con la siguiente acción

$$\gamma \cdot m = f_*(\gamma) \cdot m$$

Sea $\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{X}, \tilde{x}_0) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \\ {\scriptstyle p_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_Y} \\ (X, x_0) & \xrightarrow[f]{} & (Y, y_0) \end{array}$$

Definimos

$$\begin{array}{rccc} f_n : & C_n(X; f^*(M)) & \to & C_n(Y; M) \\ & \sigma \otimes m & \mapsto & \tilde{f} \circ \sigma \otimes m. \end{array} \tag{2.1}$$

Para ver que f_n está bien definida tenemos que probar que

$$\tilde{f} \circ \sigma \otimes m = \tilde{f} \circ (\gamma \cdot \sigma) \otimes \gamma \cdot m.$$

Siguiendo los detalles de la acción del grupo fundamental en el revestimiento universal, es fácil ver que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\varphi_\gamma} & \tilde{X} \\ {\scriptstyle \tilde{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}} \\ \tilde{Y} & \xrightarrow[\varphi_{f\circ\gamma}]{} & \tilde{Y} \end{array},$$

luego

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f} \circ \sigma \otimes m & = & f_*(\gamma) \cdot (\tilde{f} \circ \sigma) \otimes f_*(\gamma) \cdot m \\ & = & \varphi_{f\circ\gamma} \circ \tilde{f} \circ \sigma \otimes f_*(\gamma) \cdot m \\ & = & \tilde{f} \circ \varphi_\gamma \circ \sigma \otimes f_*(\gamma) \cdot m \\ & = & \tilde{f} \circ (\gamma \cdot \sigma) \otimes \gamma \cdot m. \end{array}$$

El morfismo definido en (2.1) induce en homología el morfismo

$$f_\bullet : H_\bullet(X; f^*(M)) \to H_\bullet(Y; M).$$

2.2. Fibraciones, Cofibraciones y funciones acíclicas

2.2.1. Fibraciones

Definición 2.2.1 (PLH)**.** Decimos que una función continua $p : E \to B$ tiene la propiedad de levantamiento de homotopía con respecto al espacio X si para toda función $f : X \to E$ y toda homotopía $G : X \times I \to B$ de $p \circ f$ existe una homotopía $F : X \times I \to E$ tal que $f = F_0$ y $p \circ F = G$. Decimos que F es el levantado de G.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle \imath_0}\downarrow & \overset{F}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X \times I & \xrightarrow[G]{} & B \end{array} \qquad \imath_0(x) = (x, 0).$$

Definición 2.2.2 (fibración)**.** Decimos que $p : E \to B$ es una fibración si tiene la PLH para todo X.

Definición 2.2.3 (fibración de Serre)**.** Decimos que $p : E \to B$ es una fibración de Serre si tiene la PLH para todo $\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$, $n \geq 0$.

El espacio E se denomina espacio total de p y B es el espacio base de p.

Definición 2.2.4 (fibra)**.** Si $p : E \to B$ es una función continua, decimos que $F_b = p^{-1}(b)$ es la fibra de p sobre b.

Proposición 2.2.5. ([Hat02] pag. 405.) Si $p : E \to B$ es una fibración, las fibras $F_b = p^{-1}(b)$ sobre cada componente arco-conexa de B son homotópicamente equivalentes. □

A una fibración de Serre con espacio total E, espacio base B arco-conexo y fibra F la denotamos por

$$F \to E \to B.$$

Definición 2.2.6 (fibración homotópica)**.** Decimos que $F \to E \xrightarrow{p} B$ es una fibración homotópica si $p : E \to B$ es una fibración con fibra débilmente homotópica a F.

Observación 2.2.7. Sean $p : E \to B$ una fibración de Serre con fibra F y $f : A \to B$ una función continua, entonces $\overline{p} : E \times_B A \to A$ es una fibración con fibra F.

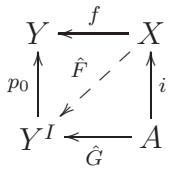
Ejemplo 2.2.8. Sea $1 \to \mathrm{G}_1 \to \mathrm{G}_2 \to \mathrm{G}_3 \to 1$ una sucesión exacta de grupos. Entonces $\mathrm{BG}_2 \to \mathrm{BG}_3$ es una fibración con fibra BG_1. En efecto, por proposición 1.4.10 y por teorema 1.3.20 tenemos que

$$\mathrm{BG}_2 \to \mathrm{BG}_3$$

es un fibrado localmente trivial con fibra BG_1. Como además BG_3 es un CW-complejo y en particular es un espacio paracompacto entonces $\mathrm{BG}_2 \to \mathrm{BG}_3$ es una fibración con fibra BG_1, ver [Swi02] pag. 56 y [Dol63].

2.2.2. Cofibraciones

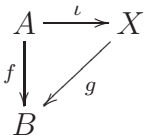
Definición 2.2.9 (PEH)**.** Una inclusión de espacios $\imath : A \to X$ tiene la propiedad de extensión de homotopía con respecto al espacio Y si para toda función $f : X \to Y$ y toda homotopía $G : A \times I \to Y$ de $f|_A$ existe una homotopía $F : X \times I \to Y$ de f que extiende a G.



Definición 2.2.10 (cofibración)**.** Decimos que una inclusión de espacios $\imath : A \to X$ es una cofibración si tiene la PEH para todo espacio Y.

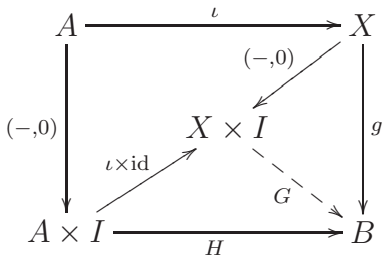
Proposición 2.2.11 ([Swi02] pag.75)**.** Si (X, A) es un CW-complejo relativo, entonces la inclusión $\iota : A \to X$ es una cofibración. □

Proposición 2.2.12. Sea $f : A \to B$ una función continua. Si $\iota : A \to X$ es una cofibración y $g : X \to B$ es una función continua tal que $g\iota$ es homotópica a f. Entonces existe $\tilde{g}$ homotópica a g tal que $f = \tilde{g}\iota$. En otras palabras, si tenemos un diagrama conmutativo a menos de homotopía como se detalla a continuación



podemos substituir g por una función continua $\tilde{g}$ homotópica a ella tal que el diagrama conmuta estrictamente.

Demostración: Sea $H : A \times I \to B$ tal que $H(-, 0) = \iota g$ y $H(-, 1) = f$. Como ι es cofibración existe $G : X \times I \to B$ tal que el diagrama conmuta



Si tomamos $\tilde{g} = G(-, 1)$, tenemos que $\tilde{g}$ es homotópica a $G(-, 0) = g$ y que $\tilde{g}\iota = f$. □

Observación 2.2.13. Sean $\iota : A \to X$ una cofibración y $f : A \to B$ una función continua, entonces $\overline{\iota} : B \to B \cup_A X$ es una cofibración.

2.2.3. Espacio de arcos asociado a una función continua.

Sea $f : A \to B$ una función continua, definimos el espacio

$$E_f = \{(a, \gamma) : a \in A, \gamma : I \to B, \gamma(0) = f(a)\} \subseteq A \times CO(I, B).$$

Proposición 2.2.14. La función continua $p : E_f \to B$, $p(a, \gamma) = \gamma(1)$ es una fibración.

Demostración: Como vimos en la proposición 1.2.10, la evaluación

$$\begin{array}{rccc} ev: & CO(I,B)\times I & \to & B \\ & (\gamma, s) & \mapsto & \gamma(s) \end{array}$$

es continuo. Luego $p : E_f \to B$ es una función continua.

Sean $G : X \times I \to B$ una homotopía y $g : X \to E_f$ un levantado de $G(x, 0)$. Observemos que $g(x) = (h(x), \gamma_x)$ con $h : X \to A$ y $\gamma_x : I \to B$. Sea

$$\begin{array}{rccc} F: & X\times I & \to & E_f \\ & (x,t) & \mapsto & (h(x), \psi(x,t)) \end{array} \qquad \psi(x,t)(s) = \begin{cases} \gamma_x(s(t+1)) & 0 \le s \le \frac{1}{1+t} \\ G(x, s(t+1)-1) & \frac{1}{1+t} \le s \le 1 \end{cases}$$

Esta concatenación de caminos tiene sentido dado que $G(x, 0) = pg(x) = \gamma_x(1)$. La función F es continua si lo es en cada componente. En la primera componente es continua por ser $h : X \to A$ una función continua. La función

$$\begin{array}{rcl} X\times I & \to & CO(I,B) \\ (x,t) & \mapsto & \psi(x,t) \end{array}$$

es continua por serlo

$$\begin{array}{rcl} X\times I\times I & \to & B \\ (x,t,s) & \mapsto & \psi(x,t)(s) \end{array}$$

por la proposición 1.2.10. □

Observación 2.2.15. Si $c_{f(a)}$ es el camino constante en $f(a)$, el espacio A se puede ver dentro de E_f de la siguiente manera

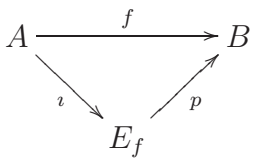
$$\begin{array}{rccc} \imath: & A & \to & E_f \\ & a & \mapsto & (a, c_{f(a)}) \end{array}$$

Además, A es un retracto por deformación de E_f:

$$\begin{array}{rccc} r: & E_f & \to & A \\ & (a,\gamma) & \mapsto & (a, c_{f(a)}) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} h_t: & E_f & \to & E_f \\ & (a,\gamma) & \mapsto & (a, t\gamma) \end{array} \qquad \text{siendo } (t\gamma)(s) = \gamma(ts)$$

Por lo tanto $\imath : A \to E_f$ es una equivalencia homotópica.

A la función $f : A \to B$ la podemos escibir como la composición de una equivalencia homotópica y una fibración



2.2.4. Fibra homotópica

Definición 2.2.16 (Espacio de caminos)**.** Dado (B, b_0) un espacio punteado, definimos el espacio de caminos de B como

$$\mathrm{P}\, B = \{\gamma \in CO(I, B) : \gamma(0) = b_0\}.$$

Consideramos $\underline{b_0}$ el camino de $\mathrm{P}\, B$ constante en b_0. Análogamente a la proposición 2.2.14 se prueba que la siguiente aplicación es una fibración de espacios punteados

$$p : (\mathrm{P}\, B, \underline{b_0}) \to (B, b_0) \qquad p(\gamma) = \gamma(1).$$

Es fácil ver que la fibra de p es el espacio de lazos de B

$$\Omega B := \{\gamma \in CO(I, B) : \gamma(0) = b_0 = \gamma(1)\}.$$

Definición 2.2.17. Sea $f : (A, a_0) \to (B, b_0)$ una función continua. Decimos que el espacio F_f en el siguiente producto fibrado es la fibra homotópica de f,

$$\begin{array}{ccc} F_f & \longrightarrow & \mathrm{P}\, B \\ {\scriptstyle \hat{p}}\downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle p} \\ A & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

Ejemplo 2.2.18. Sean X un CW-complejo conexo y la fibración asociada a la identidad en 1.5.3 $p : X \to \mathrm{B}(\pi_1(X))$. Como $\mathrm{P}\,\mathrm{B}(\pi_1(X))$ es contráctil, $\mathrm{P}\,\mathrm{B}(\pi_1(X)) \to \mathrm{B}(\pi_1(X))$ es una fibración con fibra $\Omega\,\mathrm{P}\,\mathrm{B}(\pi_1(X)) \cong \pi_1(X)$, luego $\mathrm{P}\,\mathrm{B}(\pi_1(X))$ es el revestimiento universal de $\mathrm{B}(\,\pi_1(X))$. Si consideramos el siguiente producto fibrado

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longrightarrow & \mathrm{PB}(\pi_1(X)) = \mathrm{B}(\tilde{\pi_1}(X)) \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \mathrm{B}(\pi_1(X)) \end{array}$$

vemos que la fibra homotópica de p es $\tilde{X}$ el revestimiento universal de X. Luego

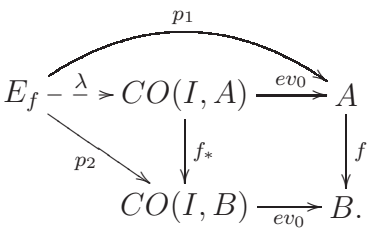
$$\tilde{X} \to X \to \mathrm{B}(\pi_1(X))$$

es una fibración.

Con el objetivo de relacionar la fibra homotópica y la fibra de una fibración, definiremos una propiedad equivalente a la de ser fibración.

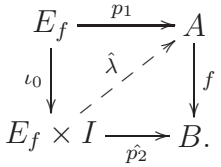
Definición 2.2.19 (función de levantamiento de caminos)**.** Sea $f : A \to B$ una función continua. Una función de levantamiento de caminos para f es una función $\lambda : E_f \to$

$CO(I, A)$ tal que el siguiente diagrama conmuta



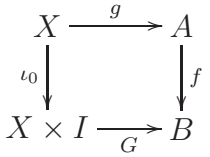
Proposición 2.2.20. Sea $f : A \to B$ una función continua, entonces f es una fibración si y solamente si existe una función de levantamiento de caminos para f.

Demostración: Si f es una fibración, la PLH con respecto al espacio E_f nos permite afirmar que existe $\hat{\lambda} : E_f \times I \to A$ tal que el siguiente diagrama conmuta

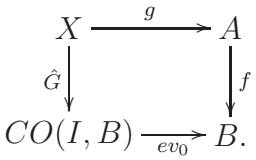


Por lo tanto existe $\lambda : E_f \to CO(I, A)$ tal que $\lambda(a, \gamma)(0) = a$ y $f \circ \lambda(a, \gamma) = \gamma$.

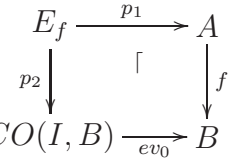
Reciprocamente, supongamos que existe $\lambda : E_f \to CO(I, A)$ una función de levantamiento de caminos para f. Consideramos un diagrama de la siguiente forma



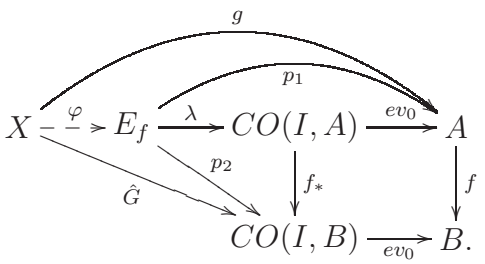
y lo expresamos como



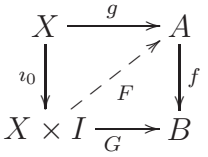
Como el siguiente diagrama es cartesiano



existe $\varphi : X \to E_f$ tal que el siguiente diagrama conmuta



Si definimos $F : X \times I \to A$, $F(x,t) = (\lambda \circ \varphi)(x)(t)$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo



y por lo tanto f tiene la PLH para X. □

Proposición 2.2.21. Sea $f : A \to B$ una fibración con fibra $F = f^{-1}(b_0)$. Consideramos $\lambda : E_f \to CO(I, A)$ una función de levantamiento de caminos para f. Entonces las siguientes aplicaciones son una inversa homotópica de la otra

$$g : F \to F_f \quad g(x) = (x, \underline{b_0}) \quad h : F_f \to F \quad h(a,\gamma) = [\lambda(a, \gamma^{-1})](1).$$

En particular, F y F_f son homotópicamente equivalentes.

Demostración: Es fácil verificar que la siguiente es una función continua

$$H : F_f \times I \to F_f \qquad H(a,\gamma,t) = (\lambda(a,\gamma^{-1})(t), \delta(a,\gamma,t)) \qquad \delta(a,\gamma,t) : \begin{array}{ccc} I & \to & B \\ s & \mapsto & \gamma(s(1-t)). \end{array}$$

Como

$$H(a,\gamma,0) = (a,\gamma) \qquad H(a,\gamma,1) = (\lambda(a,\gamma^{-1})(1), \underline{b_0}) = (g \circ h)(a,\gamma),$$

H resulta ser una homotopía entre id_{F_f} y $g \circ h$.

También es fácil de verificar que la siguiente aplicación es continua

$$G : F \times I \to F \qquad G(x,t) = [\lambda(x, \underline{b_0})](t).$$

Como

$$G(x,1) = [\lambda(x, \underline{b_0})](1) = h(x, \underline{b_0}) = (g \circ h)(x)) \qquad G(x,0) = [\lambda(x, \underline{b_0})](0) = x,$$

G resulta ser una homotopía entre id_F y $h \circ g$. □

Observación 2.2.22. Si $F \to A \xrightarrow{f} B$ es una fibración, definimos

$$\eta : \Omega B \to F \qquad \eta(w) = [\lambda(a_0, \omega^{-1})](1)$$

y obtenemos que la siguiente sucesión es exacta

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \Omega F & \xrightarrow{\Omega\iota} & \Omega A & \xrightarrow{\Omega f} & \Omega B & \xrightarrow{\eta} & F & \xrightarrow{\iota} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \uparrow & & & & & & & & & & \\ \cdots & \longleftarrow & \Omega^n B & \xleftarrow{\Omega^n f} & \Omega^n A & \xleftarrow{\Omega^n \iota} & \Omega^n F & \xleftarrow{\Omega^n \eta} & \Omega^{n+1} B & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

2.2.5. Funciones acíclicas

Definición 2.2.23 (espacio acíclico)**.** Decimos que un espacio X es acíclico si $\tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}) = 0$ para todo $n \geq 0$.

Proposición 2.2.24 ([Ber82a] pag. 35.)**.** Sea $f : X \to Y$ una función continua. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. La fibra homotópica F_f de f es un espacio acíclico.
2. Si M es un $\mathbb{Z}[\pi_1(Y)]$-módulo entonces
$$f_* : H_*(X; f^*(M)) \to H_*(Y; M)$$
es un isomorfismo.
3. Si $M = \mathbb{Z}[\pi_1(Y)]$ es el $\mathbb{Z}[\pi_1(Y)]$-módulo con la acción regular entonces
$$f_* : H_*(X; f^*(M)) \to H_*(Y; M)$$
es un isomorfismo.
4. Sean $\tilde{Y}$ el revestimiento universal de Y y $f' : X \times_Y \tilde{Y} \to \tilde{Y}$ la función continua inducida, entonces
$$H_*(f') : (X \times_Y \tilde{Y}; \mathbb{Z}) \to H_*(\tilde{Y}; \mathbb{Z})$$
es un isomorfismo. □

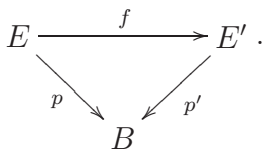
Definición 2.2.25 (función acíclica)**.** Una función acíclica es una función continua $f : X \to Y$ que verifica alguna y por lo tanto todas las condiciones de la proposición 2.2.24

Proposición 2.2.26. ([Ber82a] pag. 34) Consideremos un diagrama cartesiano de la forma

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle f} \\ A & \xrightarrow[g]{} & B \end{array} \qquad X = A \times_B Y$$

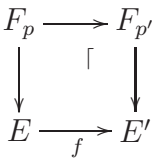
tal que f ó g es una fibración, entonces f es acíclica si y solamente si f' lo es.

Proposición 2.2.27. Sea el siguiente diagrama conmutativo



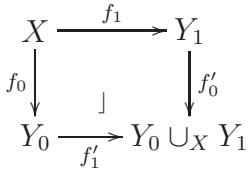
Entonces f es acíclica si y solamente si la aplicación inducida en las fibras homotópicas de p y p' lo es.

Demostración: El resultado se obtiene de aplicar la proposición 2.2.26 al siguiente diagrama cartesiano,



□

Proposición 2.2.28. ([Ber82a] pag. 43) Sean $f_1 : X \to Y_1$ una cofibración y el siguiente diagrama cocartesiano



entonces

- f_0 es acíclica $\Leftrightarrow$ f_0' es acíclica.
- f_1 es acíclica $\Leftrightarrow$ f_1' es acíclica.

□

2.2.6. Grupos perfectos

Definición 2.2.29 (grupo perfecto)**.** Un grupo G es perfecto si es igual a su conmutador,

$$\mathrm{G} = [\mathrm{G}, \mathrm{G}] =< aba^{-1}b^{-1} : a, b \in \mathrm{G} > .$$

Definición 2.2.30 (clausura perfecta)**.** La clausura perfecta de un grupo G es el mayor subrupo perfecto contenido en G y lo denotamos por $\mathcal{P}G$.

Proposición 2.2.31. Si $f : X \to Y$ es una función acíclica entonces existe un subgrupo P perfecto y normal de $\pi_1(X)$ tal que $\pi_1(Y) \simeq \pi_1(X)/P$

DEMOSTRACIÓN: Sean F la fibra homotópica de f y la inclusión $i : F \to X$. Consideramos la sucesión exacta

$$\pi_2(Y) \to \pi_1(F) \xrightarrow{\pi_1(i)} \pi_1(X) \xrightarrow{\pi_1(f)} \pi_1(Y) \to \pi_0(F).$$

Como $\tilde{H}_0(F) = 0$ entonces $\pi_0(F) = 1$, luego $\operatorname{Im} \pi_1(f) = \pi_1(Y)$. Como $H_1(F) = 0$, $\pi_1(F)$ es perfecto y $\ker \pi_1(f) = \operatorname{Im} \pi_1(i) = P$ también. Luego $\pi_1(Y) = \pi_1(X)/P$. □

Observación 2.2.32. ([Ber82a] pag. 40) Si $f : X \to Y$ es una función acíclica y $\pi_1(f)$ es un isomorfismo entonces f es una equivalencia de homotopía.

2.3. Construcción "+" de Quillen

En esta sección definiremos la construcción "+" de un CW-complejo X para un subgrupo perfecto y normal de $\pi_1(X)$. Una de las motivaciones para realizar esta construcción es que convierte un espacio acíclico en un espacio contráctil "matando" a la clausura perfecta de $\pi_1(X)$, ver proposición 2.3.11.

Proposición 2.3.1. ([FP90] pag. 18)

1. Sea (X, A) una adjunción de n-células y sea $p : \tilde{X} \to X$ un revestimiento. Entonces el par $(\tilde{X}, \tilde{A})$ con $\tilde{A} = p^{-1}(A)$ es también una adjunción de n-células.

2. Sea (X, A) una adjunción de n-células con $n > 2$, y sea $p : \tilde{A} \to A$ un revestimiento. Entonces existen una adjunción de n-células $(\tilde{X}, \tilde{A})$ y un revestimiento $q : \tilde{X} \to X$, tales que $p = q|_{\tilde{A}}$. En particular, si p es el revestimiento universal de A entonces q es el revestimiento universal de X.

DEMOSTRACIÓN:

1. Sea Λ el conjunto de índices de las n-células pegadas en la adjunción (X, A),

$$X = A \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e^n_\lambda.$$

Para cada $\lambda \in \Lambda$, elegimos una función característica $c_\lambda : \mathbb{D}^n \to X$ de la célula e^n_λ. Sean $e_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ el punto distinguido del borde de $\mathbb{D}^n$,

$$\tilde{\Lambda} = \{(z, \lambda) \in \tilde{X} \times \Lambda : p(z) = c_\lambda(e_0)\}$$

y para $\tilde{\lambda} = (z, \lambda)$ sea $c_{\tilde{\lambda}}$ el único levantado de c_λ con $c_{\tilde{\lambda}}(e_0) = z$. Sea

$$\mathbb{D}^n \times \tilde{\Lambda} = \coprod_{\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}} \mathbb{D}^n \qquad \tilde{f} : \mathbb{D}^n \times \tilde{\Lambda} \to \tilde{X} \qquad \tilde{f}(s, \tilde{\lambda}) = c_{\tilde{\lambda}}(s).$$

Observemos que si $(s, \tilde{\lambda}) \in S^{n-1} \times \tilde{\Lambda}$ entonces $pc_{\tilde{\lambda}}(s) = c_\lambda(s) \in A$ y por lo tanto $\tilde{f}(s, \tilde{\lambda}) = c_{\tilde{\lambda}}(s) \in \tilde{A}$. Sea $f = \tilde{f}|_{S^{n-1} \times \tilde{\Lambda}}$. Veamos que

$$\tilde{X} = \tilde{A} \bigcup_f (\mathbb{D}^n \times \tilde{\Lambda}) = \tilde{A} \bigcup_{\lambda \in \tilde{\Lambda}} e^n_\lambda. \tag{2.2}$$

Llamemos Y al espacio de la derecha. Claramente Y es un subconjunto de $\tilde{X}$ y la inclusión es continua. Sea $\tilde{x} \in \tilde{X} \setminus \tilde{A}$, veamos que $\tilde{x}$ corresponde a un único punto de $\overset{\circ}{\mathbb{D}}{}^n \times \tilde{\Lambda}$. Como $p(\tilde{x}) \notin A$ existen un único $\overline{\lambda} \in \Lambda$ y un único $s \in \overset{\circ}{\mathbb{D}}{}^n$ tales que $p(\tilde{x}) = c_{\overline{\lambda}}(s)$. Sean l el segmento en $\mathbb{D}^n$ que une s con e_0, $w : l \to \tilde{X}$ el único levantado de $c_{\overline{\lambda}}$ con $w(s) = \tilde{x}$ y $\tilde{\lambda} = (w(e_0), \lambda)$. Como $p(w(e_0)) = c_{\overline{\lambda}}(e_0)$ entonces $\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}$. Considerando $c_{\tilde{\lambda}}$ que es el único levantado de $c_{\overline{\lambda}}$ tal que $c_{\tilde{\lambda}}(e_0) = w(e_0)$ tenemos $c_{\tilde{\lambda}}(s) = w(s) = \tilde{x}$, luego $\tilde{X} \subseteq Y$. Hemos probado que (2.2) es una igualdad como conjuntos.

Veamos que las topologías coinciden, es decir, que un abierto $U \subset \tilde{X}$ es abierto si y solo si $U \cap \tilde{A}$ es abierto en $\tilde{A}$ y $c^{-1}_{\tilde{\lambda}}(U)$ es abierto en $\mathbb{D}^n$ para cada $\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}$. La implicación directa es trivial, probemos la otra implicación. Como p es un revestimiento, existe un cubrimiento de abiertos $\{V_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ de $\tilde{X}$ tal que $V_\gamma \to p(V_\gamma)$ es un homeomorfismo y $p(V_\gamma)$ es abierto en X para todo $\gamma \in \Gamma$. Para probar que U es abierto en $\tilde{X}$ alcanza probar que $U \cap V_\gamma$ es abierto para cada γ. Podemos suponer que $U \subset V_\gamma$, luego U es abierto en $\tilde{X}$ si y solo si $p(U)$ es abierto en X. Por hipótesis tenemos que $U \cap \tilde{A}$ es abierto en $\tilde{A}$ luego $p(U) \cap A = p(U \cap \tilde{A})$ es abierto en A, además el siguiente conjunto resulta ser abierto en $\mathbb{D}^n$

$$c^{-1}_\lambda(p(U)) = \bigcup_{\{\tilde{\lambda} = (z, \lambda)\}} c^{-1}_{\tilde{\lambda}}(U)$$

luego U es abierto en $\tilde{X}$.

2. Como cada célula pegada en la adjunción (X, A) es de dimensión mayor que dos, las funciones de pegado tienen dominio simplemente conexo, luego tienen levantados a $\tilde{A}$. Usando estas funciones continuas construimos $\tilde{X}$. □

Teorema 2.3.2. Sean X un CW-complejo conexo, y N un subgrupo perfecto y normal de $\pi = \pi_1(X)$. Podemos obtener un nuevo CW complejo X^+ mediante la adjunción de células de dimensión 2 y 3 a X de modo que se satisfagan las siguientes condiciones:

1. El morfismo $\iota_* : \pi_1(X) \to \pi_1(X^+)$ inducido por la inclusión es la proyección $\pi \to \pi/N$.

2. La inclusión $\iota : X \to X^+$ es acíclica.

Demostración: Sean $g_\alpha : S^1 \to X$ funciones continuas tales que sus clases de homotopía forman un conjunto de generadores de N,

$$N = < [g_\alpha] : \alpha \in \Lambda > .$$

Para cada $\alpha \in \Lambda$ adjuntamos a X una célula de dimensión 2 vía la función continua g_α obteniendo así un CW-complejo X_1. La inclusión $\iota : X \to X_1$ induce a nivel de grupos fundamentales el morfismo de proyección $\iota_* : \pi_1(X) \to \pi_1(X)/N = \pi_1(X_1)$, hecho garantizado por el teorema de Van Kampen.

Sea $p_{X_1} : \tilde{X}_1 \to X_1$ el revestimiento universal de X_1. Consideremos $\hat{X} = p_{X_1}^{-1}(X)$ y $p_X = p_{X_1}|_{\hat{X}}$

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \hookrightarrow & \tilde{X}_1 \\ {\scriptstyle p_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{X_1}} \\ X & \hookrightarrow & X_1 \end{array}$$

Observemos que p_X es un revestimiento dado que p_{X_1} lo es. En particular es una fibración con la misma fibra que p_{X_1} que por ser revestimiento universal es $\pi_1(X_1) = \pi/N$.

Consideramos la sucesión exacta de homotopía asociada a la fibración $p_X : \hat{X} \to X$,

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(\pi/N) \longrightarrow \pi_1(\hat{X}) \xrightarrow{p_{X*}} \pi_1(X) \longrightarrow \pi_0(\pi/N) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \pi_1(\hat{X}) \longrightarrow \pi \longrightarrow \pi/N \longrightarrow 0$$

luego $\pi_1(\hat{X}) = N$.

Como (X_1, X) es una adjunción de células de dimensión 2

$$X_1 = X \bigcup_{\alpha\in\Lambda} e^2_\alpha$$

por la proposición 2.3.1 $(\tilde{X}_1, \hat{X})$ es también una adjunción de células de dimensión 2

$$\tilde{X}_1 = \hat{X} \bigcup_{(i,\alpha)\in\pi/N\times\Lambda} e^2_{i,\alpha}$$

Sean $\overline{c}_\alpha$ la función característica asociado a la célula e^2_α y

$$\tilde{\Lambda} = \{(z, \alpha) \in \tilde{X}_1 \times \Lambda : p_{X_1}(z) = \overline{c}_\alpha(e_0)\}.$$

Como para cada α existen únicamente π/N elementos de $\tilde{X}_1$ tales que $p_{X_1}(z) = \overline{c}_\alpha(e_0)$ tenemos que $\tilde{\Lambda} = \pi/N \times \Lambda$.

Denotemos por $[e^2_\alpha]$ a la clase de homología del ciclo relativo $\overline{c}_\alpha : \mathbb{D}^2 \to \tilde{X}_1$. Como $(\tilde{X}_1, \hat{X})$ es un buen par, entonces

$$H_n(\tilde{X}_1, \hat{X}; \mathbb{Z}) \simeq \tilde{H}_n(\tilde{X}_1/\hat{X}; \mathbb{Z}) = \tilde{H}_n(\bigvee_{(i,\alpha)\in\pi/N\times\Lambda} S^2_\alpha; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} \mathbb{Z}[\pi/N][e^2_\alpha] & n = 2 \\ 0 & n \neq 2 \end{cases} \tag{2.3}$$

Sea la sucesión exacta de homología asociada al par $(\tilde{X}_1, \hat{X})$

$$\cdots \longrightarrow H_3(\tilde{X}_1, \hat{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} H_2(\hat{X}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(\tilde{X}_1; \mathbb{Z}) \underset{j}{\overset{s}{\rightleftarrows}} H_2(\tilde{X}_1, \hat{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} H_1(\hat{X}; \mathbb{Z}) \tag{2.4}$$

Observemos que $H_3(\tilde{X}_1, \hat{X}; \mathbb{Z}) = 0$ por (2.3) y $H_1(\hat{X}; \mathbb{Z}) = \pi_1(\hat{X})_{ab} = N/[N, N] = 0$. La sucesión (2.4) es exacta corta que se escinde porque $H_2(\tilde{X}_1, \hat{X}; \mathbb{Z})$ es un $\mathbb{Z}[\pi/N]$-módulo libre en $[e^2_\alpha]$ generadores. Como $\tilde{X}_1$ es simplemente conexo, el morfismo de Hurewicz $\mathcal{H}_2 : \pi_2(\tilde{X}_1) \to H_2(\tilde{X}_1; \mathbb{Z})$ es un isomorfismo. Como p_{X_1} es un revestimiento entonces

$$p_{X_1 *} : \pi_2(\tilde{X}_1) \to \pi_2(X_1)$$

es un isomorfismo. Sean $h_\alpha : S^2 \to X_1$ tal que $\mathcal{H}_2(p_{X_1})^{-1}_*([h_\alpha]) = s([e^2_\alpha])$ y $[S^2]$ el generador estándar de $H_2(S^2; \mathbb{Z})$

$$\pi_2(X_1) \xrightarrow{p^{-1}_{X_1 *}} \pi_2(\tilde{X}_1) \xmapsto{\mathcal{H}_2} H_2(\tilde{X}_1; \mathbb{Z})$$

$$[h_\alpha : S^2 \to X_1] \longmapsto [\tilde{h}_\alpha : S^2 \to \tilde{X}_1] \longmapsto (\tilde{h}_\alpha)_*([S^2]) = s([e^2_\alpha])$$

Consideremos

$$0 \longrightarrow H_2(\hat{X}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(\tilde{X}_1; \mathbb{Z}) \underset{j}{\overset{s}{\rightleftarrows}} H_2(\tilde{X}_1, \hat{X}; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

y observemos que $[h_\alpha] \in \pi_2(X_1) \simeq \pi_2(\tilde{X}_1) \simeq H_2(\tilde{X}_1; \mathbb{Z})$ y $[e^2_\alpha] \in H_2(\tilde{X}_1, \hat{X}; \mathbb{Z})$. Para cada $\alpha \in \Lambda$ adjuntamos a X_1 una célula de dimensión 3 vía la función h_α obteniendo un CW-complejo

$$X^+ = X_1 \bigcup_{\alpha \in \Lambda} e^3_\lambda$$

Por proposición 2.3.1 parte 2) podemos constuir $p_{\tilde{X}^+} : \tilde{X}^+ \to X^+$ tal que $p_{\tilde{X}^+}$ es el revestimiento universal de X^+, $(\tilde{X}^+, \tilde{X}_1)$ es una adjunción de células y $p_{X_1} = p_{X^+}|_{\tilde{X}_1}$.

Veamos que X^+ satisface las condiciones del enunciado. Probemos que $H_n(\tilde{X}^+, \hat{X}; \mathbb{Z}) = 0$, es decir que el complejo $C_\bullet(\tilde{X}^+, \hat{X}; \mathbb{Z})$ es acíclico. La sucesión exacta asociada a la terna $(\tilde{X}^+, \tilde{X}_1, \hat{X})$ es

$$\ldots \to H_n(\tilde{X}_1, \hat{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota_*} H_n(\tilde{X}^+, \hat{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\jmath_*} H_n(\tilde{X}^+, \tilde{X}_1; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\tilde{X}_1, \hat{X}; \mathbb{Z}) \to \ldots \tag{2.5}$$

Observemos que

$$H_n(\tilde{X}^+, \tilde{X}_1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \mathbb{Z}[\pi/N][e^3_\alpha] & n = 3 \\ 0 & n \neq 3 \end{cases} \qquad H_n(\tilde{X}_1, \hat{X}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \mathbb{Z}[\pi/N][e^2_\alpha] & n = 2 \\ 0 & n \neq 2 \end{cases}$$

y $\partial : H_3(\tilde{X}^+, \tilde{X}_1; \mathbb{Z}) \to H_2(\tilde{X}_1, \hat{X}; \mathbb{Z})$ es un isomorfismo tal que $\partial([e^3_\alpha]) = [e^2_\alpha]$ (por construcción del morfismo de conexión de la sucesión en cuestión). Concluimos que $H_n(\tilde{X}^+, \hat{X}; \mathbb{Z}) = 0 \ \forall n \geq 0$.

Por lo tanto la siguiente sucesión es exacta

$$\ldots \to C_n(\tilde{X}^+, \hat{X}; \mathbb{Z}) \to \ldots \to C_2(\tilde{X}^+, \hat{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\tilde{X}^+, \hat{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\tilde{X}^+, \hat{X}; \mathbb{Z}) \to 0. \tag{2.6}$$

Concluimos que si $M = \mathbb{Z}[\pi/N]$ es el $\mathbb{Z}[\pi/N]$-módulo con la acción regular el morfismo

$$\iota_* : H_n(X; \iota^*(M)) \to H_n(X^+; M)$$

es un isomorfismo. Luego por proposición 2.2.24, $\iota : X^+ \to X$ es una función acíclica. □

Observación 2.3.3. Como (X^+, X) es un CW-complejo relativo, la inclusión $\iota : X \to X^+$ es una cofibración.

Observación 2.3.4. Consideremos a $\mathbb{Z}$ como un $\mathbb{Z}[\pi_1(X)/N]$-módulo trivial, luego $\iota^*(\mathbb{Z})$ es un $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$-módulo trivial, luego

$$H_*(X; \mathbb{Z}) \cong H_*(X^+; \mathbb{Z}).$$

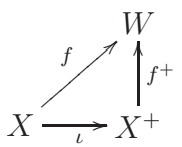
Para probar la unicidad del espacio X^+ necesitamos el siguiente resultado

Lema 2.3.5 ([Ber82a] pag. 46)**.** Sean $g : X \to Y$ y $f : X \to Z$ funciones continuas tales que

- g es una cofibración acíclica
- Si f_* y g_* son los morfismos inducidos a nivel de grupo fundamental entonces $\ker g_* \leq \ker f_*$.

Entonces existe una función continua $h : Y \to Z$ única a menos de homotopía tal que $h \circ g = f$. □

Proposición 2.3.6. Si W es un CW-complejo y $f : X \to W$ una función continua tal que $\pi_1(f)(N) = f_*(N) = 0$ entonces existe una función continua $f^+ : X^+ \to W$ única a menos de homotopía tal que



Demostración: La función $\iota : X \to X^+$ es una cofibración acíclica y $\ker \iota_* = N \leq \ker f_*$ luego por el lema 2.3.5 existe $f^+ : X^+ \to W$ único a menos de homotopía tal que $f^+ \circ \iota = f$. □

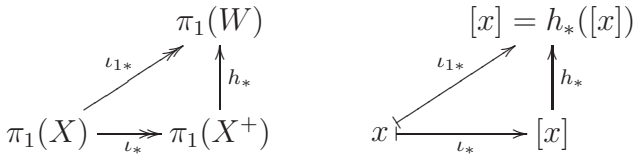
Proposición 2.3.7. Si W es un CW-complejo y $\iota_1 : X \to W$ una función continua tal que

1. El morfismo $\iota_{1*} : \pi_1(X) \to \pi_1(W)$ inducido en los grupos fundamentales es la proyección $\pi \to \pi/N$.

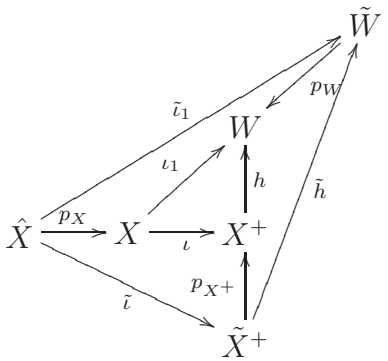
2. $\iota_1 : X \to W$ es una cofibración acíclica.

entonces existe una equivalencia homotópica $h : X^+ \to W$ tal que $h|_X = \iota_1$.

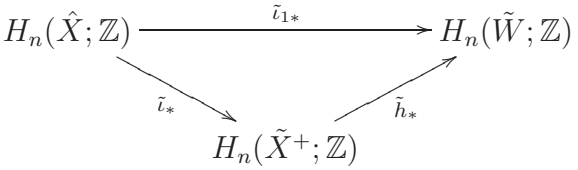
Demostración: Aplicando la proposición 2.3.6 consideramos la función continua $h = \iota_1^+ : X^+ \to W$. Para ver que es una equivalencia homotópica aplicaremos el teorema D.19. El morfismo $h_* : \pi_1(X^+) \to \pi_1(W)$ es la identidad dado que el siguiente diagrama conmuta



Consideremos las funciones continuas levantadas de los revestimientos universales $p_{X^+} : \tilde{X}^+ \to X^+$ y $p_W : \tilde{W} \to W$ y al revestimiento $p_X : \hat{X} \to X$ tal que $\pi_1(\hat{X}) = N$. Obtenemos el siguiente diagrama conmutativo



Aplicando el funtor $H_n(-;\mathbb{Z})$ al triángulo exterior obtenemos



Sea $M = \mathbb{Z}[\pi/N]$ con la acción regular. Observemos que $\iota^*(M)$ y $\iota_1^*(M)$ son exactamente el mismo módulo debido a que ι y ι_1 inducen el mismo morfismo a nivel de grupos fundamentales. Luego obtenemos que

$$H_n(X;\iota_1^*(M)) \simeq H_n(X;\iota^*(M)) \simeq H_n(\hat{X};\mathbb{Z}) \quad H_n(\tilde{X}^+;\mathbb{Z}) \simeq H_n(X^+;M) \quad H_n(\tilde{W};\mathbb{Z}) \simeq H_n(W;M)$$

Por hipótesis tenemos que $\iota_{1*} : H_n(X;\iota_1^*(M)) \to H_n(W;M)$ y $\iota_* : H_n(X;\iota^*(M)) \to H_n(X^+;M)$ son isomorfismos. Por otro lado estos morfismos coinciden con $\tilde{\iota}_{1*}$ y $\tilde{\iota}_*$ respectivamente, luego estos últimos son también isomorfismos. Concluimos que

$$\tilde{h}_* : H_n(\tilde{X}^+;\mathbb{Z}) \to H_n(\tilde{W};\mathbb{Z})$$

es un isomorfismo $\forall n \geq 0$ y aplicando el teorema D.21 obtenemos que $\tilde{h}$ es una equivalencia homotópica. Consideremos

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\tilde{X}^+) & \xrightarrow{\tilde{h}_*} & \pi_n(\tilde{W}) \\ {\scriptstyle p_{X^+*}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{W*}} \\ \pi_n(X^+) & \xrightarrow[h_*]{} & \pi_n(W) \end{array} \tag{2.7}$$

al ser p_{X^+} y p_W revestimientos universales tenemos que los morfismos correspondientes a las flechas verticales del diagrama (2.7) son isomorfismos para todo $n \geq 0$. Como el morfismo superior es un isomorfismo por ser $\tilde{h}$ una equivalencia homotópica, tenemos que

$$h_* : \pi_n(X^+) \to \pi_n(W)$$

es un isomorfismo para todo $n \geq 2$. Luego por el teorema D.19 tenemos que h es una equivalencia homotópica. □

Proposición 2.3.8 ([Ber82b])**.** Sean X un CW-complejo conexo y X^+ la construcción "+" respecto a $\mathcal{P}\pi_1(X)$. Si $g : X \to W$ es una cofibración acíclica y $\mathcal{P}\pi_1(W) = 1$ entonces $W \simeq X^+$.

2.3.1. Funtorialidad de la construcción "+"

La construcción realizada en el teorema 2.3.2 depende de una elección de generadores de N. Por esta razón no podemos decir que tenemos una asignación estrictamente funtorial $X \mapsto X^+$. Sin embargo por proposición 2.3.7 X^+ está definido a menos de homotopía. La proposición 2.3.9 nos permite definir la construcción "+" para determinadas aplicaciones continuas de CW-complejos y está bien definido a menos de homotopía.

Consideramos la categoría $\mathcal{C}$ de clases de homotopía de CW-complejos conexos cuyos morfismos son aquellas funciones continuas que verifican la condición de la proposición 2.3.6 para $N = \mathcal{P}(\pi_1(X))$ y $N' = \mathcal{P}(\pi_1(Y))$. La contrucción "+" es un funtor $+ : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

Para casos particulares, como veremos en el tercer capítulo, se puede considerar modelos funtoriales estrictos.

Proposición 2.3.9. Sean $f : X \to Y$ una función continua entre CW-complejos conexos, N y N' subgrupos normales y perfectos de $\pi_1(X)$ y $\pi_1(Y)$ respectivamente tales que $f_*(N) \subseteq N'$. Si consideramos X^+ y Y^+ las construcciones $+$ respecto a los subgrupos mencionados entonces existe una función continua $f^+ : X^+ \to Y^+$ única a menos de homotopía tal que

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\iota_Y} & Y^+ \\ {\scriptstyle f}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f^+} \\ X & \xrightarrow[\iota_X]{} & X^+ \end{array}$$

Demostración: Es inmediato de la proposición 2.3.6, aplicada a la función f^+ es el $(\iota_Y \circ f)^+$ de dicha proposición. □

2.3.2. Algunas propiedades

Proposición 2.3.10. Sean X e Y dos CW complejos conexos, N y N' subgrupos normales y perfectos de $\pi_1(X)$ y $\pi_1(Y)$ respectivamente, entonces Si $X \times Y$ y $X^+ \times Y^+$ son CW-complejos entonces $(X \times Y)^+ \simeq X^+ \times Y^+$.

Demostración: Consideremos $\imath_X : X \to X^+$ y $\imath_Y : Y \to Y^+$ las construcciones "+" de X e Y con respecto a N y N' respectivamente. Consideremos la función continua $\imath = (\imath_X, \imath_Y) : X \times Y \to X^+ \times Y^+$ y veamos que verifica las hipótesis de la proposición 2.3.7. A nivel de grupos fundamentales $\imath_* = (\imath_{X*}, \imath_{Y*})$ es la proyección

$$\pi_1(X) \times \pi_1(Y) \to \pi_1(X) \times \pi_1(Y)/N \times N'.$$

Consideremos $\overline{X} \to X$ y $\overline{Y} \to Y$ los revestimientos de X e Y correspondientes a N y N' respectivamente, aplicando la fórmula de Künneth ([Hat02] pag. 275.) obtenemos las siguientes identidades

$$\begin{aligned}
H_n(X \times Y; \mathbb{Z}[\pi_1(X) \times \pi_1(Y)]) &= H_n(\overline{X} \times \overline{Y}; \mathbb{Z}) \\
&= (\oplus_i H_i(\overline{X}; \mathbb{Z}) \otimes H_{n-i}(\overline{Y}; \mathbb{Z})) \bigoplus (\oplus_i \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_i(\overline{X}; \mathbb{Z}), H_{n-i-1}(\overline{Y}; \mathbb{Z}))) \\
&= (\oplus_i H_i(\tilde{X}^+; \mathbb{Z}) \otimes H_{n-i}(\tilde{Y}^+; \mathbb{Z})) \bigoplus (\oplus_i \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_i(\tilde{X}^+; \mathbb{Z}), H_{n-i-1}(\tilde{Y}^+; \mathbb{Z}))) \\
&= H_n(\tilde{X}^+ \times \tilde{Y}^+; \mathbb{Z}) \\
&= H_n(X^+ \tilde{\times} Y^+; \mathbb{Z}) \\
&= H_n(X^+ \times Y^+; \mathbb{Z}[\pi_1(X) \times \pi_1(Y)/N \times N'])
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.3.11. Sean X un CW complejo conexo tal que $\mathcal{P}\pi_1(X) = [\pi_1(X), \pi_1(X)]$ y X^+ la construcción "+" respecto a $\mathcal{P}\pi_1(X)$, entonces

$$X \text{ es acíclico } \Leftrightarrow X^+ \text{ es contráctil}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
X^+\text{es contráctil} &\Leftrightarrow \pi_n(X^+) = 0 \quad \forall n \geq 1 \\
&\Leftrightarrow H_n(X^+; \mathbb{Z}) = 0 \text{ y } \pi_1(X^+) \text{ es abeliano} \\
&\Leftrightarrow X \text{ es acíclico.}
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.3.12. Sea $\hat{X}$ el revestimiento de X asociado a N un subrupo normal de $\pi = \pi_1(X)$ que contiene a $\mathcal{P}\pi$. Entonces $\hat{X}^+ \to X^+$ es el revestimiento asociado al subgrupo $\mathrm{N}/\mathcal{P}\pi$ de $\pi/\mathcal{P}\pi = \pi_1(X^+)$.

Demostración: Consideramos el espacio clasificante de π/N y la aplicación continua $p : X \to \mathrm{B}(\pi/\mathrm{N})$ correspondiente a la proyección $\pi \to \pi/\mathrm{N}$ en la biyección expresada en 1.5.3. Por el lema 2.3.5 existe $f : X^+ \to \mathrm{B}(\pi/\mathrm{N})$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
X^+ & & \\
{\scriptstyle \iota_X}\uparrow & \searrow^{f} & \\
X & \xrightarrow[p]{} & \mathrm{B}(\pi/\mathrm{N})
\end{array}$$

Sea $Y = F_f$. Culminaremos la demostración viendo por un lado que $Y = \hat{X}^+$ y por el otro que Y es el revestimiento de X^+ asociado al grupo $\mathrm{N}/\mathcal{P}\pi$.

Consideramos el siguiente diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathrm{P}\,\mathrm{B}(\pi/\mathrm{N}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^+ & \longrightarrow & \mathrm{B}(\pi/\mathrm{N})\,. \end{array}$$

Observemos que $\mathrm{P}\,\mathrm{B}(\pi/\mathrm{N}) \to \mathrm{B}(\pi/\mathrm{N})$ es una fibración con fibra $\pi/\,\mathrm{N}$ y $\mathrm{P}\,\mathrm{B}(\pi/\mathrm{N})$ es un espacio contráctil. Luego $\mathrm{P}\,\mathrm{B}(\pi/\mathrm{N})$ es el revestimiento universal de $\mathrm{B}(\pi/\mathrm{N})$. Por lo tanto $Y \to X^+$ es un espacio de revestimiento con fibra $\pi/\,\mathrm{N}$, es decir, es el espacio de revestimiento asociado al grupo $\mathrm{N}/\mathcal{P}\pi$.

Por otro lado consideramos el siguiente diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\hat{\iota}_X} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[\iota_X]{} & X^+. \end{array}$$

El morfismo inducido por $\hat{\iota}_X$ a nivel de grupos funtamentales es la proyección $\mathrm{N} \to \mathrm{N}/\mathcal{P}\pi$. Además, al ser ι_X una función acíclica, la proposición 2.2.26 nos asegura que $\hat{\iota}_X$ es acíclica. Luego por 2.3.7, $Y = \hat{X}^+$. □

2.4. Construcción "+" como una localización

En esta seción veremos a la construcción "+" como una localización, ver ejemplo 2.4.4. Por más detalles consultar [Ber99].

Lema 2.4.1 ([Ber99])**.** Sean $L : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un funtor y $\ell : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to L$ una transformación natural. Consideramos $\mathcal{L}$ la subcategoría plena de $\mathcal{C}$ cuyos objetos son aquellos isomorfos a LX para algún X de $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{L} = \{Y \in \mathcal{C} : Y \cong LX, X \in \mathcal{C}\}$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. Para cada $X \in \mathcal{C}$ el morfismo $\ell_X : X \to LX$ tiene la propiedad universal con respecto a cada objeto Y de $\mathcal{L}$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ell_X} & LX \\ & \searrow^{f} & \swarrow_{\exists! f'} \\ & & Y \end{array}$$

2. Para cada $X \in \mathcal{C}$, $\ell_{LX} = L\ell_X$ y es un isomorfismo.

3. Para cada $X \in \mathcal{C}$, $\ell_{LX} = L\ell_X$ y tiene inversa a izquierda.

Si se verifican las condiciones del lema 2.4.1 decimos que $(L, \ell, \mathcal{L})$ es una localización de $\mathcal{C}$. Los objetos locales son los objetos de $\mathcal{L}$, L es el funtor de localización y ℓ es la coaumentación.

Ejemplo 2.4.2. Abelianización de grupos. Sean $\mathcal{C} = \mathbf{Grp}$,

$$L : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp} \qquad LG = G/[G,G] = G_{ab} \qquad \ell_G : G \to G/[G,G].$$

Los objetos locales son los grupos abelianos, $\mathcal{L} = \mathbf{Ab}$.

Ejemplo 2.4.3. Hipoabelianización de grupos. Sean $\mathcal{C} = \mathbf{Grp}$,

$$L : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp} \qquad LG = G/\mathcal{P}G \qquad \ell_G : G \to G/\mathcal{P}G.$$

Los objetos locales son los grupos hipoabelianos que son aquellos que no contienen subgrupos perfectos $\mathcal{L} = \{G \in \mathbf{Grp} : \mathcal{P}G = 1\}$.

Ejemplo 2.4.4. Construcción "+". Consideramos $\mathcal{C}$ la categoría de clases de homotopía de CW-complejos conexos. Para cada $X \in \mathcal{C}$ consideramos la construcción "+" respecto a $\mathcal{P}\pi_1(X)$ y definimos

$$L : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \quad LX = X^+ \quad \ell_X = \iota_X : X \to X^+$$

Los objetos locales son aquellos espacios cuyos grupos fundamentales son hipoabelianos.

$$\mathcal{L} = \{X \in \mathcal{C} : \mathcal{P}\pi_1(X) = 1\}.$$

Por 2.3.6, lo recién expuesto es una localización en el sentido del lema 2.4.1.

2.5. Construcción "+" en fibraciones

Es interesante saber cuando la construcción "+" de una fibración $f : E \to B$ con fibra F, es una fibración con fibra débilmente homotópica a F^+. Esto no siempre sucede y en esta sección veremos algunos casos en los cuales sí sucede.

De ahora en más los espacios considerados serán CW-complejos conexos.

Proposición 2.5.1. Sean $f : E \to B$ una fibración con fibra arco-conexa F, $p : \overline{B} \to B$ el revestimiento asociado a $\mathcal{P}\pi_1(B)$ y el siguiente diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} \overline{E} & \xrightarrow{\overline{f}} & \overline{B} \\ {\scriptstyle \overline{p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ E & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

Consideramos las construcciones "+" de E y B con respecto a $\mathcal{P}\pi_1(E)$ y a $\mathcal{P}\pi_1(B)$ respectivamente. Entonces el siguiente diagrama también es cartesiano

$$\begin{array}{ccc} \overline{E}^+ & \xrightarrow{\overline{f}^+} & \overline{B}^+ \\ {\scriptstyle \overline{p}^+}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p^+} \\ E^+ & \xrightarrow[f^+]{} & B^+ \end{array}$$

En particular, $F_{f^+} \simeq F_{\overline{f}^+}$.

Demostración: La sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(F) & \longrightarrow & \pi_1(\overline{E}) & \twoheadrightarrow & \mathcal{P}\pi_1(B) & \longrightarrow & \pi_0(F) = 0 \\ \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ \pi_1(F) & \longrightarrow & \pi_1(E) & \twoheadrightarrow & \pi_1(B) & \longrightarrow & \pi_0(F) = 0 \end{array}$$

nos permite afirmar que $\mathcal{P}\pi_1(E) \subset \pi_1(\overline{E})$. Por 2.3.12 $p^+ : \overline{B}^+ \to B^+$ es el revestimiento universal y $\overline{E}^+ \to E^+$ es el revestimiento asociado a $\pi_1(\overline{E})/\mathcal{P}\pi_1(E)$. Por otro lado consideramos

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \overline{B}^+ \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p^+} \\ E^+ & \xrightarrow[f^+]{} & B^+ \end{array}$$

en donde la aplicación $Y \to E^+$ es un revestimiento con la misma fibra F que p^+. Luego

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi_1(Y) & \longrightarrow & \pi_1(E^+) & \longrightarrow & \pi_0(F) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \| & & \| & & \\ & & & & \pi_1(E)/\mathcal{P}\pi_1(E) & & \pi_1(B)/\mathcal{P}\pi_1(B) = \pi_1(E)/\pi_1(\overline{E}) & & \end{array}$$

y $\pi_1(Y) = \pi_1(\overline{E})/\mathcal{P}\pi_1(E)$. Por unicidad del revestimiento $Y = \overline{E}^+$. □

Teorema 2.5.2. Sea $F \to E \xrightarrow{p} B$ una fibración tal que $\mathcal{P}\pi_1(B) = 1$ entonces $F^+ \to E^+ \xrightarrow{p^+} B^+$ es una fibración.

Demostración: Como $\mathcal{P}\pi_1(B) = 1$ entonces $B^+ = B$, luego tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{F_{\iota_E}} & F_{p^+} \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{\iota_E} & E^+ \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p^+} & \\ & B & \end{array}$$

Al ser ι_E acíclica, F_{ι_E} es acíclica (ver 2.2.27).

Consideramos la sucesión exacta asociada a p^+,

$$\pi_2(B) \xrightarrow{\partial} \pi_1(F_{p^+}) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E^+)$$

observemos que

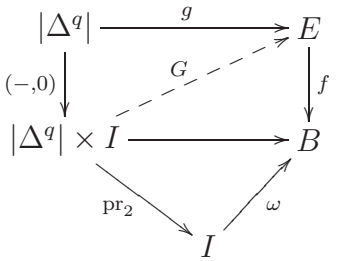
$$i_*\mathcal{P}\pi_1(F_{p^+}) = i_*[\mathcal{P}\pi_1(F_{p^+}), \mathcal{P}\pi_1(F_{p^+})] = [i_*(\mathcal{P}\pi_1(F_{p^+})), i_*(\mathcal{P}\pi_1(F_{p^+}))]$$

es perfecto en $\pi_1(E^+)$ y por lo tanto es trivial. Entonces $\mathcal{P}\pi_1(F_{p^+}) \subseteq \partial\pi_2(B)$ y por lo tanto

$$\mathcal{P}\pi_1(F_{p^+}) = [\mathcal{P}\pi_1(F_{p^+}), \mathcal{P}\pi_1(F_{p^+})] \subseteq \partial[\pi_2(B), \pi_2(B)] = 1$$

porque $\pi_2(B)$ es abeliano. Concluimos por 2.3.8 $F_{p^+} \simeq F^+$. □

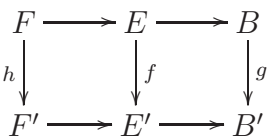
Sean E, B y F espacios conexos y $f : E \to B$ una fibración con fibra F. El grupo fundamental de B actúa sobre los grupos de homología de F de la siguiente manera: Sea $\omega : I \to B$ un lazo en B y $g : |\Delta^q| \to f^{-1}(\omega(0))$ un q-símplex en F. Por la propiedad de levantamiento de homotopía de f, existe una función $G : |\Delta^q| \times I \to E$ tal que el siguiente diagrama conmuta



El morfismo $G_1 : |\Delta^q| \times \{1\} \to E$ es un q-símplex cuya imagen está en $F = f^{-1}(\omega(0))$ dado que

$$(f \circ G_1)(|\Delta|^q \times \{1\}) = (\omega \circ \mathrm{pr}_2)(|\Delta|^q \times \{1\}) = \omega(1) = \omega(0)$$

Teorema 2.5.3. (**Teorema de comparación**, [Hat] pag. 20) Sean B y B' espacios arco-conexos. Consideramos un diagrama conmutativo



tal que $\pi_1(B)$ actúa trivialmente en $H_*(F;\mathbb{Z})$ y $\pi_1(B')$ actúa trivialmente en $H_*(F';\mathbb{Z})$ entonces si dos de los siguientes son isomorfismos entonces lo es el tercero,

$$h_* : H_*(F;\mathbb{Z}) \to H_*(F';\mathbb{Z}) \qquad f_* : H_*(E;\mathbb{Z}) \to H_*(E';\mathbb{Z}) \qquad g_* : H_*(B;\mathbb{Z}) \to H_*(B';\mathbb{Z})$$

Lema 2.5.4. ([Bro63] pag. 371) Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios débilmente simples. Si $f_* : H_*(X;\mathbb{Z}) \to H_*(Y;\mathbb{Z})$ y $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ son isomorfismos entonces f es una equivalencia de homotopía.

Teorema 2.5.5. Sea $F \to E \xrightarrow{p} B$ una fibración de espacios conexos tales que

- $\pi_1(B)$ y $\pi_1(E)$ son perfectos
- $\pi_1(B)$ actúa trivialmente en $H_*(F;\mathbb{Z})$
- F^+ y F_{p^+} son débilmente simples

Entonces $F^+ \to E^+ \xrightarrow{p^+} B^+$ es una fibración.

Demostración: Consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & E & \xrightarrow{p} & B \\ {\scriptstyle F_{\iota_E}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_E} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_B} \\ F_{p^+} & \longrightarrow & E^+ & \xrightarrow[p^+]{} & B^+ \end{array}$$

Como ι_E y ι_B son acíclicas entonces

$$H_*(\iota_E) : H_*(E;\mathbb{Z}) \to H_*(E^+;\mathbb{Z}) \qquad H_*(\iota_B) : H_*(B;\mathbb{Z}) \to H_*(B^+;\mathbb{Z})$$

son isomorfismos. Por 2.5.3, $H_*(F_{\iota_E}) : H_*(F;\mathbb{Z}) \to H_*(F_{p^+};\mathbb{Z})$ es un isomorfismo.

Consideramos la sucesión exacta asociada a la fibración p^+

$$\to \pi_2(B^+) \xrightarrow{\partial} \pi_1(F_{p^+}) \to \pi_1(E^+) = 1$$

Concluimos que $\pi_1(F_{p^+})$ es abeliano. Como $\pi_1(F_{\iota_E})([F,F]) = 1$ existe $\varphi : F^+ \to F_{p^+}$ tal que

$$\begin{array}{ccc} F^+ & & \\ {\scriptstyle \iota_F}\uparrow & \searrow^{\varphi} & \\ F & \xrightarrow[F_{\iota_E}]{} & F_{p^+} \end{array}$$

Al ser $H_*(\iota_E)$ y $H_*(F_{\iota_E})$ isomorfismos, $H_*(\varphi)$ también es un isomorfismo. Como los grupos fundamentales de F^+ y F_{p^+} son abelianos y $H_1(\varphi)$ es un isomorfismo, el morfismo φ_* inducido en los grupos fundamentales también es un isomorfismo. Como F^+ y F_{p^+} son débilmente simples, concluimos por 2.5.4 que $F^+ \simeq F_{p^+}$. □

2.5.1. Fibraciones quasi-nilpotentes

Definición 2.5.6 (acción nilpotente)**.** Una acción de un grupo Γ en un grupo G es nilpotente si existe una sucesión de subgrupos de G

$$* = G_n \subseteq \ldots \subseteq G_j \subseteq \ldots \subseteq G_1 = G$$

tal que para cada j se verifican las siguientes propiedades

- G_j es cerrado por la acción de Γ.
- G_{j+1} es normal en G_j y G_j/G_{j+1} es abeliano.
- La acción inducida en G_j/G_{j+1} es trivial.

Definición 2.5.7 (fibración quasi-nilpotente)**.** Sean E, B y F espacios conexos. Una fibración $f : E \to B$ con fibra F es quasi-nilpotente si la acción de $\pi_1(B)$ en $H_q(F;\mathbb{Z})$ es nilpotente, para todo $q \geq 1$.

Teorema 2.5.8 ([Ber82a] pag. 54)**.** Sea $F \to E \xrightarrow{f} B$ una fibración quasi-nilpotente tal que la acción de $\pi_1(F^+)$ en $\pi_n(F^+)$ es nilpotente. Entonces

$$F^+ \to E^+ \xrightarrow{f^+} B^+$$

es una fibración. □

2.6. Construcción "+" en BG

2.6.1. Extensiones centrales de un grupo

En esta sección exponemos algunas definiciones y resultados necesarios para hacer algunos cálculos en el teorema 2.6.6. Por más detalles consultar el capítulo 4 de [Ros94].

Definición 2.6.1. Sean G un grupo y A un grupo abeliano. Una extensión central de G por A es un par (E, φ) tal que E es un grupo que contiene a A como un subgrupo central y $\varphi : E \to G$ un morfismo sobreyectivo cuyo núcleo es A. En otras palabras,

$$1 \to A \to E \xrightarrow{\varphi} G \to 1$$

es exacta y A es un subgrupo central de E.

Las extensiones centrales de G por un grupo abeliano arbitrario forman una categoría. Sean (E, φ) y (E', φ') extensiones centrales de G por un mismo grupo abeliano. Un morfismo de extensiones centrales $(E, \varphi) \to (E', \varphi')$ es un diagrama conmutativo de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & G \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \| \\ E' & \xrightarrow[\varphi']{} & G \end{array}$$

Una extensión central (E, φ) de G por A es trivial si es isomorfa, en la categoría de extensiones centrales, a la siguiente extensión central de G

$$1 \to A \to G \times A \xrightarrow{p_1} G \to 1.$$

Definición 2.6.2. Una extensión central (E, φ) de G es universal si para cualquier otra extensión central (E', φ') de G existe un único morfismo $(E, \varphi) \to (E', \varphi')$.

No siempre existe una extensión central universal para un grupo G, pero si existe es única. El siguiente teorema nos da más información al respecto.

Teorema 2.6.3 ([Ros94] pag. 163)**.** Un grupo G tiene una extensión central universal si y solamente si G es perfecto. En este caso, (E, φ) una extensión central de G es universal si y solamente si se verfican las siguientes condiciones:

1. E es perfecto.

2. Todas las extensiones centrales de E son triviales. □

Teorema 2.6.4 ([Ros94] pag. 177)**.** Sean G un grupo perfecto y (E, φ) la extensión central universal de G. Entonces

- El núcleo de φ es naturalmente isomorfo a $A = H_2(\mathrm{G}, \mathbb{Z})$.
- $H_1(E, \mathbb{Z}) = H_2(E, \mathbb{Z}) = 0$.

2.6.2. Propiedades de la construcción "+" en BG

Proposición 2.6.5. Sean G y Γ dos grupos tales que $[\mathrm{G}, \mathrm{G}]$ es perfecto. Sean $f, g : \Gamma \to \mathrm{G}$ dos morfismos conjugados por un elemento h de $[\mathrm{G}, \mathrm{G}]$. Entonces las aplicaciones $\iota \circ \mathrm{Bf} : \mathrm{B}\Gamma \to \mathrm{BG}^+$ y $\iota \circ \mathrm{Bg} : \mathrm{B}\Gamma \to \mathrm{BG}^+$ son homotópicas.

Demostración: Por proposición 1.5.5, Bf y Bg son libremente homotópicas, es decir, existe una homotopía $H : \mathrm{B}\Gamma \times I \to \mathrm{BG}$ tal que $H(-, 0) = \mathrm{Bf}$ y $H(-, 1) = \mathrm{Bg}$. Si bien la homotopía no respeta el punto marcado, el lazo recorrido por $H(*, t)$ corresponde al elemento h que está en $[\mathrm{G}, \mathrm{G}]$ y que es trivial en BG^+. Luego $\iota \circ H : \mathrm{B}\Gamma \times I \to \mathrm{BG}^+$ es una homotopía punteada de $\iota \circ \mathrm{Bf}$ y $\iota \circ \mathrm{Bg}$. □

Teorema 2.6.6. Sea G un grupo tal que $\mathrm{N} = [\mathrm{G}, \mathrm{G}]$ es un subgrupo perfecto de G. Construimos BG^+ y BN^+ respecto a N. Sea $\hat{\mathrm{N}}$ la extensión central universal de N. Entonces

- BN^+ es el revestimiento universal BG^+.
- $\pi_1(\mathrm{BG}^+) \cong H_1(\mathrm{G}, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{G}_{ab}$
- $\pi_2(\mathrm{BG}^+) \cong H_2(\mathrm{N}, \mathbb{Z})$
- $\pi_3(\mathrm{BG}^+) \cong H_3(\hat{\mathrm{N}}, \mathbb{Z})$
- $\pi_j(\mathrm{BG}^+) \cong \pi_j(\mathrm{B}\hat{\mathrm{N}}^+)$.

Demostración: Por la proposión 1.5.4 la aplicación $\mathrm{BN} \to \mathrm{BG}$ es un revestimiento asociado al grupo N. Por proposición 2.3.12, $\mathrm{BN}^+ \to \mathrm{BG}^+$ es el revestimiento universal. En particular,

$$\pi_j(\mathrm{BG}^+) = \pi_j(\mathrm{BN}^+) \qquad j \geq 2 \tag{2.8}$$

Por construcción, tenemos que

$$\pi_1(\mathrm{BG}^+) = \mathrm{G} \,/\, \mathrm{N} = \mathrm{G} \,/[\mathrm{G}, \mathrm{G}] = \mathrm{G}_{ab}\,.$$

Como BN^+ es simplemente conexo tenemos que

$$\begin{array}{rcll} \pi_2(\mathrm{BG}^+) & = & \pi_2(\mathrm{BN}^+) & \text{por (2.8)} \\ & = & H_2(\mathrm{BN}^+; \mathbb{Z}) & \text{por D.20} \\ & = & H_2(\mathrm{BN}; \mathbb{Z}) & \text{por 2.3.4} \\ & = & H_2(\mathrm{N}, \mathbb{Z}) & \text{por 1.5.7.} \end{array} \tag{2.9}$$

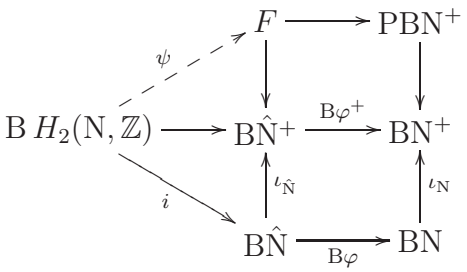
Como N es perfecto existe $(\hat{\mathrm{N}}, \varphi)$ la extensión central universal de N, ver 2.6.3. Además $\hat{\mathrm{N}}$ es perfecto y el núcleo de φ es $H_2(\mathrm{N}, \mathbb{Z})$, ver 2.6.4. Obtenemos una suceción exacta

$$1 \to H_2(\mathrm{N}, \mathbb{Z}) \to \hat{\mathrm{N}} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{N} \to 1.$$

Por proposición 2.2.8, $\mathrm{B}\hat{\mathrm{N}} \xrightarrow{\mathrm{B}\varphi} \mathrm{BN}$ es una fibración con fibra $\mathrm{B}\, H_2(\mathrm{N}, \mathbb{Z})$. Consideramos la construcción "+" de $\mathrm{B}\hat{\mathrm{N}}$ con respecto al grupo $\hat{\mathrm{N}}$. Por proposición 2.3.9 podemos considerar el la función $\mathrm{B}\varphi^+$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B}\hat{\mathrm{N}}^+ & \xrightarrow{\mathrm{B}\varphi^+} & \mathrm{BN}^+ \\ {\scriptstyle \iota_{\hat{\mathrm{N}}}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \iota_{\mathrm{N}}} \\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{N}} & \xrightarrow[\mathrm{B}\varphi]{} & \mathrm{BN}\,. \end{array}$$

Por 2.2.15 podemos suponer que $\mathrm{B}\varphi^+$ es una fibración. Sea F la fibra homotópica de $\mathrm{B}\varphi^+$. Como $\mathrm{B}\varphi^+ \circ \iota_{\hat{\mathrm{N}}} \circ i = \iota_{\mathrm{N}} \circ \mathrm{B}\varphi \circ i$ es homotópicamente trivial, existe $\psi : \mathrm{B}\, H_2(\mathrm{N}, \mathbb{Z}) \to F$ tal que el siguiente diagrama conmuta



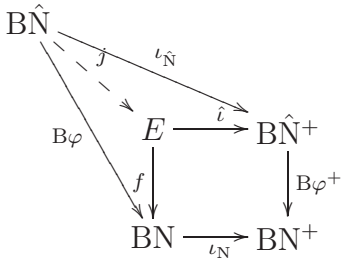
El espacio $\mathrm{B}\hat{\mathrm{N}}^+$ es simplemente conexo, entonces

$$\begin{array}{rcll} \pi_2(\mathrm{B}\hat{\mathrm{N}}^+) & = & H_2(\mathrm{B}\hat{\mathrm{N}}^+; \mathbb{Z}) & \text{por D.20} \\ & = & H_2(\mathrm{B}\hat{\mathrm{N}}; \mathbb{Z}) & \text{por 2.3.4} \\ & = & H_2(\hat{\mathrm{N}}; \mathbb{Z}) & \text{por 1.5.7} \\ & = & 0 & \text{por 2.6.4.} \end{array} \tag{2.10}$$

Considerando la sucesión exacta asociada a $\mathrm{B}\varphi^+$ concluimos que F es conexo y que $\pi_1(F) = H_2(N, \mathbb{Z})$,

$$\to \pi_2(F) \to 0 \to H_2(N, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} \pi_1(F) \to 0 \to 0 \to \pi_0(F) \to 0.$$

Sea E producto fibrado de ι_{N} y $\mathrm{B}\varphi^+$. Por propiedad universal del producto fibrado existe $j : \mathrm{B}\hat{\mathrm{N}} \to E$ tal que



conmuta. Como ι_N es acíclica, por 2.2.26 $\hat{\imath}$ también lo es. Además como $\iota_{\hat{\mathrm{N}}}$ también es acíclica, j es acíclica. La función f es una fibración con fibra F y la función inducida por j en las fibras es ψ. Por 2.2.27 ψ es acíclica. Además ψ_*, el morfismo inducido en los grupos fundamentales, es un isomorfismo porque dichos grupos fundamentales son abelianos. Luego $\pi_k(F) = 0\ \forall k \geq 2$ y si consideramos la sucesión exacta asociada a la fibración $\mathrm{B}\varphi^+$ obtenemos

$$\to 0 \to \pi_n(\mathrm{B}\hat{\mathrm{N}}^+) \xrightarrow{\simeq} \pi_n(\mathrm{BN}^+) \to 0 \ldots 0 \to \pi_3(\mathrm{B}\hat{\mathrm{N}}^+) \xrightarrow{\simeq} \pi_3(\mathrm{BN}^+) \to 0$$

Junto con (2.8) obtenemos que

$$\pi_j(\mathrm{BG}^+) = \pi_j(\mathrm{B}\hat{\mathrm{N}}^+) \qquad \forall j \geq 3 \tag{2.11}$$

Por (2.10) el espacio $\mathrm{B}\hat{\mathrm{N}}^+$ es 2-conexo, por lo tanto

$$\begin{array}{rcll} \pi_3(\mathrm{BG}^+) & = & \pi_3(\mathrm{B}\hat{\mathrm{N}}^+) & \text{por (2.11)} \\ & = & H_3(\mathrm{B}\hat{\mathrm{N}}^+; \mathbb{Z}) & \text{por D.20} \\ & = & H_3(\mathrm{B}\hat{\mathrm{N}}; \mathbb{Z}) & \text{por 2.3.4} \\ & = & H_3(\hat{\mathrm{N}}; \mathbb{Z}) & \text{por 1.5.7} \end{array}$$

□

Capítulo 3

K-teoría algebraica

En este capítulo expondremos la K-teoría algebraica de anillos. En la primera sección definimos el anillo y grupo de matrices, la unitización de un anillo, el cono y la suspensión de un anillo. Estas construcciones serán necesarias para el desarrollo del capítulo. En la segunda sección definimos los funtores K_0 y K_1 y exponemos algunas de sus propiedades. En la tercera sección definimos los funtores K_n para $n \geq 1$ usando la construcción "+" y vemos que para $n = 1$ la definición coincide con la anterior. En la cuarta sección definimos la pseudo-conjugación en $\mathrm{GL}(R)$ y vemos automorfismos de $\mathrm{GL}(R)$ que inducen funciones continuas del espacio $\mathrm{BGL}^+(R)$ es si mismo homotópicas a la identidad. En la quinta sección vemos que el espacio $\mathrm{BGL}^+(R)$ tiene estructura de H-grupo. En la sexta sección estudiamos la estabilidad de del funtor K_n. En la séptima sección vemos que los K_n-grupos de anillos con suma infinita son cero. En particular, $K_n(\mathbf{C}R) = 0$. En la octava sección estudiamos el producto de Loday $\star : K_n(R) \times K_m(R') \to K_{n+m}(R \otimes R')$. En la novena sección vemos que $K_n(R) \cong K_{n+1}(\mathbf{S}R)$ y definimos la K-teoría negativa. Finalmente en la última sección definimos el espectro $\mathbf{K_R}$ y un funtor

$$\mathbf{K} : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Spt} \qquad \mathbf{R} \mapsto \mathbf{K_R}$$

tal que $\pi_n(\mathbf{K_R}) = K_n(R)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

La bibliografía utilizada es la siguiente: [Ros94] y [Cn07] para la sección 3.2; [Ros94] para la sección 3.3; [Lod76] para la secciones 3.4 y 3.5; [CnT] para las secciones 3.6 y 3.7; [Lod76] para la sección 3.8; [GJ99], [BK72], [CnHW] y [Wag72] para la sección 3.9, y [GJ99] para la sección 3.10.

3.1. Anillos y grupos asociados a un anillo.

En este capítulo consideramos las siguientes categorías de anillos:

- **PRng** es la categoría de anillos sin unidad, algunos autores los llaman pseudo anillos.
- **Ring** es la subcategoría plena de **PRng** formada por los anillos con unidad.

- **URng** es la categoría de anillos con unidad y los morfismos de anillos unitales.

3.1.1. Anillo y grupo de matrices.

Sea R un anillo con unidad, A un anillo sin unidad, $r, s \in R$ y $a \in A$. Definimos

- $\mathcal{M}_n(A)$ — El anillo de matrices de tamaño $n \times n$ con coeficientes en A.
- $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n(A)$ — Incluyendo $\mathcal{M}_n(A)$ en $\mathcal{M}_{n+1}(A)$ vía el morfismo $M \to \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\mathrm{GL}_n(R)$ — El grupo de matrices invertibles de tamaño $n \times n$ con coeficientes en R.
- $\mathrm{GL}(R) = \mathrm{GL}_\infty(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{GL}_n(R)$ — Incluyendo $\mathrm{GL}_n(R)$ en $\mathrm{GL}_{n+1}(R)$ vía el morfismo $M \to \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- I_n — Es la matriz en $\mathcal{M}_n(R)$ cuyas entradas en la diagonal son 1 y el resto son cero.
- $\varepsilon_{ij}^n \quad i, j \in \{1, \ldots, n\}$ — Es la matriz en $\mathcal{M}_n(R)$ cuya única entrada no nula es 1 en el lugar (i, j).
- $\varepsilon_{ij}^n(r) = r.\varepsilon_{ij}^n + I_n \quad i \neq j$

Observemos que $\varepsilon_{ij}^n(r).\varepsilon_{ij}^n(s) = \varepsilon_{ij}^n(r+s)$:

$$(\varepsilon_{ij}(r).\varepsilon_{ij}(s))_{kl} = \sum_{t=1}^{n} (\varepsilon_{ij}(r))_{kt}(\varepsilon_{ij}(s))_{tl} = \begin{cases} (\varepsilon_{ij}(s))_{jl} & k = j \\ (\varepsilon_{ij}(s))_{kl} + (\varepsilon_{ij}(r))_{kj}(\varepsilon_{ij}(s))_{jl} & k \neq j \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 & k = l \\ s + r & (k,l) = (i,j) \\ 0 & k \neq l \quad (k,l) \neq (i,j) \end{cases} = (\varepsilon_{ij}(r+s))_{kl},$$

en particular $\varepsilon_{ij}^n(r) \in \mathrm{GL}_n(R)$ y su inversa es $\varepsilon_{ij}^n(-r)$. Por lo tanto podemos continuar con las siguientes definiciones

- $\mathrm{E}_n(R)$ — Es el subgrupo de $\mathrm{GL}_n(R)$ generado por los elementos de la forma $\varepsilon_{ij}^n(r)$.
- $\mathrm{E}(R) = \mathrm{E}_\infty(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_n(R)$ — Incluyendo $\mathrm{E}_n(R)$ en $\mathrm{E}_{n+1}(R)$ vía el morfismo $M \to \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposición 3.1.1 (Lema de Whitehead, [Ros94] pag 61.)**.** Sea R un anillo con unidad entonces

$$[\mathrm{GL}(R), \mathrm{GL}(R)] = [\mathrm{E}(R), \mathrm{E}(R)] = \mathrm{E}(R).$$

Definición 3.1.2 (Funtorialidad de GL)**.** Sean R y S anillos con unidad y sea $f : R \to S$ un morfismo unital de anillos. Definimos

$$\mathrm{GL}_n(f) : \mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_n(S) \qquad (\mathrm{GL}_n(f)(M))_{ij} = f(M_{ij})$$

y

$$\mathrm{GL}(f) = \mathrm{colim}(\mathrm{GL}_n(f))$$

los cuales son morfismos de grupos dado que

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{GL}_n(f)(MN))_{ij} & = & f((MN)_{ij}) \\ & = & f(\sum_k (M_{ik}N_{kj})) \\ & = & \sum_k f(M_{ik})f(N_{kj}) \\ & = & (\mathrm{GL}_n(f)(M).\,\mathrm{GL}_n(f)(N))_{ij} \end{array}$$

3.1.2. Grupos de matrices en PRng

Consideremos en $\mathcal{M}_n(A)$ la siguiente operación

$$M \circ N := M + N + M \cdot N$$

y sea el siguiente conjunto

$$\mathrm{GL}(n, A) := \{M \in \mathcal{M}_n(A) : \text{ existe } Q \in \mathcal{M}_n(A) \text{ tal que } M \circ Q = Q \circ M = 0\}.$$

Obtenemos un grupo $(\mathrm{GL}(n, A), \circ)$. Definimos $\mathrm{GL}(\infty, A) := \mathrm{colim}_n(\mathrm{GL}(n, A))$. Sea $a \in A$ y para $i \neq j$ sea $\delta^n_{ij}(a)$ la matriz de $\mathrm{GL}(n, A)$ tal que tiene al elemento a en la entrada (i, j) y 0 en las demás. Al grupo generado por los elementos $\delta_{ij}(a)$ lo denominamos $\mathrm{E}(n, A)$ y definimos

$$\mathrm{E}(\infty, A) := \mathrm{colim}_n \mathrm{E}(n, A).$$

En el caso que $A = R$ un anillo con unidad $(\mathrm{GL}(n, R), \circ)$ es isomorfo a $(\mathrm{GL}_n(R), \cdot)$ y el isomorfismo es

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}(n, R) & \to & \mathrm{GL}_n(R) \\ P & \mapsto & P + I \end{array}$$

Además $\mathrm{GL}(\infty, R)$ es isomorfo a $\mathrm{GL}(R)$ y $\mathrm{E}(\infty, R)$ a $\mathrm{E}(R)$. Por este motivo, de ahora en más, utilizaremos la notación $\mathrm{GL}_n(A)$, $\mathrm{E}_n(A)$ $\mathrm{E}(A)$ y $\mathrm{GL}(A)$. Si $f : A \to A'$ es un morfismo de anillos, definimos $\mathrm{GL}(f)$ como en 3.1.2 que resulta ser un morfismo de grupos:

$$\mathrm{GL}(f)(M \circ N) = \mathrm{GL}(M+N+MN) = \mathrm{GL}(M)+\mathrm{GL}(N)+\mathrm{GL}(M)\,\mathrm{GL}(N) = \mathrm{GL}(M)\circ\mathrm{GL}(N).$$

Proposición 3.1.3. Si $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\rho} C \to 0$ es una sucesión exacta de anillos entonces

$$0 \to \mathrm{GL}(A) \xrightarrow{\mathrm{GL}(i)} \mathrm{GL}(B) \xrightarrow{\mathrm{GL}(\rho)} \mathrm{GL}(C)$$

es una sucesión exacta de grupos.

Demostración: Alcanza ver que

$$0 \to \mathrm{GL}_n(A) \xrightarrow{\mathrm{GL}(i)} \mathrm{GL}_n(B) \xrightarrow{\mathrm{GL}(\rho)} \mathrm{GL}_n(C)$$

es exacta para todo $n \in \mathbb{N}$. La inyectividad de i implica inmediatamente la inyectividad de $\mathrm{GL}(i)$. Observar que $\mathrm{GL}(i)$ está bien definido en todo $\mathcal{M}_n(A)$ con codominio $\mathcal{M}_n(B)$ y también es inyectiva. Como $\rho \circ i = 0$ entonces $\mathrm{GL}(\rho) \circ \mathrm{GL}(i) = 0$.

Sea $M \in \mathrm{GL}_n(B)$ tal que $\mathrm{GL}(\rho)(M) = 0$ entonces $\rho(m_{ij}) = 0$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, luego existen $n_{ij} \in A$ tales que $i(n_{ij}) = m_{ij}$. Sea $P \in \mathrm{GL}_n(B)$ tal que $M \circ P = P \circ M = 0$. Como

$$\mathrm{GL}(\rho)(M \circ P) = \mathrm{GL}(\rho)(M) + \mathrm{GL}(\rho)(P) + \mathrm{GL}(\rho)(M)\,\mathrm{GL}(\rho)(P) = \mathrm{GL}(\rho)(P) = 0$$

entonces existen $q_{ij} \in A$ tales que $i(q_{ij}) = p_{ij}$. Por lo tanto tenemos $N, Q \in \mathcal{M}_n(A)$ tales que

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}(i)(Q \circ N) & = & \mathrm{GL}(i)(Q) \circ \mathrm{GL}(i)(N) = 0 \\ \mathrm{GL}(i)(N \circ Q) & = & \mathrm{GL}(i)(N) \circ \mathrm{GL}(i)(Q) = 0 \end{array}$$

y por la inyectividad de $\mathrm{GL}(i)$ tenemos $Q \circ N = N \circ Q = 0$. Concluimos que existe $N \in \mathrm{GL}_n(A)$ y $\mathrm{GL}(i)(N) = M$. □

3.1.3. Unitización de un anillo.

Sea A un anillo. Definimos en $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{Z}$ las siguientes operaciones,

$$\begin{array}{ll} + : \tilde{A} \times \tilde{A} \to \tilde{A} & (a, n) + (b, m) = (a + b, n + m) \\ \cdot : \tilde{A} \times \tilde{A} \to \tilde{A} & (a, n) \cdot (b, m) = (ab + am + nb, nm) \end{array}$$

De esta manera obtenemos un anillo $(\tilde{A}, +, \cdot)$ con unidad, cuya unidad es $(0, 1)$.

Observación 3.1.4.

- Existe una inclusión canónica de A en $\tilde{A}$

  $$A \to \tilde{A} \qquad a \mapsto (a, 0)$$

  y de esta manera podemos ver a A como un ideal bilateral de $\tilde{A}$.

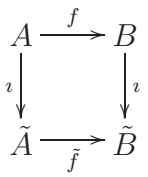
- Si R es un anillo con unidad entonces $\tilde{R}$ es isomorfo a $R \times \mathbb{Z}$. En efecto, el siguiente morfismo es un isomorfismo unital

  $$\psi : R \times \mathbb{Z} \to \tilde{R} \qquad \psi(a, n) = (a + n \cdot 1_R, n).$$

Definición 3.1.5 (Funtorialidad de la unitización)**.** Sea $f : A \to B$ un morfismo entre anillos. Definimos el morfismo

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f} : & \tilde{A} & \to & \tilde{B} \\ & (a, n) & \to & (f(a), n), \end{array}$$

el cual es un morfismo unital compatible con la inclusión descripta en la observación 3.1.4, es decir, el siguiente diagrama conmuta



3.1.4. Cono y suspensión de un anillo

El cono $\mathbf{C}A$ de un anillo A es el conjunto de matrices de tamaño $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, con coeficientes en A, tales que en cada fila y en cada columna hay una cantidad finita de entradas no nulas. Observemos que $\mathcal{M}(A)$ es un ideal bilateral de $\mathbf{C}A$, por lo tanto tiene sentido definir la suspensión de A como

$$\mathbf{S}A = \mathbf{C}A/\mathcal{M}(A)$$

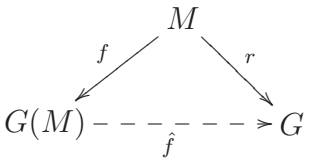
3.2. Los primeros K-funtores

3.2.1. K_0

En esta sección definimos el funtor $K_0 : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Grp}$. Éste fue definido por Grothendieck en el 1957 en su reformulación del teorema de Riemann Roch.

Se puede consultar [Ros94] para un exposición más detallada.

Definición 3.2.1 (Grupo de Grothendieck)**.** Sea M un monoide abeliano. El grupo de Grothendieck asociado a M es un grupo $G(M)$ y una aplicación $g : M \to G(M)$ tales que se verifica la siguiente propiedad universal: si G es un grupo y $f : M \to G$ es un morfismo de monoides entonces existe un único morfismo de grupos $\hat{f} : G(M) \to G$ tal que el siguiente diagrama conmuta



Observación 3.2.2. El grupo de Grothendieck asociado a un monoide abeliano M existe y es único a menos de isomorfismos (ver [Ros94] pag. 3)

Definición 3.2.3 ($(\mathcal{P}(R), \oplus)$)**.** Sea R un anillo con unidad. Consideramos la colección de clases de isomorfismos de R-módulos proyectivos finitamente generados:

$$\mathcal{P}(R) := \{[M] : \ M \text{ es un } R\text{-módulo finitamente generado}\}.$$

La suma directa de R-módulos le da a $\mathcal{P}(R)$ una estructura de monoide abeliano

$$[M] \oplus [N] := [M \oplus N].$$

Definición 3.2.4 ($K_0(R)$)**.** Definimos el K_0 de un anillo R como el grupo de Grothendieck del monoide $(\mathcal{P}(R), \oplus)$

$$K_0(R) := G(\mathcal{P}(R), \oplus)$$

Definición 3.2.5 (Funtorialidad de K_0)**.** Sea $f : R \to R'$ un morfismo de anillos. Consideramos la siguiente estructura de R-módulo a derecha de R',

$$r' \cdot r := r' f(r).$$

Definimos el morfismo de monoides abeliano

$$\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(R') \qquad \mathcal{P}(f)[M] = [R' \otimes_R M],$$

por propiedad universal del grupo de Grothendieck tenemos que existe un morfismo de grupos al cual llamamos $K_0(f) : K_0(R) \to K_0(R')$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(R) & \xrightarrow{\mathcal{P}(f)} & \mathcal{P}(R') \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'} \\ K_0(R) & \xrightarrow[K_0(f)]{} & K_0(R'). \end{array}$$

3.2.2. K_1

En cierta manera, el funtor K_0 clasifica a los R-módulos proyectivos finitamente generados. En esta sección definiremos el funtor $K_1 : \mathbf{URng} \to \mathbf{Grp}$ definido por Bass y Whitehead. Dicho funtor clasifica, en cierta manera, a los automorfismos de R-módulos proyectivos libres. Estos automorfismos los representamos mediante matrices invertibles con coeficientes en R.

Definición 3.2.6. ($K_1(R)$) Sea R un anillo con unidad. Definimos

$$K_1(R) := \mathrm{GL}(R)_{ab} = \mathrm{GL}(R)/[\mathrm{GL}(R), \mathrm{GL}(R)] \overset{3.1.1}{=} \mathrm{GL}(R)/\,\mathrm{E}(R)$$

Definición 3.2.7. ($K_1(f)$) Sea $f : R \to R'$ un morfismo de anillos unital. Definimos $K_1(f) : K_1(R) \to K_1(R')$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(R) & \xrightarrow{\mathrm{GL}(f)} & \mathrm{GL}(R') \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_1(R) & \xrightarrow[K_1(f)]{} & K_1(R') \end{array}$$

3.2.3. Propiedades de K_0 y K_1

En esta sección enunciaremos algunas de las propiedades de los funtores K_0 y K_1. Para más detalles se puede consultar los dos primeros capítulos de [Ros94].

- **Aditividad.** Sean R_1 y R_2 anillos con unidad. Consideramos $R = R_1 \times R_2$ y $p_i : R \to R_i$ las proyecciones correspondientes. Se verifica que el morfismo

$$K_i(R) \to K_i(R_1) \oplus K_i(R_2) \qquad i = 0, 1$$

  es un isomorfismo.

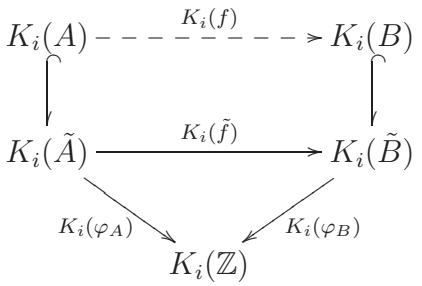
- **Extensión a anillos sin unidad.** Podemos extender la definición de los funtores K_0 y K_1 a la categoría **PRng**. Sea A un anillo (no necesariamente con unidad); consideramos

$$\varphi_A : \tilde{A} \to \mathbb{Z} \qquad \varphi(a, n) = n.$$

  Definimos

$$K_i(A) := \ker(K_i(\varphi_A)) \subseteq K_i(\tilde{A}) \qquad i = 0, 1.$$

  Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos, definimos $K_i(f)$ $i = 0, 1$ de manera tal que el siguiente diagrama conmuta



  Si A tiene unidad, ésta definición coincide con las realizadas para anillos con unidad. En efecto, consideramos el isomorfismo $\psi : \tilde{A} \to A \times \mathbb{Z}$ visto en 3.1.4. Por aditividad $K_i(\tilde{A}) \cong K_i(A) \oplus K_i(\mathbb{Z})$. Luego $\ker(K_i(\varphi_A)) = K_i(A)$.

  De esta manera tenemos definido los funtores K_i en las categorías **PRng**, **Ring** y **URng**. Algunas de las propiedades se cumplen solo para algunos dominios. Por dicho motivo indicaremos cual es el dominio que se está considerando en cada caso.

- $\mathcal{M}_p$ **estabilidad.** Sea K_i : **Ring** $\to$ **Grp**. Denotemos por $\mathrm{diag}(r_1, \ldots, r_p)$ a la matriz diagonal de $\mathcal{M}_p(R)$ cuyas entradas en la diagonal son $r_1, \ldots, r_p$. La imagen por K_i del morfismo

$$r \mapsto \mathrm{diag}(r, 0, \ldots, 0)$$

  es un isomorfismo. Luego si R es un anillo con unidad,

$$K_i(R) \cong K_i(\mathcal{M}_p(R)).$$

- **Continuidad.** Los funtores K_i : **PRng** $\to$ **Grp** preservan colímites de sistemas filtrantes. Es decir el morfismo canónico

$$\operatorname{colim}_j K_i(A_j) \to K_i(\operatorname{colim}_j(A_j))$$

es un isomorfismo.

- $\mathcal{M}_\infty$**-estabilidad.** Combinando la continuidad y la $\mathcal{M}_p$-estabilidad del funtor K_i : **Ring** $\to$ **Grp**, obtenemos que si R es un anillo con unidad

$$K_i(\mathcal{M}_\infty(R)) \cong K_n(R).$$

- K_0 **es nilinvariante.** Consideramos K_0 : **Ring** $\to$ **Grp**. Si $I \lhd R$ es un ideal nilpotente, entonces $K_0(R) \to K_0(R/I)$ es un isomorfismo. El funtor K_1 no tiene esta propiedad, ver ejemplo 1.3.1 en [Cn07].

- **Semi-Exactitud.** Varios ejemplos muestran que funtores K_i : **PRng** $\to$ **Grp** no son exactos. Sin embargo, son semi-exactos: Si

$$0 \to A \to B \to C \to 0 \tag{3.1}$$

es una sucesión exacta de anillos, entonces

$$K_i(A) \to K_i(B) \to K_i(C) \tag{3.2}$$

es exacta. Además si (3.1) se parte, entonces

$$0 \to K_0(A) \to K_0(B) \to K_0(C) \to 0$$

es una sucesión exacta que se parte. Esta última propiedad no es verficada por K_1, ver contraejemplo en [Swa71].

- **Sucesión exacta.** La razón por la cual se consideran a los funtores K_0 y K_1 como parte de una misma teoría, es porque podemos conectar ambas sucesiones de (3.2), formando así una sucesión exacta de seis términos. En efecto, existe $\partial : K_1(C) \to K_0(A)$ tal que

$$K_1(A) \to K_1(B) \to K_1(C) \xrightarrow{\partial} K_0(A) \to K_0(B) \to K_0(C) \tag{3.3}$$

es exacta.

3.3. K-teoría de orden superior

3.3.1. K-grupos de anillos con unidad

En esta sección definiremos los K-grupos de anillos con unidad. Estos consisten en una colección de funtores $\{K_n\}_{n\geq 1}$ de la forma

$$K_n : \mathbf{URng} \to \mathbf{Grp}.$$

Definición 3.3.1. ($K_n(R)$) Sea R un anillo con unidad. Por 3.1.1, $\mathrm{E}(R) = [\mathrm{GL}(R), \mathrm{GL}(R)] = \mathcal{P}\,\mathrm{GL}(R)$. En particular $\mathrm{E}(R)$ es un subgrupo normal y perfecto de $\pi_1(\mathrm{BGL}(R))$. Consideramos la construcción "+" del espacio $\mathrm{BGL}(R)$ con respecto a $E(R)$. Definimos para $n \geq 1$

$$K_n(R) = \pi_n(\mathrm{BGL}(R)^+). \tag{3.4}$$

Observemos que en el caso $n = 1$, las definiciones (3.4) y 3.2.6 coinciden en virtud del teorema 2.6.6.

Veamos la funtorialidad de los K-grupos de anillos con unidad.

Definición 3.3.2. ($K_n(f)$) Sean R y S anillos con unidad y sea $f : R \to S$ un morfismo de anillos unital. Como las aplicaciones GL y B son funtoriales tenemos que $\mathrm{GL}(f) : \mathrm{GL}(R) \to \mathrm{GL}(S)$ es un morfismo de grupos y $\mathrm{BGL}(f) : \mathrm{BGL}(R) \to \mathrm{BGL}(S)$ es una función continua de espacios topológicos. Como $\mathrm{GL}(f)(e_{ij}(r)) = e_{ij}(f(r))$ se cumple que $\mathrm{GL}(f)(E(R)) \subseteq \mathrm{E}(S)$. Luego podemos considerar $f^+ : \mathrm{BGL}(R)^+ \to \mathrm{BGL}(S)^+$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BGL}(R) & \xrightarrow{\mathrm{BGL}(f)} & \mathrm{BGL}(S) \\ \downarrow{\scriptstyle \imath} & & \downarrow{\scriptstyle \imath} \\ \mathrm{BGL}(R)^+ & \xrightarrow[f^+]{} & \mathrm{BGL}(S)^+ \end{array}$$

luego definimos

$$K_n(f) : K_n(R) \to K_n(S) \qquad K_n(f) = \pi_n(f^+).$$

3.3.2. K-grupos de anillos sin unidad

Al igual que para K_0 y K_1, podemos extender la definición 3.3.1 a los anillos sin unidad. En esta sección definimos funtores

$$K_n : \mathbf{PRng} \to \mathbf{Grp}$$

que extienden a los funtores definidos en la sección anterior.

Definición 3.3.3. Sean A un anillo y $\tilde{A}$ su unitización. Consideremos el morfismo $\varphi : \tilde{A} \to \mathbb{Z}$, $\varphi(a, n) = n$. Al ser un morfismo de anillos unital podemos considerar

$$\varphi^+ : \mathrm{BGL}(\tilde{A})^+ \to \mathrm{BGL}(\mathbb{Z})^+$$

y también definir

$$K_n(A) = \pi_n(F_{\varphi^+}) \tag{3.5}$$

siendo F_{φ^+} la fibra homotópica de φ^+.

La definición 3.3.3 no distingue si A tiene o no unidad. Veamos a continuación que en el caso de un anillo R con unidad, las definiciones (3.4) y (3.5) coinciden. Si R tiene unidad, $\psi : R \times \mathbb{Z} \to \tilde{R}$ es un isomorfismo y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BGL}(R)^+ \times \mathrm{BGL}(\mathbb{Z})^+ & \xrightarrow{\psi^+} & \mathrm{BGL}(\tilde{R})^+ \\ & {\scriptstyle p_2} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \varphi^+} & \\ & \mathrm{BGL}(\mathbb{Z})^+ & \end{array}$$

Luego la fibra homotópica de φ^+ es $\mathrm{BGL}(R)^+$. Entonces ambas definiciones coinciden.

Veamos la funtorialidad de los K-grupos de anillos sin unidad.

Definición 3.3.4. Si $f : A \to B$ es un morfismo de anillos y consideramos el morfismo $\tilde{f} : \tilde{A} \to \tilde{B}$. Como el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{B} \\ & {\scriptstyle \varphi_A} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \varphi_B} & \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

el siguiente diagrama es conmutativo a menos de homotopía

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BGL}(\tilde{A})^+ & \xrightarrow{\tilde{f}^+} & \mathrm{BGL}(\tilde{B})^+ \\ & {\scriptstyle \varphi_A^+} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \varphi_B^+} & \\ & \mathrm{BGL}(\mathbb{Z})^+ & \end{array}$$

Consideramos

$$f_F : F_{\varphi_A^+} \to F_{\varphi_B^+}$$

la aplicación inducida por $\tilde{f}^+$ en las fibras homotópicas. Finalmente definimos

$$K_n(f) = \pi_n(f_F).$$

3.3.3. K-grupos relativos

Sean R un anillo con unidad e $I \lhd R$ un ideal bilateral. Consideramos el morfismo cociente $q : R \twoheadrightarrow R/I$. Descomponemos $\mathrm{GL}(q)$ de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(R) & \xrightarrow{\mathrm{GL}(q)} & \mathrm{GL}(R/I) \\ & {\scriptstyle \tilde{q}} \searrow \quad \nearrow & \\ & S = \operatorname{Im} \mathrm{GL}(q) & \end{array}$$

y consideramos $\mathrm{B}(\tilde{q}) : \mathrm{BGL}(R) \to \mathrm{B}\, S$. Observemos que $\mathrm{E}(R/I) \subset S$ dado que

$$e_{ij}(q(r)) = \mathrm{GL}(q)(e_{ij}(r)).$$

Podemos considerar la construcción "+" de $\mathrm{B}\, S$ y de $\mathrm{BGL}(R)$ respecto a los subgrupos $\mathrm{E}(R/I)$ y de $\mathrm{E}(R)$ de $\pi_1(\mathrm{B}\, S) = S$ y de $\pi_1(\mathrm{BGL}(R)) = \mathrm{GL}(R)$. La proposición 2.3.6 nos permite considrar q^+ tal que el siguente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BGL}(R) & \xrightarrow{\mathrm{B}\,\tilde{q}} & \mathrm{B}\, S \\ \downarrow{\scriptstyle \imath} & & \downarrow{\scriptstyle \imath} \\ \mathrm{BGL}(R)^+ & \xrightarrow[q^+]{} & \mathrm{B}\, S^+ \end{array}$$

Definimos

$$K_n(R, I) = \pi_n(F_{q^+})$$

siendo F_{q^+} la fibra homotópica de q^+.

Por lo visto en la observación 2.2.15 podemos realizar la siguiente descomposición

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{BGL}(R)^+ & & \\ & \overset{\simeq}{\swarrow} & & \overset{q^+}{\searrow} & \\ F_{q^+} & \longrightarrow & E_{q^+} & \xrightarrow[p]{} & \mathrm{BS}^+ \end{array}$$

siendo p una fibración. Luego podemos considerar la sucesión exacta larga asociada a p

$$\ldots \to \pi_n(F_q^+) \to \pi_n(E_q^+) \to \pi_n(\mathrm{BS}^+) \to \pi_{n-1}(F_q^+) \to \ldots$$

Además por construcción $\pi_n(\mathrm{BS}^+) = K_n(R/I)\ \forall n \geq 1$ y así obtenemos una sucesión de la forma

$$\begin{aligned} \ldots \to K_n(R, I) \to K_n(R) \to K_n(R/I) \to K_{n-1}(R, I) \to \ldots \\ \ldots \to K_2(R) \to K_2(R/I) \to K_1(R, I) \to K_1(R) \to K_1(R/I) \end{aligned}$$

3.4. Pseudo-conjugación en $\mathrm{GL}\, R$.

Definición 3.4.1. Dado un morfismo inyectivo $u : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ de enteros positivos, definimos un morfismo de grupos $u_\cdot : \mathrm{GL}\, R \to \mathrm{GL}\, R$ por la fórmula

$$(u_\cdot(M))_{ij} = \begin{cases} m_{kl} & \text{si } (i,j) = (u(k), u(l)) \\ \delta_{ij} & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Lema 3.4.2. Para todo morfismo inyectivo $u : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, la función $u_\cdot^+ : \mathrm{BGL}(R)^+ \to \mathrm{BGL}(R)^+$ es una equivalencia de homotopía.

Demostración: Observemos que el subgrupo $\mathrm{E}(R)$ es invariante por $u_\cdot$; denotemos por $u'_\cdot$ a la restricción de $u_\cdot$ a $\mathrm{E}(R)$. Si tenemos un número finito de elementos de $\mathrm{E}(R)$, $g_1, \ldots, g_n$, existe $c \in \mathrm{E}(R)$ tal que $cg_ic^{-1} = u'_\cdot(g_i)$.

Sea $\{\mathbb{Z}\,\mathrm{E}(R)_\bullet, d_\bullet\}$ el siguiente complejo de cadenas

$$\mathbb{Z}\,\mathrm{E}(R)_j = \mathbb{Z}\,\mathrm{E}(R)^j$$
$$d_j : \mathbb{Z}\,\mathrm{E}(R)_j \to \mathbb{Z}\,\mathrm{E}(R)_{j-1} \qquad d_j(g_1, \ldots, g_j) = \textstyle\sum_{k=0}^{j}(-1)^k(g_1, \ldots, \hat{g_k}, \ldots, g_j)$$

$\hat{g_k}$ significa que el elemento g_k se elimina. Sea $x \in H_n(\mathrm{BE}(R); \mathbb{Z}) = H_n(\mathrm{E}(R); \mathbb{Z}) = H_n(\mathbb{Z}\,\mathrm{E}(R)_\bullet \otimes \mathbb{Z}) = H_n(\mathbb{Z}\,\mathrm{E}(R)_\bullet)$, entonces x esta representado por un ciclo en $\mathbb{Z}\,\mathrm{E}(R)_n$

$$\sum_{i=1}^{m} n_i(g_1^i, \ldots, g_n^i)$$

luego el elemento $(u'_\cdot)_*(x)$ esta representado por

$$\sum_{i=1}^{m} n_i(u'_\cdot(g_1^i, \ldots, g_n^i)) = \sum_{i=1}^{m} n_i(cg_1^ic^{-1}, \ldots, cg_n^ic^{-1})$$

Como la conjugación induce la función identidad en homología entonces $u'_{\cdot *} = \mathrm{id}_{H_*(\mathrm{BE(R)})}$. Como la aplicación $u'^{+}_\cdot$ induce isomorfismos a nivel de homología y $\mathrm{BE(R)}^+$ es simplemente conexo el teorema D.21 nos permite afirmar que $u'^{+}_\cdot$ es una equivalencia homotópica.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BE}(R) & \xrightarrow{u'_\cdot} & \mathrm{BE}(R) \\ {\scriptstyle\iota}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\iota} \\ \mathrm{BE}(R)^+ & \xrightarrow[u'^{+}_\cdot]{} & \mathrm{BE}(R)^+ \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H_n(\mathrm{BE}(R); \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\mathrm{id}_{H_n(\mathrm{BE(R)};\mathbb{Z})}} & H_n(\mathrm{BE}(R); \mathbb{Z}) \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ H_n(\mathrm{BE}(R)^+; \mathbb{Z}) & \xrightarrow[u'^{+}_\cdot]{} & H_n(\mathrm{BE}(R)^+; \mathbb{Z}) \end{array}$$

El siguiente diagrama a la izquierda es conmutativo, entonces el de la derecha es también conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E}(R) & \xrightarrow{u'_\cdot} & \mathrm{E}(R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{GL}(R) & \xrightarrow[u_\cdot]{} & \mathrm{GL}(R) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{BE}(R)^+ & \xrightarrow{u'^{+}_\cdot} & \mathrm{BE}(R)^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{BGL}(R)^+ & \xrightarrow[u^{+}_\cdot]{} & \mathrm{BGL}(R)^+ \end{array}$$

entonces

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\mathrm{BE}(R)^+) & \xrightarrow{u'^{+}_{\cdot *}} & \pi_n(\mathrm{BE}(R)^+) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_n(\mathrm{BGL}(R)^+) & \xrightarrow[u^{+}_{\cdot *}]{} & \pi_n(\mathrm{BGL}(R)^+) \end{array}$$

Para $n \geq 2$ los morfismos verticales son isomorfismos porque $\mathrm{BE}(R)^+ \to \mathrm{BGL}(R)^+$ es un revestimiento universal (ver teorema 2.6.6), luego $u^{+}_{\cdot *} : \pi_n(\mathrm{BGL}(R)^+) \to \pi_n(\mathrm{BGL}(R)^+)$ es un isomorfismo $\forall n \geq 2$. Por otro lado a nivel de grupo fundamental el morfismo es

$$\overline{u}_\cdot : \mathrm{GL}(R)/\,\mathrm{E}(R) \to \mathrm{GL}(R)/\,\mathrm{E}(R)$$

el cual es la identidad dado que M y $u_\cdot(M)$ estan en la misma clase. Luego por el teorema D.19, $u_\cdot^+$ es una equivalencia de homotopía. □

Lema 3.4.3. El grupo de Grothendieck del monoide $M = \{u : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+ : u \text{ inyectiva}\}$ es trivial.

Demostración: Denotamos por $[u]$ a la clase de $u \in M$ en GM. Si u tiene un número infinito de puntos fijos podemos considerar una aplicación inyectiva $\imath : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ donde $\imath(n) =$ n-ésimo punto fijo de u tal que $u \circ \imath = \imath$. Entonces en GM obtenemos la siguiente igualdad $[u][\imath] = [\imath]$ y por lo tanto $[u] = 1$.

Dado $v \in M$ probaremos que existe u con un número infinito de puntos fijos tal que $v \circ u$ también tiene un número infinito de puntos fijos, luego concluimos que

$$1 = [v \circ u] = [v][u] = [v]$$

y por lo tanto GM es trivial. Sea $A \cup B = \mathbb{Z}_+$ una partición de $\mathbb{Z}_+$ en dos subconjuntos infinitos tales que A esta contenido en la imagen de v. Denotamos por $\{p, q\}$ al conjunto de enteros comprendidos entre p y q. Sea $E_1 = \{1, e_1\}$ tal que E_1 contiene al menos un elemento a_1 de A, a $v^{-1}(a_1)$ y a un elemento de B, b_1, distinto de $v^{-1}(a_1)$. Definimos una biyección $u : E_1 \to E_1$ tal que

$$u(a_1) = v^{-1}(a_1) \qquad u(b_1) = b_1.$$

Sea $E_2 = \{e_1 + 1, e_2\} \subset \mathbb{Z}_+$ conteniendo al menos un elemento a_2 de A, a $v^{-1}(a_2)$ y a un elemento b_2 de B distinto de $v^{-1}(a_2)$. Extendemos u a $u : E_1 \cup E_2 \to E_1 \cup E_2$ de modo que

$$u(a_2) = v^{-1}(a_2) \qquad u(b_2) = b_2$$

Dado que A y B son infinitos podemos proceder inductivamente y obtener un morfismo $u : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ con infinitos puntos fijos tal que $v \circ u$ también tiene infinitos puntos fijos. □

Proposición 3.4.4. Si $u : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ es un morfismo inyectivo, entonces $u_\cdot^+ : \mathrm{BGL}(R)^+ \to \mathrm{BGL}(R)^+$ es homotópico a la identidad.

Demostración: Definimos un morfismo del monoide $M = \{u : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+ : u \text{ es inyectiva}\}$ en las clases de homotopía de los endomorfismos de $\mathrm{BGL}(R)^+$, $\mathrm{End}(\mathrm{BGL}(R)^+, \mathrm{BGL}(R)^+)$

$$u \mapsto [u_\cdot^+].$$

Dicho morfismo se factoriza a traves de GM que es trivial, luego $[u_\cdot^+] = [\mathrm{id}_{\mathrm{BGL}(R)^+}]$. □

Definición 3.4.5 (pseudo-conjugación)**.** Dos morfismos $f, g : G \to \mathrm{GL}(R)$ son pseudo-conjugados si existe una función inyectiva $u : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ tal que g y $u_\cdot \circ f$ son conjugados o tal que f y $u_\cdot \circ g$ son conjugados.

3.5. Estructura de H-grupo de $\mathrm{BGL}(R)^+$

Definición 3.5.1 (H-espacio)**.** Una estructura de H-espacio de un espacio topológico X está dada por una aplicación continua $\mu : X \times X \to X$ y un punto $e \in X$ tales que

$$\mu(e,-) : X \to X \qquad \mu(-,e) : X \to X \qquad \mathrm{id}_X : X \to X$$

son homotópicas relativas a $\{e\}$, es decir existen $F_t : X \to X$ y $H_t : X \to X$ homotopías tales que $H_0 = F_0 = \mathrm{id}_X$, $H_1 = \mu(-,e)$, $F_1 = \mu(e,-)$ y $F_t(e) = H_t(e) = e \ \forall t \in [0,1]$.

- Decimos que X es un H-espacio asociativo si el siguiente diagrama conmuta a menos de homotopía

$$\begin{array}{ccc} X \times X \times X & \xrightarrow{\mu \times \mathrm{id}} & X \times X \\ {\scriptstyle \mathrm{id} \times \mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ X \times X & \xrightarrow[\mu]{} & X \end{array}$$

- Decimos que X es un H-espacio abeliano si el siguiente diagrama es commutativo a menos de homotopía.

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{\mu} & X \\ {\scriptstyle T}\downarrow & \nearrow_{\mu} & \\ X \times X & & \end{array} \qquad T : X \times X \to X \times X \quad T(x,y) = (y,x).$$

- Decimos que $l : X \to X$ es una inversa homotópica a izquierda de μ si la siguiente aplicación es homotópicamente trivial

$$X \xrightarrow{l \times \mathrm{id}} X \times X \xrightarrow{\mu} X$$

- Decimos que $r : X \to X$ es una inversa homotópica a derecha de μ si la siguiente aplicación es homotópicamente trivial

$$X \xrightarrow{\mathrm{id} \times r} X \times X \xrightarrow{\mu} X$$

- Un H-grupo es un H-espacio asociativo con una aplicación $i : X \to X$ que es una inversa homotópica a izquierda y a derecha de μ.

Veremos que $\mathrm{BGL}(R)^+$ tiene estructura de H-grupo abeliano.

Definición 3.5.2 (Suma en $\mathrm{GL}\, R$)**.** Definimos $\oplus : \mathrm{GL}\, R \times \mathrm{GL}\, R \to \mathrm{GL}\, R$ de la siguiente manera. Sean $M, N \in \mathrm{GL}\, R$ entonces

$$(M \oplus N)_{ij} = \begin{cases} m_{kl} & i = 2k-1 \quad j = 2l-1 \\ n_{kl} & i = 2k \qquad j = 2l \\ 0 & \text{otro} \qquad \text{caso} \end{cases}$$

En otras palabras, esta operación consiste en considerar la matriz $\hat{M}$ que resulta de intercalar columnas y filas de ceros en la matriz M dejando ceros en las columnas y filas pares de $\hat{M}$, considerar la matriz $\hat{N}$ que resulta de intercalar columnas y filas de ceros en la matriz N dejando ceros en las columnas y filas impares de $\hat{N}$, luego sumar $\hat{N}$ y $\hat{M}$ en el sentido usual.

$$M \oplus N = \hat{M} + \hat{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{m_{11}} & 0 & \mathbf{m_{12}} & 0 & \mathbf{m_{13}} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{m_{21}} & 0 & \mathbf{m_{22}} & 0 & \mathbf{m_{23}} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{m_{31}} & 0 & \mathbf{m_{32}} & 0 & \mathbf{m_{33}} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{n_{11}} & 0 & \mathbf{n_{12}} & 0 & \mathbf{n_{13}} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{n_{21}} & 0 & \mathbf{n_{22}} & 0 & \mathbf{n_{23}} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{n_{31}} & 0 & \mathbf{n_{32}} & 0 & \mathbf{n_{33}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{m_{11}} & 0 & \mathbf{m_{12}} & 0 & \mathbf{m_{13}} & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{n_{11}} & 0 & \mathbf{n_{12}} & 0 & \mathbf{n_{13}} & \dots \\ \mathbf{m_{21}} & 0 & \mathbf{m_{22}} & 0 & \mathbf{m_{23}} & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{n_{21}} & 0 & \mathbf{n_{22}} & 0 & \mathbf{n_{23}} & \dots \\ \mathbf{m_{31}} & 0 & \mathbf{m_{32}} & 0 & \mathbf{m_{33}} & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{n_{31}} & 0 & \mathbf{n_{32}} & 0 & \mathbf{n_{33}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \end{pmatrix}$$

Proposición 3.5.3.

- Si $M, N, A, B \in \mathrm{GL}(R)$ entonces $(M \oplus N)(A \oplus B) = MA \oplus NB$

Observación 3.5.4. Denotemos por $\iota_n : \mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}(R)$ al morfismo de inclusión

$$\iota_n(M) = \begin{pmatrix} M & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Dadas dos matrices $M \in \mathrm{GL}_n(R)$ y $N \in \mathrm{GL}_m(R)$ los elementos $\iota_n(M) \oplus \iota_m(N)$ y $\iota_{m+n}\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ son conjugados por un elemento de $\mathrm{E}(R)$. Esto se debe a que $\iota_{m+n}\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ se obtiene de $\iota_n(M) \oplus \iota_m(N)$ intercambiando filas y columnas. En particular como $\iota_{2n}\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix}$ pertenece a $\mathrm{E}(R)$ (ver corolario 2.1.3 del [Ros94] pag 60) tenemos que $\iota_n(M) \oplus \iota_n(M^{-1})$ pertenece a $\mathrm{E}(R)$. De ahora en más denotaremos $M \oplus_d N$ a $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$.

Definición 3.5.5 ($\boxplus : \mathrm{BGL}\, R^+ \times \mathrm{BGL}\, R^+ \to \mathrm{BGL}\, R^+$)**.** Sea $\oplus : \mathrm{GL}\, R \times \mathrm{GL}\, R \to \mathrm{GL}\, R$ la suma definida en 3.5.2. Sean

$$\begin{array}{ccc}
(\mathrm{BGL}\, R \times \mathrm{BGL}\, R)^+ & \xrightarrow{\tilde{\oplus}^+} & \mathrm{BGL}\, R^+ \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{BGL}\, R \times \mathrm{BGL}\, R & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{BGL}\, R \\
\uparrow \simeq & \nearrow_{\mathrm{B}\oplus} & \\
\mathrm{B}(\mathrm{GL}\, R \times \mathrm{GL}\, R) & &
\end{array}$$

En la proposición 2.3.10 vimos que existe una equivalencia homotópica,

$$k : \mathrm{BGL}\, R^+ \times \mathrm{BGL}\, R^+ \to (\mathrm{BGL}\, R \times \mathrm{BGL}\, R)^+.$$

Definimos $\boxplus : \mathrm{BGL}\, R^+ \times \mathrm{BGL}\, R^+ \to \mathrm{BGL}\, R^+$ como $\tilde{\oplus}^+ \circ k$

$$\boxplus : \mathrm{BGL}\, R^+ \times \mathrm{BGL}\, R^+ \xrightarrow[k]{} (\mathrm{BGL}\, R \times \mathrm{BGL}\, R)^+ \xrightarrow[\oplus^+]{} \mathrm{BGL}\, R^+$$

Proposición 3.5.6. Si dos morfismos $f, g : G \to \mathrm{GL}\, R$ son pseudo conjugados entonces $f^+ : \mathrm{BG} \to \mathrm{GL}(R)^+$ y $g^+ : \mathrm{BG} \to \mathrm{BGL}(R)^+$ son homotópicas.

Demostración: Supongamos sin pérdida de generalidad que existe una aplicación inyectiva $u : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ tal que $u_\cdot \circ f$ y g son conjugados, es decir, existe $M \in \mathrm{GL}\, R$ tal que $g(x) = M(u_\cdot \circ f)(x)M^{-1}, \forall x \in G$, entonces $g(x) \oplus I = (M \oplus M^+)((u_\cdot \circ f)(x) \oplus I)(M^{-1} \oplus M)$. Por la observación 3.5.4, $M \oplus M^{-1}$ es un elemento de $\mathrm{E}(R)$ por lo tanto por proposición 2.6.5 $(g \oplus 1)^+$ es homotópico a $((u_\cdot \circ f) \oplus 1)^+$. Por otro lado los morfismos

$$\begin{array}{rccc} g \oplus 1 : & G & \to & \mathrm{GL}\, R \\ & x & \mapsto & g(x) \oplus I \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} (u_\cdot \circ f) \oplus 1 : & G & \to & \mathrm{GL}\, R \\ & x & \mapsto & (u_\cdot \circ f)(x) \oplus I \end{array}$$

son conjugados por un elemento de $\mathrm{E}(R)$ con g y $(u_\cdot \circ f)$ respectivamente, luego g^+ es homotópico a $(u_\cdot \circ f)^+$. Por proposición 3.4.4, $u_\cdot^+$ es homotópica a la identidad, luego f^+ es homotópica a $(u_\cdot \circ f)^+$. □

Teorema 3.5.7 ([Sta70] pag 10)**.** Si X es un H-espacio asociativo conexo y tiene el tipo de homotopía de un CW-complejo entonces existe la inversa homotópica de μ, donde μ es la operación de la estructura de H-espacio.

Teorema 3.5.8. La aplicación continua $\boxplus : \mathrm{BGL}\, R^+ \times \mathrm{BGL}\, R^+ \to \mathrm{BGL}\, R^+$ le da al espacio $\mathrm{BGL}\, R^+$ una estructura de H-grupo abeliano.

Demostración: Sea el morfismo $u : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ definido por $u(n) = 2n - 1$. Como $u_\cdot(M) = M \oplus I$, tenemos que $- \boxplus e$ es homotópica a $u_\cdot^+$ que por proposición 3.4.4 es homotópica a $\mathrm{id}_{\mathrm{BGL}^+ R}$. Razonando análogamente con $v(n) = 2n$ tenemos que $v_\cdot(M) = I \oplus M$ y por lo tanto $e \boxplus -$ es homotópica a la identidad. Luego $\mathrm{BGL}^+(R)$ es un H-espacio.

Considerando la biyección $w : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$

$$w(m) = \begin{cases} 2n & si \quad m = 2n-1 \\ 2n-1 & si \quad m = 2n \end{cases}$$

tenemos que $A \oplus B = w_\cdot(B \oplus A)$ y por lo tanto los siguientes morfismos son pseudo-conjugados

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}\, R \times \mathrm{GL}\, R & \to & \mathrm{GL}\, R \\ (A, B) & \mapsto & A \oplus B \\ (A, B) & \mapsto & B \oplus A \end{array}$$

y por lo tanto, por proposición 3.5.6 las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BGL}^+ R \times \mathrm{BGL}^+ R & \to & \mathrm{BGL}^+ R \\ (A, B) & \mapsto & A \boxplus B \\ (A, B) & \mapsto & B \boxplus A \end{array}$$

son homotópicas. Luego $\mathrm{BGL}^+ R$ es un H-espacio abeliano.

Considerando la biyección $t : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$

$$t(m) = \begin{cases} 4n-3 & si \quad m = 2n-1 \\ 4n-1 & si \quad m = 4n-2 \\ 2n & si \quad m = 4n \end{cases}$$

obtenemos que $t_\cdot(A \oplus (B \oplus C)) = (A \oplus B) \oplus C$ y razonando análogamente a la parte anterior obtenemos que $\mathrm{BGL}^+(R)$ es un H-espacio asociativo abeliano.

Por el teorema 3.5.7, $\mathrm{BGL}^+(R)$ es un H-grupo abeliano y denotaremos por $\imath : \mathrm{BGL}^+(R) \to \mathrm{BGL}^+(R)$ a la inversa homotópica de $\boxplus$ y por $\boxminus$ a "sumar el inverso" $* \boxplus \imath$. □

Proposición 3.5.9. Si $\varphi : R \to R'$ es un morfismo de anillos, entonces $\varphi^+ : \mathrm{BGL}^+(R) \to \mathrm{BGL}^+(R')$ es un morfismo de H-espacios.

Demostración: Hay que probar que el siguiente diagrama es conmutativo a menos de homotopía

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BGL}^+(R) \times \mathrm{BGL}^+(R) & \xrightarrow{\boxplus} & \mathrm{BGL}^+(R) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi^+ \times \varphi^+} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^+} \\ \mathrm{BGL}^+(R') \times \mathrm{BGL}^+(R') & \xrightarrow[\boxplus]{} & \mathrm{BGL}^+(R') \end{array}$$

Ésto es inmediato del hecho que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(R) \times \mathrm{GL}(R) & \xrightarrow{\oplus} & \mathrm{GL}(R) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{GL}(\varphi) \times \mathrm{GL}(\varphi)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{GL}(\varphi)} \\ \mathrm{GL}(R') \times \mathrm{GL}(R') & \xrightarrow[\oplus]{} & \mathrm{GL}(R') \end{array}$$

□

3.6. Estabilidad del funtor K_n

Definición 3.6.1 ($\mathcal{M}_n$-estabilidad)**.** Decimos que un funtor F : **Ring** $\to$ **Grp** es $\mathcal{M}_n$-estable si la imagen $F(\imath)$ del morfismo de anillos $\imath : R \to \mathcal{M}_n(R)$

$$r \mapsto \mathrm{diag}(r, 0 \ldots, 0)$$

es un isomorfismo de grupos.

Proposición 3.6.2. Si R es un anillo con unidad entonces

$$K_n(R) = K_n(\mathcal{M}_p(R)) \qquad n, p \geq 1.$$

Demostración: Una matriz de tamaño $m \times m$ con coeficientes en $\mathcal{M}_p(R)$ puede verse como una matriz de tamaño $mp \times mp$ con coeficientes en R. Sea el morfismo que considera una matriz de $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_p(R))$ como una matriz de $\mathrm{GL}(R)$,

$$j : \mathrm{GL}(\mathcal{M}_p(R)) \to \mathrm{GL}(R).$$

Una matriz M de $\mathrm{GL}(R)$ se puede considerar como una matriz de $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_p(R))$ agrupando las entradas de M en bloques de tamaño $p \times p$. Sea el morfismo que considera una matriz de $\mathrm{GL}(R)$ como una matriz de $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_p(R))$,

$$t : \mathrm{GL}(R) \to \mathrm{GL}(\mathcal{M}_p(R)).$$

Los morfismos definidos son uno inverso del otro, por lo tanto los grupos $\mathrm{GL}(R)$ y $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_p(R))$ son isomorfos. Luego $K_n(R) = K_n(\mathcal{M}_p(R))$. □

Observación 3.6.3. Un funtor F : **Ring** $\to$ **Grp** $\mathcal{M}_2$-estable es $\mathcal{M}_n$-estable para todo $n \geq 2$.

Demostración: Es claro que la imagen por F de $\iota : R \to \mathcal{M}_{2^p}(R)$ es un isomorfismo para todo p. Sean $n \in \mathbb{N}$ y p el mayor entero positivo tal que $2^p < n$. Consideramos los siguientes morfismos

$$R \xrightarrow{\iota_1} \mathcal{M}_{2^p}(R) \xrightarrow{\iota_2} \mathcal{M}_n(R) \xrightarrow{\iota_3} \mathcal{M}_{2^{p+1}}(R) \xrightarrow{\iota_4} \mathcal{M}_{2n}(R)$$

Como $F(\iota_4 \circ \iota_3)$ es un isomorfismo entonces $F(\iota_3)$ es un monomorfismo. Como $F(\iota_3 \circ \iota_2)$ es un isomorfismo entonces $F(\iota_3)$ es un epimorfismo. Luego $F(\iota_3)$ es un isomorfismo. Además, $F(\iota_2)$ y $F(\iota_1)$ son isomorfismos. Luego $F(\iota_2 \circ \iota_1)$ es un isomorfismo y por lo tanto F es M_n-estable. □

Proposición 3.6.4. Sean R un anillo con unidad y

$$\imath_R : R \to \mathcal{M}_2(R) \qquad \imath_R(r) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces $K_n(\imath_R) : K_n(R) \to K_n(\mathcal{M}_2(R))$ es un isomofismo $\forall n \geq 1$. Luego K_n es un funtor $\mathcal{M}_p$-estable para todo $p \geq 2$.

Demostración: Consideramos

$$\tilde{\imath}_R : \tilde{R} \to \tilde{\mathcal{M}_2}(R) \qquad \tilde{\imath}_R(r,n) = (\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, n).$$

Como R y $\mathcal{M}_2(R)$ con anillos con unidad tenemos los siguientes isomorfismos

$$\begin{array}{ll} \psi_R : R \times \mathbb{Z} \to \tilde{R} & \psi_{\mathcal{M}_2(R)} : \mathcal{M}_2(R) \times \mathbb{Z} \to \tilde{\mathcal{M}_2}(R) \\ \psi_R(r,n) = (r + n \cdot 1_R, n) & \psi_{\mathcal{M}_2(R)}(M,n) = (M + \begin{pmatrix} n \cdot 1_R & 0 \\ 0 & n \cdot 1_R \end{pmatrix}, n) \end{array}$$

Si definimos $j : R \times \mathbb{Z} \to \mathcal{M}_2(R) \times \mathbb{Z}$ como $j(r,n) = (\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -n \cdot 1_R \end{pmatrix}, n)$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} R \times \mathbb{Z} & \xrightarrow{j} & \mathcal{M}_2(R) \times \mathbb{Z} \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_R} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{\mathcal{M}_2(R)}} \\ \tilde{R} & \xrightarrow[\tilde{\imath}_R]{} & \tilde{\mathcal{M}_2}(R) \end{array}$$

luego alcanza probar que j^+ es un homeomorfismo en las fibras. Identificando $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_2(R))$ con $\mathrm{GL}(R)$ obtenemos que

$$\mathrm{GL}(j) : \mathrm{GL}(R) \times \mathrm{GL}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}(R) \times \mathrm{GL}(\mathbb{Z}) \qquad \mathrm{GL}(j)(M,N) = (M \oplus -N, N)$$

el cual induce la siguiente aplicación que es una equivalencia homotópica en las fibras

$$j^+ : \mathrm{BGL}(R)^+ \times \mathrm{BGL}(\mathbb{Z})^+ \to \mathrm{BGL}(R)^+ \times \mathrm{BGL}(\mathbb{Z})^+ \qquad j^+(x,y) = (x \boxplus \tilde{y}, y).$$

En efecto si fijamos y, $\tilde{y}$ es un elemento fijo, luego $x \mapsto x \boxminus \tilde{y}$ es una inversa homotópica de $x \mapsto x \boxplus \tilde{y}$. Finalmente obtenemos que $K_n(\imath_R) : K_n(R) \to K_n(\mathcal{M}_2(R))$ es un isomofismo $\forall n \geq 1$. □

Proposición 3.6.5. ([CnT] proposición 5.1.2.) Sea E : **Ring** → **Grp** un funtor $\mathcal{M}_2$-estable. Sean R un anillo con unidad y $v, w \in R$ tales que $vw = 1$, entonces

$$\begin{array}{rccc} \phi^{v,w} : & R & \to & R \\ & r & \mapsto & wrv \end{array}$$

es un morfismo de anillos y $\mathrm{E}(\phi^{v,w}) = \mathrm{id}_{\mathrm{E}(R)}$.

Demostración: Primero probemos que los morfismos

$$\begin{array}{rccc} \imath_1 : & R & \to & \mathcal{M}_2(R) \\ & r & \mapsto & \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \imath_2 : & R & \to & \mathcal{M}_2(R) \\ & r & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \end{array}$$

inducen el mismo isomorfismo, i.e. $\mathrm{E}(\imath_1) = \mathrm{E}(\imath_2)$. Como E es $\mathcal{M}_2$-estable, $\mathrm{E}(\imath_1)$ es un isomorfismo. Por otro lado si σ es una permutación, P_σ denota a la matriz asociada a σ y c_σ denota la conjugación por la matriz P_σ. Tenemos la siguiente identidad

$$\imath_1 \circ \imath_2 = c_{(3,1,2,4)} \circ \imath_1 \circ \imath_1 = c_{(2,1,3,4)} \circ \imath_1 \circ \imath_1$$

Observemos que $c^3_{(3,1,2,4)} = c^2_{(2,1,3,4)} = \mathrm{id}$ entonces

$$\begin{gathered}\mathrm{E}(c_{(3,1,2,4)}) = \mathrm{E}(c_{(2,1,3,4)}) = \mathrm{E}(\imath_i \circ \imath_2) \circ \mathrm{E}^{-1}(\imath_1 \circ \imath_1)\\ \mathrm{id} = \mathrm{E}^3(c_{(3,1,2,4)}) = \mathrm{E}(c_{(3,1,2,4)}) \circ \mathrm{E}^2(c_{2,1,3,4}) = \mathrm{E}(c_{(3,1,2,4)})\\ \mathrm{E}(\imath_1) \circ \mathrm{E}(\imath_2) = \mathrm{E}(\imath_1) \circ \mathrm{E}(\imath_1) \Rightarrow \mathrm{E}(\imath_1) = \mathrm{E}(\imath_2).\end{gathered}$$

Es claro que $\phi^{v,w}$ es un morfismo de anillos:

$$\phi^{v,w}(ab) = wabv = wavwbv = \phi^{v,w}(a)\phi^{v,w}(b) \quad \phi(a+b) = w(a+b)v = wav+wbv = \phi^{v,w}(a)+\phi^{v,w}(b).$$

Consideramos

$$\begin{array}{rccc}\overline{\phi} = \phi^{v\oplus 1, w\oplus 1}: & \mathcal{M}_2(R) & \to & \mathcal{M}_2(R)\\ & M & \mapsto & \begin{pmatrix} w & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} M \begin{pmatrix} v & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

Como los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\imath_1} & \mathcal{M}_2(R)\\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\overline{\phi}}\\ R & \xrightarrow[\imath_1]{} & \mathcal{M}_2(R)\end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\imath_2} & \mathcal{M}_2(R)\\ & {\scriptstyle\imath_2}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\overline{\phi}}\\ & & \mathcal{M}_2(R)\end{array}$$

luego

$$\mathrm{E}(\overline{\phi}) \circ \mathrm{E}(\imath_1) = \mathrm{E}(\imath_1) \circ \mathrm{E}(\phi) \qquad \mathrm{E}(\overline{\phi}) \circ \mathrm{E}(\imath_2) = \mathrm{E}(\imath_2)$$

y finalmente

$$\mathrm{E}(\phi) = \mathrm{E}^{-1}(\imath_1) \circ \mathrm{E}(\overline{\phi}) \circ \mathrm{E}(\imath_1) = \mathrm{E}^{-1}(\imath_2) \circ \mathrm{E}(\overline{\phi}) \circ \mathrm{E}(\imath_2) = \mathrm{id}$$

□

3.7. K_n-grupos de un anillo con suma infinita

Definición 3.7.1 (Anillo con suma)**.** Un anillo con suma es un anillo con unidad R con cuatro elementos distinguidos $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in R$ tales que

$$\alpha_0\beta_0 = \alpha_1\beta_1 = 1 \qquad \beta_0\alpha_0 + \beta_1\alpha_1 = 1.$$

Si R es un anillo con suma y r y s son elementos de R notamos

$$r\tilde{\oplus}s := \beta_0 r\alpha_0 + \beta_1 s\alpha_1.$$

Obtenemos así un morfismo de anillos $\tilde{\oplus} : R \times R \to R$.

Observación 3.7.2. Si R es un anillo con suma, entonces

$$\alpha_0\beta_1 = \alpha_1\beta_0 = 0.$$

Definición 3.7.3 (Anillo con suma infinita)**.** Un anillo con suma infinita es un anillo con suma R y un endomorfismo $\phi^\infty : R \to R$ tal que

$$\mathrm{id}_R \tilde{\oplus} \phi^\infty = \phi^\infty.$$

Proposición 3.7.4. Si R es una anillo con suma infinita entonces $K_n(R) = 0\ \forall n \geq 1$.

Demostración: Consideremos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} R \times R & \xrightarrow{-\tilde{\oplus}-} & R \\ {\scriptstyle (\mathrm{id}_R,0)}\uparrow & \nearrow_{\phi^{\alpha_0,\beta_0}} & \\ R & & \end{array} \qquad \phi^{\alpha_0,\beta_0}(r) = \beta_0 r \alpha_0 \qquad \begin{array}{ccc} R \times R & \xrightarrow{-\tilde{\oplus}-} & R \\ {\scriptstyle (0,\mathrm{id}_R)}\uparrow & \nearrow_{\phi^{\alpha_1,\beta_1}} & \\ R & & \end{array} \qquad \phi^{\alpha_1,\beta_1}(r) = \beta_1 r \alpha_1$$

Aplicando el funtor K_n $n \geq 1$ obtenemos

$$\begin{array}{ccc} K_n(R) \oplus K_n(R) & \xrightarrow{K_n(\tilde{\oplus})} & K_n(R) \\ {\scriptstyle (\mathrm{id}_{K_n(R)},0)}\uparrow & \nearrow_{K_n(\phi^{\alpha_0,\beta_0})} & \\ K_n(R) & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K_n(R) \oplus K_n(R) & \xrightarrow{K_n(\tilde{\oplus})} & K_n(R) \\ {\scriptstyle (0,\mathrm{id}_{K_n(R)})}\uparrow & \nearrow_{K_n(\phi^{\alpha_1,\beta_1})} & \\ K_n(R) & & \end{array}$$

Como K_n es un funtor $\mathcal{M}_2$-estable, la proposición 3.6.5 nos permite afirmar que

$$K_n(\phi^{\alpha_0,\beta_0}) = K_n(\phi^{\alpha_1,\beta_1}) = \mathrm{id}_{K_n(R)}$$

entonces

$$K_n(\tilde{\oplus})(x,0) = x \quad K_n(\tilde{\oplus})(0,y) = y \quad K_n(\tilde{\oplus})(x,y) = x + y$$

Si $x \in K_n(R)$ entonces

$$K_n(\tilde{\oplus})(K_n(\phi^\infty)(x), x) = K_n(\phi^\infty)(x) + x = K_n(\phi^\infty)(x)$$

luego $x = 0$. □

3.7.1. $K_n(\mathbf{C}R) = 0$

Proposición 3.7.5. Sea R un anillo con unidad, entonces $\mathbf{C}R$ es un anillo con suma infinita y por lo tanto $K_n(\mathbf{C}R) = 0$

Demostración: Es fácil verificar que los siugiente elementos le dan a $\mathbf{C}R$ una estructura de anillo con suma

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 = \sum_{i=0}^\infty e_{i,2i} & \beta_0 = \sum_{i=0}^\infty e_{2i,i} \\ \alpha_1 = \sum_{i=0}^\infty e_{i,2i+1} & \beta_1 = \sum_{i=0}^\infty e_{2i+1,i} \end{array}$$

Consideramos el morfismo inyectivo $u : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $u(k,i) = 2^{k+1}i + 2^k - 1$ y sea

$$\phi^\infty : \mathbf{C}R \to \mathbf{C}R \qquad \phi^\infty(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_1^k \beta_0 a \alpha_0 \alpha_1^k = \sum_{k,i,j} e_{u(k,i),u(k,i)} \otimes a_{ij}$$

Es fácil ver que ϕ^∞ es un morfismo de anillos y que

$$\begin{array}{rcl} a \tilde{\oplus} \phi^\infty(a) & = & \beta_0 a \alpha_0 + \beta_1 \phi^\infty(a) \alpha_1 \\ & = & \beta_0 a \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_1^k \beta_0 a \alpha_0 \alpha_1^k \\ & = & \sum_{k=0}^{\infty} \beta_1^k \beta_0 a \alpha_0 \alpha_1^k \\ & = & \phi^\infty(a) \end{array}$$

□

Proposición 3.7.6. Sean R un anillo con suma y $A, B \in \mathrm{GL}_n(R)$ entonces la matriz $A \tilde{\oplus} B = (a_{ij} \tilde{\oplus} b_{ij})_{ij}$ y $A \oplus_d B$ son conjugados en $\mathrm{GL}_{3n}(R)$.

Demostración: Denotemos por $D_n(x)$ a xI_n. Sea

$$Q = \begin{pmatrix} D_n(\beta_0) & D_n(\beta_1) & 0 \\ 0 & 0 & D_n(\alpha_0) \\ 0 & 0 & D_n(\alpha_1) \end{pmatrix}$$

entonces

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} D_n(\alpha_0) & 0 & 0 \\ D_n(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & D_n(\beta_0) & D_n(\beta_1) \end{pmatrix}$$

y luego $Q^{-1}((A \tilde{\oplus} B) \oplus_d I_{2n})Q = A \oplus_d B \oplus I_n$. □

3.8. El producto de Loday

3.8.1. Producto tensorial de matrices

Sean R y R' dos anillos, $R \otimes R' = R \otimes_{\mathbb{Z}} R'$. Consideramos la estructura de anillo en $R \otimes R'$ con el producto

$$(r \otimes r')(s \otimes s') = rs \otimes r's'.$$

Sean p y p' dos enteros positivos. Definimos el morfismo

$$\begin{array}{rccccc} \otimes_{p,p'}^{R,R'} : & \mathrm{GL}_p(R) & \times & \mathrm{GL}_{p'}(R') & \to & \mathrm{GL}_{pp'}(R \otimes R') \\ & (M & , & N) & \mapsto & M \otimes N \end{array}$$

$$M \otimes N = \begin{pmatrix} m_{11} \otimes N & \dots & m_{1p} \otimes N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1} \otimes N & \dots & m_{pp} \otimes N \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m_{11} \otimes n_{11} & \dots & m_{11} \otimes n_{1p'} & & m_{1p} \otimes n_{11} & \dots & m_{1p} \otimes n_{1p'} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{11} \otimes n_{p'1} & \dots & m_{11} \otimes n_{p'p'} & & m_{1p} \otimes n_{p'1} & \dots & m_{1p} \otimes n_{p'p'} \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ m_{p1} \otimes n_{11} & \dots & m_{p1} \otimes n_{1p'} & & m_{pp} \otimes n_{11} & \dots & m_{pp} \otimes n_{1p'} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1} \otimes n_{p'1} & \dots & m_{p1} \otimes n_{p'p'} & & m_{pp} \otimes n_{p'1} & \dots & m_{pp} \otimes n_{p'p'} \end{pmatrix}$$

Observación 3.8.1.

1. $(M \oplus_d N) \otimes P = (M \otimes P) \oplus_d (N \otimes P)$
2. $(M \otimes N) \otimes P = M \otimes (N \otimes P)$
3. Sea $t : R \otimes R' \to R' \otimes R$ el isomorfismo $t(a \otimes a') = a' \otimes a$ y

$$\begin{array}{rccc} s_{pp'} : & \mathrm{GL}_p(R) \times \mathrm{GL}_{p'}(R') & \to & \mathrm{GL}_{p'}(R') \times \mathrm{GL}_p(R) \\ & (x, y) & \mapsto & (y, x) \end{array}$$

   Conjugando a $t(M \otimes N)$ mediante un elemento de $E_{pp'}(R' \otimes R)$, cambiando ciertas columnas y filas, obtenemos a $N \otimes M$.

4. Combinando las propiedades anteriores obtenemos que $P \otimes (M \oplus_d N)$ es conjugado de $(P \otimes M) \oplus_d (P \otimes N)$.

Definimos a menos de homotopía la aplicación $f_{p,p'}^{R,R'} : \mathrm{BGL}_p(R)^+ \times \mathrm{BGL}_{p'}(R')^+ \to \mathrm{BGL}_{pp'}(R \otimes R')^+$ según muestra el siguiente diagrama conmutativo a menos de homotopía

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BGL}_p(R)^+ \times \mathrm{BGL}_{p'}(R')^+ & & \\ \simeq \uparrow & \searrow^{f_{p,p'}^{R,R'}} & \\ (\mathrm{BGL}_p(R) \times \mathrm{BGL}_{p'}(R'))^+ & \xrightarrow[(\mathrm{B}\otimes_{pp'}^{RR'})^+]{} & \mathrm{BGL}_{pp'}(R \otimes R')^+ \\ \iota \uparrow & & \uparrow \iota \\ \mathrm{BGL}_p(R) \times \mathrm{BGL}_{p'}(R') & \longrightarrow & \mathrm{BGL}_{pp'}(R \otimes R') \\ \simeq \uparrow & \nearrow_{\mathrm{B}\otimes_{pp'}^{RR'}} & \\ \mathrm{B}(\mathrm{GL}_p(R) \times \mathrm{GL}_{p'}(R')) & & \end{array}$$

Observación 3.8.2. Se verifican las siguientes propiedades

- Naturalidad: Sea $u : R \to S$ un morfismo de anillos, las aplicaciones $f^{SR'}_{pp'} \circ (\mathrm{Bu}^+ \times \mathrm{id})$ y $(\mathrm{Bu} \times \mathrm{id})^+ \circ f^{RR'}_{pp'}$ son homotópicas. Esto se debe a que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_p(R) \times \mathrm{GL}_{p'}(R') & \xrightarrow{\otimes^{RR'}_{pp'}} & \mathrm{GL}_{pp'}(R \otimes R') \\ \downarrow{\scriptstyle u \times \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle u \otimes \mathrm{id}} \\ \mathrm{GL}_p(S) \times \mathrm{GL}_{p'}(R') & \xrightarrow[\otimes^{SR'}_{pp'}]{} & \mathrm{GL}_{pp'}(S \otimes R') \end{array}$$

  entonces

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BGL}_p(R)^+ \times \mathrm{BGL}_{p'}(R')^+ & \xrightarrow{f^{RR'}_{pp'}} & \mathrm{BGL}_{pp'}(R \otimes R')^+ \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Bu}^+ \times \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{Bu} \otimes \mathrm{id})^+} \\ \mathrm{BGL}_p(S)^+ \times \mathrm{BGL}_{p'}(R')^+ & \xrightarrow[f^{SR'}_{pp'}]{} & \mathrm{BGL}_{pp'}(S \otimes R')^+ \end{array}$$

  es conmutativo a menos de homotopía.

- Bilinealidad: Como el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_p(R) \times \mathrm{GL}_q(R) \times \mathrm{GL}_{p'}(R') & \xrightarrow{\oplus_d \times \mathrm{id}} & \mathrm{GL}_{p+q}(R) \times \mathrm{GL}_{p'}(R') \\ \downarrow{\scriptstyle \otimes^{RR'}_{pp'} \times \otimes^{RR'}_{qp'}} & & \downarrow{\scriptstyle \otimes^{RR'}_{(p+q)p'}} \\ \mathrm{GL}_{pp'}(R \otimes R') \times \mathrm{GL}_{qp'}(R \otimes R') & \xrightarrow[\oplus_d]{} & \mathrm{GL}_{pp'+qp'}(R \otimes R') \end{array}$$

  tenemos que

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BGL}_p(R)^+ \times \mathrm{BGL}_q(R)^+ \times \mathrm{BGL}_{p'}(R')^+ & \xrightarrow{\mathrm{B}\oplus^+_d \times \mathrm{id}} & \mathrm{BGL}_{p+q}(R)^+ \times \mathrm{BGL}_{p'}(R')^+ \\ \downarrow{\scriptstyle f^{RR'}_{pp'} \times f^{RR'}_{qp'}} & & \downarrow{\scriptstyle f^{RR'}_{(p+q)p'}} \\ \mathrm{BGL}_{pp'}(R \otimes R')^+ \times \mathrm{BGL}_{qp'}(R \otimes R')^+ & \xrightarrow[\mathrm{B}\oplus_{\mathrm{d}}{}^+]{} & \mathrm{BGL}_{pp'+qp'}(R \otimes R')^+ \end{array}$$

  es conmutativo a menos de homotopía.

- Asociativa: Como el siguiente siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_p(R) \times \mathrm{GL}_{p'}(R') \times \mathrm{GL}_{p''}(R'') & \xrightarrow{\otimes^{RR'}_{pp'} \times \mathrm{id}} & \mathrm{GL}_{pp'}(R \otimes R') \times \mathrm{GL}_{p''}(R'') \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \times \otimes^{RR''}_{p'p''}} & & \downarrow{\scriptstyle \otimes^{R \otimes R' R''}_{(p+q)p'}} \\ \mathrm{GL}_p(R) \times \mathrm{GL}_{p'p''}(R' \otimes R'') & \xrightarrow[\otimes^{RR' \otimes R''}_{pp'p''}]{} & \mathrm{GL}_{pp'p''}(R \otimes R' \otimes R'') \end{array}$$

tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo a menos de homotopía

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{BGL}_p(R)^+ \times \mathrm{BGL}_{p'}(R')^+ \times \mathrm{BGL}_{p''}(R'')^+ & \xrightarrow{f_{pp'}^{RR'} \times \mathrm{id}} & \mathrm{BGL}_{pp'}(R \otimes R')^+ \times \mathrm{BGL}_{p''}(R'')^+ \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \times f_{p'p''}^{RR''}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{pp'p''}^{R \otimes R' R''}} \\
\mathrm{BGL}_p(R)^+ \times \mathrm{BGL}_{p'p''}(R' \otimes R'')^+ & \xrightarrow[f_{pp'p''}^{RR' \otimes R''}]{} & \mathrm{BGL}_{pp'p''}(R \otimes R \otimes R''')^+
\end{array}$$

- Conmutativa Siendo $t : R \otimes R' \to R' \otimes R$ el isomorfismo $t(a \otimes a') = a' \otimes a$ y

$$\begin{array}{rccc} s_{pp'} : & \mathrm{GL}_p(R) \times \mathrm{GL}_{p'}(R') & \to & \mathrm{GL}_{p'}(R') \times \mathrm{GL}_p(R) \\ & (x, y) & \mapsto & (y, x) \end{array}$$

Como conjugando a $t(M \otimes N)$ mediante un elemento de $E_{pp'}(R' \otimes R)$, cambiando ciertas columnas y filas, obtenemos a $N \otimes M$. Luego los siguientes morfismos son conjugados por un elemento de $E_{pp'}(R' \otimes R)$

$$\mathrm{GL}_p(R) \times \mathrm{GL}_{p'}(R') \xrightarrow{\otimes_{pp'}^{RR'}} \mathrm{GL}_{pp'}(R \otimes R') \xrightarrow{t} \mathrm{GL}_{pp'}(R' \otimes R)$$
$$\mathrm{GL}_p(R) \times \mathrm{GL}_{p'}(R') \xrightarrow{s_{pp'}} \mathrm{GL}_{p'}(R') \times \mathrm{GL}_p(R) \xrightarrow{\otimes_{p'p}^{R'R}} \mathrm{GL}_{pp'}(R' \otimes R)$$

Entonces por la por la proposición 2.6.5 las siguientes aplicaciones son homotópicas

$$\mathrm{BGL}_p(R)^+ \times \mathrm{BGL}_{p'}(R')^+ \xrightarrow{f_{pp'}^{RR'}} \mathrm{BGL}_{pp'}(R \otimes R')^+ \xrightarrow{t} \mathrm{BGL}_{pp'}(R' \otimes R)^+$$
$$\mathrm{BGL}_p(R)^+ \times \mathrm{BGL}_{p'}(R')^+ \xrightarrow{s_{pp'}^+} \mathrm{BGL}_{pp'}(R')^+ \times \mathrm{BGL}_p(R)^+ \xrightarrow{f_{p'p}^{R'R}} \mathrm{BGL}_{pp'}(R' \otimes R)^+$$

3.8.2. La aplicación $\gamma_{pp'}^{RR'}$

Consideremos $\imath$ la inversa homotópica de $\boxplus : \mathrm{BGL}^+(R \otimes R') \times \mathrm{BGL}^+(R \otimes R') \to \mathrm{BGL}^+(R \otimes R')$. Sea

$$\gamma_{pp'}^{RR'} : \mathrm{BGL}_p(R)^+ \times \mathrm{BGL}_{p'}(R')^+ \to \mathrm{BGL}(R \otimes R')^+$$

$$\gamma_{pp'}^{RR'}(x, y) = \iota_{pp'}^+(f_{pp'}^{RR'}(x, y)) \boxplus \imath(\iota_{pp'}^+(f_{pp'}^{RR'}(x_0, y))) \boxplus \imath(\iota_{pp'}^+(f_{pp'}^{RR'}(x, y_0)))$$

$$\gamma_{pp'}^{RR'}(x, y) = \iota_{pp'}^+(f_{pp'}^{RR'}(x, y)) \boxminus \iota_{pp'}^+(f_{pp'}^{RR'}(x_0, y)) \boxminus \iota_{pp'}^+(f_{pp'}^{RR'}(x, y_0))$$

Como $\imath$ es elegida para cada R, no podemos garantizar, a priori, la naturalidad de $\gamma_{pp'}^{RR'}$ en R y R'. Por dicho motivo buscaremos una manera de elegir las aplicaciones

$$\imath_R : \mathrm{BGL}^+(R) \to \mathrm{BGL}^+(R)$$

de manera natural en R. Más precisamente, veremos que para toda subcategoría pequeña I de **Ring** podemos considerar un funtor $\hat{\mathbb{K}} : I \to \mathbf{Top}$ y transformaciones naturales $\hat{\mu} : \hat{\mathbb{K}} \times \hat{\mathbb{K}} \to \hat{\mathbb{K}}$ y $\hat{\imath} : \hat{\mathbb{K}} \to \hat{\mathbb{K}}$ tales que:

- $\pi_n(\hat{\mathbb{K}}(R)) = K_n(R)$ para todo R en I.
- $\hat{\mu}_R : \hat{\mathbb{K}}(R) \times \hat{\mathbb{K}}(R) \to \hat{\mathbb{K}}(R)$ le da estrucutura de H-grupo a $\hat{\mathbb{K}}(R)$.
- $\hat{\imath}_R : \hat{\mathbb{K}}(R) \to \hat{\mathbb{K}}(R)$ es la inversa homotópica de $\hat{\mathbb{K}}(R)$ para todo R en I.

Para demostrar la existencia de la terna $(\hat{\mathbb{K}}, \hat{\mu}, \hat{\imath})$ utilizaremos algunos resultados de la teoría de categorías cerradas de modelos.

Definición 3.8.3. Una categoría cerrada de modelos $\mathcal{M}$ es una categoría con tres clases distinguidas de morfismos:

- Cofibraciones $\rightarrowtail$
- Fibraciones $\twoheadrightarrow$
- Equivaléncias débiles $\xrightarrow{\sim}$

que verifican los siguientes axiomas

- (CM1) La categoría $\mathcal{M}$ tiene colímites y límites finitos.
- (CM2) Si dos de las aplicaciones en el siguiente diagrama conmutativo son equivalencias débiles, entonces lo es la tercera.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ & {\scriptstyle h}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f} & \\ & Z & \end{array}$$

- (CM3) Un morfismo $f : X \to Y$ es un retracto de $g : A \to B$ si existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \longrightarrow & B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

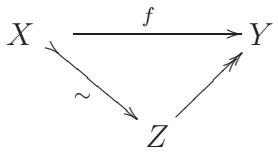
  en donde las composicicones horizontales son la identidad. Un retracto de una equivalencia débil, de una fibración o una cofibración es una equivalencia débil, una fibración o una cofibración, respectivamente.

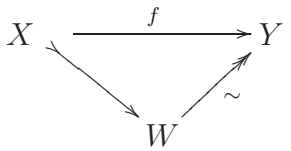
- (CM4) La parte sólida del siguiente diagrama conmutativo implica la existencia de la flecha cortada tal que el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle p} \\ V & \longrightarrow & Y \end{array}$$

  Si además i o p es una equivalencia débil, entonces la flecha cortada también lo es.

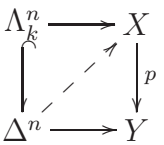
- (CM5)Todo morfismo $f : X \to Y$ se puede factorizar de las siguientes formas

  - 

  - 

Teorema 3.8.4. ([GJ99] pag. 67) La categoría $\mathbb{S}_\star$ es una categoría cerrada de modelos con la siguiente estructura:

- Cofibraciones: inclusiones de conjuntos simpliciales.
- Fibraciones de Kan: Denotemos por Λ^n_k al subconjunto simplcial de Δ^n generado por las caras $\Delta^n(d_j)(\mathrm{id}_{[n]})$, $j \neq k$. El morfismo $p : X \to Y$ es una fibración de Kan si cada vez que el diagrama sólido conmuta, existe la flecha punteada



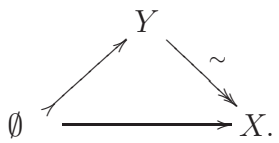
- Equivaléncias débiles: Un morfismo $f : X \to Y$ es una equivalencia débil si $|f| : |X| \to |Y|$ induce isomorfismos $\pi_n(|f|) : \pi_n(|X|, x_0) \to \pi_n(|Y|, y_0)$ para todo n.

Por otro lado el teorema ([Qui67], capítulo 2, sección 4, teorema 4) implica que si I es una subcategoría pequeña de **Ring** entonces $\mathrm{Fun}(I, \mathbb{S}_\star)$ es también una categoría cerrada de modelos. Esta estructura es tal que $\phi : F \to G$ es una equivalencia débil (fibración) si $\phi(i) : F(i) \to G(i)$ es una equivalencia débil (fibración) en $\mathbb{S}_\star$ para todo $i \in I$.

Sea $\mathcal{M}$ una categoría de modelos y denotemos por $*$ a su objeto final y $\emptyset$ a su objeto inicial. Un objeto X de $\mathcal{M}$ es fibrante si el morfismo $X \to *$ es una fibración y es cofibrante si el morfismo $\emptyset \to X$ es una cofibración.

Lema 3.8.5. Si X es un objeto de una categoría cerrada de modelos $\mathcal{M}$, entonces existe un objeto cofibrante Y tal que $Y \xrightarrow{\sim} X$.

Demostración: Por el axioma (CM5) podemos descomponer el morfismo $\emptyset \to X$ de la siguiente manera



Como $\emptyset \rightarrowtail Y$ es una cofibración, Y es cofibrante. □

Teorema 3.8.6. Sean $H : I \to \mathbb{S}_\star$ y $\mu : H \times H \to H$ tales que

- $H(i)$ es un H-espacio con la operación $\mu_i : H(i) \times H(i) \to H(i)$.
- $H(i)$ es conexo.
- $H(i)$ es fibrante.

entonces existen $\hat{H} : I \to \mathbb{S}_\star$, $\hat{\mu} : \hat{H} \times \hat{H} \to \hat{H}$ y $\hat{\imath} : \hat{H} \to \hat{H}$ tales que

- $\hat{H} \xrightarrow{\sim\!\!\!\rightarrow} H$
- $\hat{H}$ y $\hat{H} \times \hat{H}$ son objetos cofibrantes
- $\hat{H}(i)$ es un H-grupo con la operación $\hat{\mu}_i$ cuya inversa es $\hat{\imath}_i$

Demostración: Ver apéndice C en [CnHW]. □

En [BK72] se define un funtor $\mathbb{Z}_\infty : \mathbb{S}_\star \to \mathbb{S}_\star$ y una transformación natural $\phi : \mathrm{id} \to \mathbb{Z}_\infty$ tales que se verifican las siguientes propiedades

1. Si $f : X \to Y$ es un morfismo que induce un isomorfismo en la homología con coeficientes enteros entonces
$$\mathbb{Z}_\infty(f) : \mathbb{Z}_\infty X \to \mathbb{Z}_\infty Y$$
es un equivalencia débil.
2. $\phi_H : H \to \mathbb{Z}_\infty(H)$ es una equivalencia débil si H es un H-espacio.

Nos interesamos por dicho funtor porque el mismo nos permite definir un modelo funtorial de $\mathrm{BGL}^+(R)$. En efecto, tenemos el siguiente resultado

Teorema 3.8.7. ([Ger73] teo 2.16) El espacio $|\mathbb{Z}_\infty \mathrm{VGL}(R)|$ es homotópicamente equivalente a $\mathrm{BGL}^+(R)$.

Sea $\mathbb{K} : \mathbf{Ring} \to \mathbb{S}_\star$, $\mathbb{K}(R) = \mathbb{Z}_\infty \mathrm{VGL}(R)$. Consideramos $\oplus : \mathrm{GL} \times \mathrm{GL} \to \mathrm{GL}$ tal que $\oplus_R : \mathrm{GL}(R) \times \mathrm{GL}(R) \to \mathrm{GL}(R)$ es la operación definida en 3.5.2. Si $f : R \to R'$ es un morfismo de anillos entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(R) \times \mathrm{GL}(R) & \xrightarrow{\oplus_R} & \mathrm{GL}(R) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{GL}\, f \times \mathrm{GL}\, f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{GL}\, f} \\ \mathrm{GL}\, R' \times \mathrm{GL}\, R' & \xrightarrow[\oplus_{R'}]{} & \mathrm{GL}\, R' \end{array}$$

conmuta y por lo tanto $\oplus$ es natural.

Sea $\mu = \mathbb{Z}_\infty \mathrm{V} \oplus : \mathbb{Z}_\infty \mathrm{V}(\mathrm{GL} \times \mathrm{GL}) \to \mathbb{Z}_\infty \mathrm{V}\,\mathrm{GL}$. Por 1.5.6 $\mathrm{V}(\mathrm{GL}\, R \times \mathrm{GL}\, R) = \mathrm{V}(\mathrm{GL}\, R) \times \mathrm{V}(\mathrm{GL}\, R)$ y por ([BK72] capítulo 1, sección 7, 7.2)

$$\mathbb{Z}_\infty(\mathrm{V}\,\mathrm{GL}\, R \times \mathrm{V}\,\mathrm{GL}\, R) \simeq \mathbb{Z}_\infty(\mathrm{V}\,\mathrm{GL}\, R) \times \mathbb{Z}_\infty(\mathrm{V}\,\mathrm{GL}\, R).$$

Luego tenemos definido $\mu : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Observemos que $(\mathbb{K}, \mu)$ verifica las hipótesis del teorema 3.8.6

- $\mathbb{K}(R)$ es un H-espacio con la operación μ_R (ver 3.5.8).
- $\mathbb{K}(R)$ es conexo por definición.
- $\mathbb{K}(R) = \mathbb{Z}_\infty \operatorname{V}\mathrm{GL}\, R$ es fibrante: Como $\operatorname{V}\mathrm{GL}\, R$ es fibrante (ver [GJ99] lema 3.5, pag 13), $\mathbb{Z}_\infty \operatorname{V}\mathrm{GL}\, R$ es fibrante (ver [BK72] capítulo 1, 4.2)

entonces si I es una subcategoría pequeña de **Ring** existen

$$\hat{\mathbb{K}} : I \to \mathbb{S}_\star \qquad \hat{\mu} : \hat{\mathbb{K}} \times \hat{\mathbb{K}} \to \hat{\mathbb{K}} \qquad \hat{\imath} : \hat{\mathbb{K}} \to \hat{\mathbb{K}}$$

tales que

- $\hat{\mathbb{K}}$ es un modelo funtorial de $\mathrm{BGL}^+(R)$
- $\hat{\mathbb{K}}(R)$ es un H-grupo con la operación $\hat{\mu}_R$ cuya inversa es $\hat{\imath}_R$

Análogamente, para cada $p \in \mathbb{N}$ consideramos $\mathbb{K}_p : \mathbf{Ring} \to \mathbb{S}_\star$, $\mathbb{K}_p(R) = \mathbb{Z}_\infty \mathrm{VGL_p}(R)$ y $\hat{\mathbb{K}}_p \xrightarrow{\sim\!\!\!\!\rightarrow} \mathbb{K}_p$ con $\hat{\mathbb{K}}_p$ cofibrante. Para cada I subcategoría pequeña de **Ring** definimos el siguiente funtor

$$\mathbb{K}_p \times \mathbb{K}_q : I \times I \to \mathbb{S}_\star \qquad (R, S) \mapsto \mathbb{K}_p(R) \times \mathbb{K}_q(S)$$

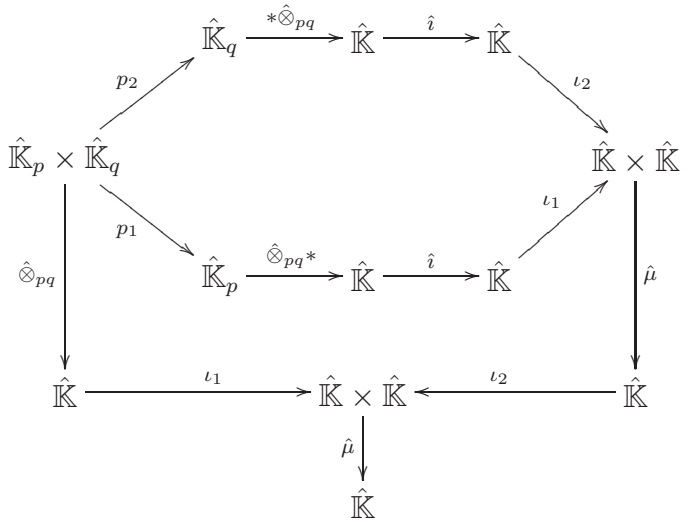
Consideramos la siguiente transformación natural,

$$\otimes_{pq} : \mathbb{K}_p \times \mathbb{K}_q \to \mathbb{K}(- \otimes -) \qquad f_{pq}^{RS} = \otimes_{pq}^{RS} : \mathbb{K}_p(R) \times \mathbb{K}_q(S) \to \mathbb{K}(R \otimes S)$$

Ésta se levanta al morfismo $\hat{\otimes}_{pq}$ ya que $\hat{\mathbb{K}}_p \times \hat{\mathbb{K}}_q$ es cofibrante, (ver [CnHW] apéndice C), tal como muestra el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{K}}_p \times \hat{\mathbb{K}}_q & \xrightarrow{\hat{\otimes}_{pq}} & \hat{\mathbb{K}}(- \otimes -) \\ \downarrow & & \downarrow\sim \\ \mathbb{K}_p \times \mathbb{K}_q & \xrightarrow[\otimes_{pq}]{} & \mathbb{K}(- \otimes -) \end{array}$$

Finalmente podemos definir $\overline{\gamma}_{p,q}$ como la composición de los morfismos del siguiente diagrama



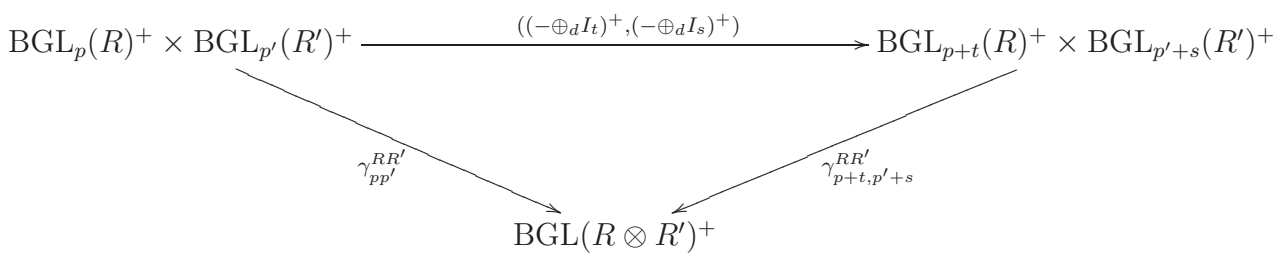
Es decir,

$$\overline{\gamma}_{pq}(x,y) = \hat{\mu}(x\hat{\otimes}_{pq}y, \hat{\mu}(\hat{\imath}(x\hat{\otimes}_{pq}*), \hat{\imath}(*\hat{\otimes}_{pq}y)))$$

Luego $|\overline{\gamma}_{p,q}|$ es una transformación natural en R y R'.

3.8.3. El producto $\star$

Proposición 3.8.8. El siguiente diagrama es conmutativo a menos de homotopía



para todo $t, s \geq 0$ es decir, $\gamma_{pp'}^{RR'}$ es compatible con la estabilización de $\mathrm{BGL}_p(R)^+ \times \mathrm{BGL}_{p'}(R')^+$.

Demostración: Sea

$$\begin{array}{rccl} \otimes: & \mathrm{GL}_p(R) \times \mathrm{GL}_{p'}(R') & \to & \mathrm{GL}_q(R \otimes R') \\ & (M,N) & \mapsto & (M \oplus_d I_t) \otimes (N \oplus_d I_s) \oplus_d (I_p \otimes N) \oplus_d (M \otimes I_{p'}) \end{array}$$

con $q = 3pp' + sp + tp' + ts$. Observemos que

$$\mathrm{BGL}_p(R)^+ \times \mathrm{BGL}_{p'}(R')^+ \xrightarrow{\otimes^+} \mathrm{BGL}_q(R \otimes R')^+ \xrightarrow{\iota_q^+} \mathrm{BGL}(R \otimes R')^+$$

envía (x,y) en $\iota_{p+t,p'+s}(f_{p+t,p'+s}^{RR'}(x,y)) \boxplus \iota_{pp'}(f_{pp'}^{RR'}(x_0,y)) \boxplus \iota_{pp'}(f_{pp'}^{AA'}(x,y_0))$

Sea

$$\begin{array}{rccl}\psi: & \mathrm{GL}_p(R)\times\mathrm{GL}_{p'}(R') & \to & \mathrm{GL}_r(R\otimes R')\\ & (M,N) & \mapsto & (M\otimes N)\oplus_d((I_p\oplus_d I_t)\otimes(N\oplus_d I_s))\oplus_d((M\oplus_d I_t)\otimes(I_{p'}\oplus_d I_s))\end{array}$$

con $r=q+ps+tp'+ts$. Observemos que

$$\mathrm{BGL}_p(R)^+\times\mathrm{BGL}_{p'}(R')^+\xrightarrow{\psi^+}\mathrm{BGL}_r(R\otimes R')^+\xrightarrow{\iota_r^+}\mathrm{BGL}(R\otimes R')^+$$

envía (x,y) en $\iota_{pp'}(f^{RR'}_{p,p'}(x,y))\boxplus\iota_{p+t,p'+s}(f^{RR'}_{p+t,p'+s}(x_0,y))\boxplus\iota_{p+t,p'+s}(f^{RR'}_{p+t,p'+s}(x,y_0))$.

Como ψ y $\otimes\oplus_d I_{ps+tp'+ts}$ son conjugados, tenemos que las aplicaciones $\iota_r^+\circ\psi^+$ y $\iota_q^+\circ\otimes^+$ son homotópicas,

$$\begin{array}{c}\iota_{p+t,p'+s}(f^{RR'}_{p+t,p'+s}(x,y))\boxplus\iota_{pp'}(f^{RR'}_{pp'}(x_0,y))\boxplus\iota_{pp'}(f^{RR'}_{pp'}(x,y_0))\\ =\\ \iota_{pp'}(f^{RR'}_{pp'}(x,y))\boxplus\iota_{p+t,p'+s}(f^{RR'}_{p+t,p'+s}(x_0,y))\boxplus\iota_{p+t,p'+s}(f^{RR'}_{p+t,p'+s}(x,y_0))\end{array}$$

luego

$$\begin{array}{c}\iota_{p+t,p'+s}(f^{RR'}_{p+t,p'+s}(x,y))\boxminus\iota_{p+t,p'+s}(f^{RR'}_{p+t,p'+s}(x_0,y))\boxminus\iota_{p+t,p'+s}(f^{RR'}_{p+t,p'+s}(x,y_0))\\ =\\ \iota_{pp'}(f^{RR'}_{pp'}(x,y))\boxminus\iota_{pp'}(f^{RR'}_{pp'}(x_0,y))\boxminus\iota_{pp'}(f^{RR'}_{pp'}(x,y_0))\end{array}$$

□

Denotemos por

$$X_p=\mathrm{BGL}_p(R)\times\mathrm{BGL}_p(R')\quad Z_p=\mathrm{BGL}_p(R)^+\times\mathrm{BGL}_p(R')^+\quad Y=\mathrm{BGL}(R\otimes R')^+\quad\gamma_p=\gamma^{RR'}_{pp}.$$

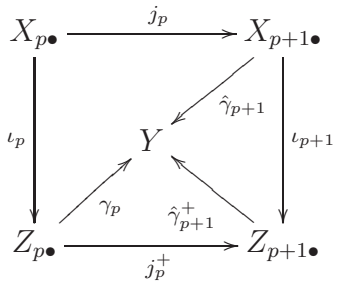
Consideremos modelos $X_{p\bullet}$, $X_{p+1\bullet}$ $Z_{p\bullet}$, $Z_{p+1\bullet}$, tales que el siguiente diagrama es conmutativo y j_p es una cofibración (por ejemplo 1.4.11)

$$\begin{array}{ccc}X_{p\bullet} & \xrightarrow{j_p} & X_{p+1\bullet}\\ \downarrow{\scriptstyle\iota_p} & & \downarrow{\scriptstyle\iota_{p+1}}\\ Z_{p\bullet} & \xrightarrow[j_p^+]{} & Z_{p+1\bullet}\end{array}$$

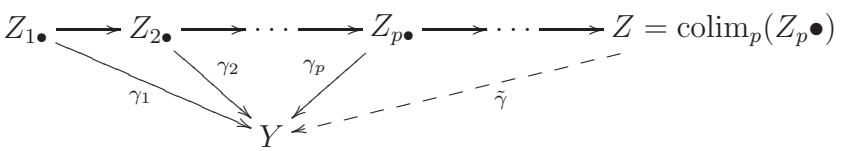
Por la proposición 3.8.8 el siguiente diagrama es conmutativo a menos de homotopía

$$\begin{array}{ccc}X_{p\bullet} & \xrightarrow{\quad j_p\quad} & X_{p+1\bullet}\\ & {\scriptstyle\gamma_p\circ\iota_p}\searrow\quad\swarrow{\scriptstyle\gamma_{p+1}\iota_{p+1}} & \\ & Y & \end{array}$$

Entonces por la proposición 2.2.12 podemos considerar $\hat{\gamma}_{p+1}$ tal que el diagrama conmute



Entonces fijando γ_1 nos podemos construir un diagrama conmutativo



Entonces podemos definir

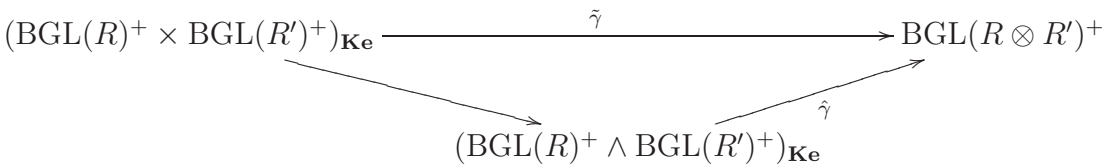
$$\tilde{\gamma} : (\mathrm{BGL}(R)^+ \times \mathrm{BGL}(R')^+)_{\mathbf{Ke}} \to \mathrm{BGL}(R \otimes R')^+.$$

Observemos que si las aplicaciones γ_t son naturales en R y R', el reemplazo realizado no afecta a la naturalidad dado que la homotopía considerada no depende de los coeficientes.

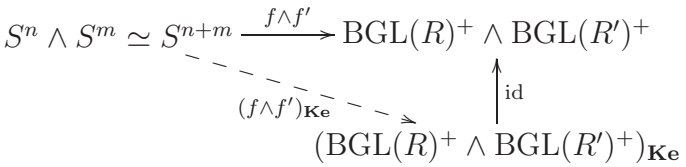
La estructura de H-grupo de $\mathrm{BGL}(R \otimes R')$ nos permite afirmar que $\tilde{\gamma}|_{(\mathrm{BGL}(R)^+ \vee \mathrm{BGL}(R')^+)_{\mathbf{Ke}}}$ es trivial. Luego existe

$$\hat{\gamma} : (\mathrm{BGL}(R)^+ \wedge \mathrm{BGL}(R')^+)_{\mathbf{Ke}} \to \mathrm{BGL}(R \otimes R')^+$$

tal que el siguiente diagrama conmuta



Definición 3.8.9 ($\star$)**.** Sean $[f] \in K_n(R)$ y $[f'] \in K_m(R')$, consideramos



Definimos

$$\star : K_n(R) \times K_m(R') \to K_{n+m}(R \otimes R') \qquad [f] \star [f'] = [\hat{\gamma} \circ (f \wedge f')_{\mathbf{Ke}}].$$

Teorema 3.8.10. La operación $\star : K_n(R) \times K_m(R') \to K_{n+m}(R \otimes R')$ es asociativa, bilineal y natural en R y R'.

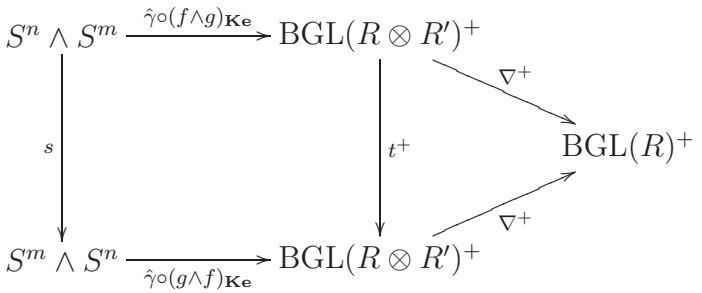
Demostración: Las propiedades de $\star$ se deducen de las propiedades de $f^{RR'}$ vistas en 3.8.2, de las propiedades de $\tilde{\gamma}$ y de las propiedades de $\wedge$. □

Proposición 3.8.11. Si consideramos $R' = R$ un anillo conmutativo, la codiagonal $\nabla : R \otimes R \to R \quad \nabla(a \otimes b) = ab$ es un morfismo de anillos y podemos considerar el siguiente producto

$$\star_R : K_n(R) \times K_m(R) \to K_{n+m}(R) \qquad [f] \star_R [g] := K_{n+m}(\nabla)([f] \star [g])$$

que le da una estructura de anillo conmutativo graduado a $K_*(R) = \bigoplus_{n \geq 1} K_n(R)$.

Demostración: Sea $t : R \otimes R \to R \otimes R$ con $t(a \otimes b) = b \otimes a$ denotemos por $t^+ : \mathrm{BGL}(R \otimes R)^+ \to \mathrm{BGL}(R \otimes R)^+$ a la aplicación inducida. Como R es conmutativo, $\nabla \circ t = \nabla$. Sea $s : S^n \wedge S^m \to S^m \wedge S^n$ el homeomorfismo que cambia factores. Como la clase de homotopía de s es $(-1)^{nm}$ y el siguiente diagrama es conmutativo



tenemos que

$$K_{n+m}(\nabla)([f] \star [g]) = (-1)^{nm} K_{n+m}(\nabla)([g] \star [f]).$$

□

3.9. El isomorfismo $K_n(R) \cong K_{n+1}(\mathbf{S}R)$ y la K-teoría negativa

Proposición 3.9.1. Sea R un anillo con unidad entonces

$$1 \to \mathrm{GL}(R) \hookrightarrow \mathrm{E}(\mathbf{C}R) \xrightarrow{\rho} \mathrm{E}(\mathbf{S}R) \to 1 \tag{3.6}$$

es una sucesión exacta.

Demostración: Por definición tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{M}R \to \mathbf{C}R \to \mathbf{S}R \to 0,$$

entonces por la proposición 3.1.3 tenemos la siguiente sucesión exacta

$$1 \to \mathrm{GL}(\mathcal{M}R) \xrightarrow{\mathrm{GL}(i)} \mathrm{GL}(\mathbf{C}R) \xrightarrow{\mathrm{GL}(\rho)} \mathrm{GL}(\mathbf{S}R).$$

Es fácil ver que $\mathrm{GL}(\mathcal{M}R)$ es isomorfo a $\mathrm{GL}(R)$ ya que

$$\mathrm{GL}(\mathcal{M}R) = \mathrm{colim}_{m,n}\, \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}_m(R)) \cong \mathrm{colim}_n\, \mathrm{GL}_n(R) = \mathrm{GL}(R).$$

Como $K_1(\mathbf{C}R) = 0$ tenemos que $\mathrm{GL}(\mathbf{C}R) = \mathrm{E}(\mathbf{C}R)$.

Las imágenes por $\mathrm{GL}(\rho)$ de los generadores de $E_n(\mathbf{C}R)$

$$\rho_n(e^n_{ij}(r)) = e^n_{ij}([r]) \qquad r \in \mathbf{C}R \qquad [r] \in \mathbf{S}R$$

nos dan los generadores de $\mathrm{E}(\mathbf{S}R)$. Luego la sucesión (3.6) es exacta. □

Al ser (3.6) una sucesión exacta, por ejemplo 2.2.8 tenemos la siguiente fibración

$$\mathrm{BGL}(R) \to \mathrm{B\,E}(\mathbf{C}R) \xrightarrow{\rho} \mathrm{B\,E}(\mathbf{S}R). \tag{3.7}$$

Proposición 3.9.2. La siguiente es una fibración homotópica

$$\mathrm{BGL}^+(R) \to \mathrm{B\,E}^+(\mathbf{C}R) \xrightarrow{\rho^+} \mathrm{B\,E}^+(\mathbf{S}R).$$

Demostración: Probaremos que la fibración (3.7) verifica las hipótesis del teorema 2.5.5 y así obtendremos que

$$\mathrm{BGL}^+(R) \to \mathrm{B\,E}^+(\mathbf{C}R) \xrightarrow{\rho^+} \mathrm{B\,E}^+(\mathbf{S}R)$$

es una fibración homotópica.

Por proposición 3.1.1 los grupos $\mathrm{E}(\mathbf{C}R)$ y $\mathrm{E}(\mathbf{S}R)$ son perfectos.

Sea $k \in \mathrm{E}(\mathbf{S}R)$, consideramos $g \in \mathrm{E}(\mathbf{C}R)$ tal que $\rho(g) = k$. El elemento k actúa en un elemento x de $H_*(\mathrm{BGL}(R); \mathbb{Z})$ mediante la conjugación por g que induce el morfismo trivial en homología, ver demostración lema 3.4.2. Entonces $\mathrm{E}(\mathbf{S}R)$ actúa trivialmente en $H_*(\mathrm{BGL}(R); \mathbb{Z})$.

El espacio $\mathrm{BGL}^+(R)$ es un H-espacio. Por otro lado ρ^+ es un morfismo de H-espacios, entonces la fibra homotópica también es un H-espacio. Luego $\mathrm{BGL}^+(R)$ y F_{ρ^+} son débilmente simples. □

Consideramos la sucesión exacta asociada a la fibración, observación 2.2.22:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\Omega\,\mathrm{B\,E}(\mathbf{C}R)^+ & \xrightarrow{\Omega\rho^+} & \Omega\,\mathrm{B\,E}(\mathbf{S}R)^+ & \xrightarrow{\eta_R} & \mathrm{BGL}(R)^+ & \xrightarrow{\iota} & \mathrm{B\,E}(\mathbf{C}R)^+ & \xrightarrow{\rho^+} & \mathrm{B\,E}(\mathbf{S}R)^+ \\
\uparrow{\scriptstyle \Omega\iota} & & & & & & & & \\
\Omega\,\mathrm{BGL}(R)^+ & \longleftarrow \cdots \longleftarrow & \Omega^n\,\mathrm{B\,E}(\mathbf{S}R)^+ & \xleftarrow{\Omega^n\rho^+} & \Omega^n\,\mathrm{B\,E}(\mathbf{C}R)^+ & & & & \\
 & & & & \uparrow{\scriptstyle \Omega^n\iota} & & & & \\
 & \cdots \longrightarrow & \Omega^{n+1}\,\mathrm{B\,E}(\mathbf{S}R)^+ & \xrightarrow[\Omega^n\eta_R]{} & \Omega^n\,\mathrm{BGL}(R)^+ & & & &
\end{array}$$

Como

$$K_1(\mathbf{C}R) = \pi_1(\mathrm{BGL}^+(\mathbf{C}R)) = \mathrm{GL}(\mathbf{C}R)/\,\mathrm{E}(\mathbf{C}R) = 0$$

entonces $\mathrm{GL}(\mathbf{C}R) = \mathrm{E}(\mathbf{C}R)$ tenemos $\mathrm{BGL}^+(\mathbf{C}R) = \mathrm{BE}^+(\mathbf{C}R)$.

Al ser $\mathrm{BGL}(\mathbf{C}R)^+$ contráctil, concluimos que los morfismos

$$\eta_{R*} : \pi_n(\Omega\,\mathrm{BE}^+(\mathbf{S}R)) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\mathrm{BGL}^+(R))$$

son isomorfismos para $n \geq 1$. Por otro lado, $\mathrm{BE}^+(\mathbf{S}R)$ es el revestimiento universal de $\mathrm{BGL}^+(\mathbf{S}R)$. Si denotamos por $(\Omega\,\mathrm{BGL}^+(\mathbf{S}R))_0$ a la componente conexa de $\Omega\,\mathrm{BGL}^+(\mathbf{S}R)$ que contiene al lazo constante en el punto marcado, entonces

$$\Omega\,\mathrm{BE}^+(\mathbf{S}R) \simeq (\Omega\,\mathrm{BGL}^+(\mathbf{S}R))_0.$$

Luego

$$\pi_n(\Omega\,\mathrm{BE}^+(\mathbf{S}R)) \cong \pi_n((\Omega\,\mathrm{BGL}^+(\mathbf{S}R))_0) = \pi_n(\Omega\,\mathrm{BGL}^+(\mathbf{S}R)) \cong \pi_{n+1}(\mathrm{BGL}^+(\mathbf{S}R)) \qquad \forall n \geq 1$$

entonces

$$K_n(R) \cong K_{n+1}(\mathbf{S}R) \qquad \forall n \geq 1.$$

Como la sucesión

$$0 \to \mathcal{M}R \to \mathbf{C}R \to \mathbf{S}R \to 0,$$

es exacta, tenemos una sucesión exacta de la siguiente forma (ver (3.3))

$$K_1(R) \to K_1(\mathbf{C}R) \to K_1(\mathbf{S}R) \xrightarrow{\partial} K_0(R) \to K_0(\mathbf{C}R) \to K_0(\mathbf{S}R)$$

como $K_1(\mathbf{C}R) = K_0(\mathbf{C}R) = 0$ resulta que

$$K_1(\mathbf{S}R) \cong K_0(R). \tag{3.8}$$

La K-teoría negativa se define de la siguiente manera:

$$K_{-n}(R) := K_0(\mathbf{S}^n R) \qquad n \geq 1$$

Por lo tanto

$$K_n(R) \cong K_{n+1}(\mathbf{S}R) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

3.10. El funtor $\mathbf{K} : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Spt}$

En esta sección expresaremos los K-grupos algebraicos mediante un sólo funtor. Más precisamente, asociaremos a cada anillo con unidad R un $\Omega-$espectro fibrante $\mathbf{K_R}$. Dicha asociación será de manera natural, permitiendo asi la definición de un funtor

$$\mathbf{K} : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Spt}$$

tal que

$$K_n(R) = \pi_n(\mathbf{K_R}) \qquad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}.$$

3.10.1. Espacio de caminos y de lazos de un conjunto simplicial

Muchas de las construcciones que se hacen para espacios topológicos se pueden hacer para conjuntos simpliciales. Algunas de estas construcciones las hemos desarrollado a lo largo de este trabajo. Otras las enumeraremos a continuación. Se pueden consultar los detalles en [GJ99] y en [BK72].

Definición 3.10.1 (grupos de homotopía simplicial)**.** Sea X un conjunto simplicial fibrante y $v \in X_0$ un vértice. Definimos $\pi_n(X, v)$ $n \geq 1$ como el conjunto de clases de homotopía simplicial, relativa a $\partial\Delta^n$, de morfismos $\alpha : \Delta^n \to X$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \uparrow & & \uparrow v \\ \partial\Delta^n & \longrightarrow & \Delta^0 \end{array}$$

Proposición 3.10.2 ([GJ99] pag 65)**.** Sean X e Y conjuntos simpliciales punteados fibrantes y $f : X \to Y$ una fibración de Kan, entonces

- $\pi_n(X, v) \cong \pi_n(|X|, v) \qquad n \geq 1$
- $|f| : |X| \to |Y|$ es una fibración de Serre.

Definición 3.10.3 (Espacios de caminos en $\mathbb{S}$)**.** Sea X un conjunto simplicial punteado y fibrante. Definimos el espacio de caminos de X como el espacio $\mathrm{P}\,X$ en el siguiente diagrma cartesiano

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{P}\,X & \xrightarrow{\mathrm{pr}} & \hom(\Delta^1, X) \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow (d^0)_* \\ \Delta^0 & \xrightarrow[*]{} & \hom(\Delta^0, X) \cong X. \end{array}$$

Se verifican las siguientes propiedades (ver [GJ99] pag. 32)

- $\mathrm{P}\,X$ es fibrante
- La siguiente aplicación es una fibración

$$\pi : \mathrm{P}\,X \xrightarrow{\mathrm{pr}} \hom(\Delta^1, X) \xrightarrow{(d^1)^*} \hom(\Delta^0, X) \cong X$$

- $\pi_i(\mathrm{P}\,X, v)$ es trivial para $i \geq 0$

Definición 3.10.4 (Espacio de lazos)**.** Sea X un conjunto simplicial punteado y fibrante. El espacio de lazos ΩX es la fibra sobre el punto base de X de la fibración $\pi : \mathrm{P}\,X \to X$.

Se verifican las siguientes propiedades (ver [GJ99])

- ΩX es fibrante

- $\pi_i(X, v) \simeq \pi_{i-1}(\Omega X, v)$
- Consideramos el conjunto simplicial cociente de Δ^1 por $\partial\Delta^1$. De esta manera obtenemos la 1-esfera simplicial y la denotamos por S^1. Se cumple que

$$\Omega X = \hom(S^1, X)$$

3.10.2. La categoría Spt

Definición 3.10.5 (Ω-espectro fibrante)**.** Un Ω-espectro fibrante $\mathbf{E}$ es una colección $\{E_n, \mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

- E_n es conjunto simplicial fibrante.
- $\mu_n : E_n \to \Omega E_{n+1}$ es una equivalencia débil.

Definición 3.10.6 (morfismos de Ω-espectros)**.** Un morfismo $\mathbf{f} : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ de Ω-espectros es una colección de morfismos simpliciales $f_n : E_n \to E'_n$ tales que

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{\mu_n} & \Omega E_{n+1} \\ {\scriptstyle f_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Omega f_{n+1}} \\ E'_n & \xrightarrow[\mu'_n]{} & \Omega E'_{n+1} \end{array}$$

Definimos **Spt** la categoría de Ω-espectros fibrantes cuyos morfismos son los recién definidos.

Definición 3.10.7 (grupos de homotopía de un espectro)**.** Sea $\mathbf{E}$ un Ω-espectro fibrante. Observemos que existe una equivalencia débil $E_n \to \Omega^k E_{n+k}$, para todo $n, k \in \mathbb{N}$. Definimos

$$\pi_n(\mathbf{E}) := \operatorname{colim}_{k\to\infty} \pi_{n+k}(|E_k|) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

3.10.3. Las aplicaciones $\eta_R : \mathrm{BGL}^+(R) \to \Omega\,\mathrm{BGL}^+(\mathbf{S}R)$

Con el objetivo de definir el espectro $\mathbf{K_R}$, probaremos la existencia de morfismos naturales en R

$$\eta_R : \mathrm{BGL}^+(R) \to \Omega\,\mathrm{BGL}^+(\mathbf{S}R)$$

tales que $\pi_n(\eta_R)$ es un isomorfismo para todo $n \geq 1$.

Sean I una subcategoría pequeña de **Ring** y $\mathbb{K} : I \to \mathbb{S}_\star$ el funtor $\mathbb{K}(R) = \mathbb{Z}_\infty \,\mathrm{V}\,\mathrm{GL}(R)$. Recordemos que la categoría $\mathrm{Fun}(I, \mathbb{S}_\star)$ es una categoría cerrada de modelos y consideramos $\hat{\mathbb{K}}$ un funtor cofibrante tal que

$$\hat{\mathbb{K}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}.$$

Condideramos los morfismos $\hat{\mathbb{K}}(\iota_R) : \hat{\mathbb{K}}(R) \to \hat{\mathbb{K}}(\mathbf{C}R)$ y $\hat{\mathbb{K}}(\rho_R) : \hat{\mathbb{K}}(\mathbf{C}R) \to \hat{\mathbb{K}}(\mathbf{S}R)$ y el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Omega\hat{\mathbb{K}}(\mathbf{S}R) & = & \Omega\hat{\mathbb{K}}(\mathbf{S}R) \\
 & & {\scriptstyle t_R}\downarrow & & \downarrow \\
 & \nearrow & F_\rho(R) & \longrightarrow & \mathrm{P}\,\hat{\mathbb{K}}(\mathbf{S}R) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
\hat{\mathbb{K}}(R) & \xrightarrow[\hat{\mathbb{K}}(\iota_R)]{} & \hat{\mathbb{K}}(\mathbf{C}R) & \xrightarrow[\hat{\mathbb{K}}(\rho_R)]{} & \hat{\mathbb{K}}(\mathbf{S}R)
\end{array} \tag{3.9}$$

Al tener $\hat{\mathbb{K}}(\rho) \circ \hat{\mathbb{K}}(\iota) = \hat{\mathbb{K}}(\rho \circ \iota) = \hat{\mathbb{K}}(e) = *$ existe la flecha cortada en el diagrama (3.9). Sea $\hat{F}$ cofibrante tal que

$$\hat{F} \xrightarrow{\sim} F_\rho$$

Como $\hat{\mathbb{K}}$ es cofibrante existe $\alpha : \hat{\mathbb{K}} \xrightarrow{\sim} \hat{F}$ tal que

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Omega\hat{\mathbb{K}}\mathbf{S} & = & \Omega\hat{\mathbb{K}}\mathbf{S} \\
 & & {\scriptstyle t}\downarrow & & \downarrow \\
\hat{F} & \xrightarrow{\sim} & F_\rho & \longrightarrow & \mathrm{P}\,\hat{\mathbb{K}}\mathbf{S} \\
{\scriptstyle \alpha}\uparrow & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\
\hat{\mathbb{K}} & \xrightarrow[\hat{\mathbb{K}}(\iota)]{} & \hat{\mathbb{K}}\mathbf{C} & \xrightarrow[\hat{\mathbb{K}}(\rho)]{} & \hat{\mathbb{K}}\mathbf{S}
\end{array}$$

Al ser $|\hat{\mathbb{K}}(\mathbf{C}R)|$ contráctil, el morfismo t es una equivalencia débil. Dicho morfismo lo podemos descomponer de la siguiente manera

$$t : \Omega\hat{\mathbb{K}}\mathbf{S} \xrightarrow[t_1]{\sim} W \xrightarrow[t_2]{\sim} \hat{F}_\rho$$

Como $\hat{F}$ y $\Omega\hat{\mathbb{K}}\mathbf{S}$ son fibrantes, existen equivalencias débiles β y γ tales que

$$\begin{array}{ccc}
 & & W \\
 & \overset{\beta}{\nearrow} & \downarrow {\scriptstyle t_2} \\
\hat{F} & \xrightarrow{\sim} & \hat{F}_\rho
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
\Omega\hat{\mathbb{K}}\mathbf{S} & = & \Omega\hat{\mathbb{K}}\mathbf{S} \\
{\scriptstyle t_1}\downarrow & \overset{\gamma}{\nearrow} & \downarrow \\
W & \longrightarrow & \star
\end{array}$$

Consideramos $\eta = \gamma \circ \beta \circ \alpha$ que al ser composición de equivalencias débiles es una equivalencia débil.

De esta manera tenemos definido un morfismo, que es una equivalencia débil, en la categoría $\mathrm{Fun}(I, \mathbb{S}_\star)$

$$\eta : \hat{\mathbb{K}} \to \Omega\hat{\mathbb{K}}\mathbf{S}.$$

Si para cara R consideramos la realización del morfismo

$$\eta_R : \hat{\mathbb{K}}(R) \to \Omega\hat{\mathbb{K}}(\mathbf{S}R)$$

obtenemos una aplicación continua

$$|\eta_R| : \mathrm{BGL}^+(R) \to \Omega\,\mathrm{BGL}^+(\mathbf{S}R)$$

tal que $\pi_n(|\eta_R|)$ es un isomorfismo para cada $n \geq 1$. Entonces $\Omega|\eta_R|$ es una equivalencia débil de homotopía entre $\Omega\,\mathrm{BGL}^+(R)$ y $\Omega^2\,\mathrm{BGL}^+(\mathbf{S}R)$.

3.10.4. El espectro $\mathbf{K_R}$

Consideramos el Ω-espectro fibrante $\mathbf{K_R} = \{E_n, \mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$E_n = \Omega(\hat{\mathbb{K}}(\mathbf{S}^{n+1}R)) \qquad \mu_n = \Omega\eta_{\mathbf{S}^{n+1}R}$$

Observemos que si $n \geq 0$ entonces

$$\mu_n = \Omega\eta_{\mathbf{S}^{n+1}R} : \Omega(\hat{\mathbb{K}}(\mathbf{S}^{n+1}R)) \to \Omega^2(\hat{\mathbb{K}}(\mathbf{S}^{n+2}R))$$

es una equivalencia débil porque

$$\pi_m(|\mu_n|) = \pi_m(|\Omega\eta_{\mathbf{S}^{n+1}R}|) \simeq \pi_m(\Omega|\eta_{\mathbf{S}^{n+1}R}|) \simeq \pi_{m+1}(|\eta_{\mathbf{S}^{n+1}R}|)$$

y este último es un isomorfismo para todo $m \geq 0$.

Veamos que efectivamente los grupos de homotopía de $\mathbf{K_R}$ son los K-grupos del anillo R

$$\pi_n(\mathbf{K_R})) = \begin{cases} \pi_0(|E_{-n}|) & n < 0 \\ \pi_n(|E_0|) & n \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \pi_0(|\Omega\hat{\mathbb{K}}(\mathbf{S}^{-n+1}R)|) & n < 0 \\ \pi_n(|\Omega(\hat{\mathbb{K}}(\mathbf{S}R))|) & n \geq 0 \end{cases} = K_n(R) \quad n \in \mathbb{Z}$$

Como la construcción anteriormente realizada fue de manera funtorial, si $f : R \to S$ es un morfismo de anillos entonces existe $\mathbf{f} : \mathbf{K_R} \to \mathbf{K_S}$ tal que

$$\pi_n(\mathbf{f}) = K_n(f) \qquad\qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Explícitamente, si $n < 0$

$$f_n = \Omega^{-n+1}(\hat{\mathbb{K}}(\mathbf{S}f))$$

y si $n \geq 0$

$$f_n = \Omega(\hat{\mathbb{K}}(\mathbf{S}^{n+1}f)).$$

Como las aplicaciones η_R fueron construidas de manera natural, el morfismo $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ resulta ser morfismo de espectros.

Finalmente tenemos definido un funtor de la categoría **Ring** a la categoría **Spt** que representa a la K-teoría algebraica,

$$\mathbf{K} : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Spt}.$$

Apéndice A

Preliminares

A.1. Lema de Urysohn

Lema A.1 (Lema de Urysohn)**.** Si K_0 y K_1 son conjuntos cerrados disjuntos en un espacio de Hausdorff normal X (i.e. todo par de conjuntos cerrados disjuntos contiene un par de entornos abiertos disjuntos que los separa), entonces existe una función continua en X que es 0 en K_0 y 1 en K_1.

A.2. G-espacios topológicos

Sea G un grupo. Un G-conjunto X es un conjunto donde G actúa. La acción es libre cuando $G_x = \{g \in G : g.x = x\} = \{e\}$ para todo $x \in X$. La órbita de un $x \in X$ es $O(x) = \{s.x : s \in G\}$.

Definición B.1 (G-espacio)**.** Decimos que un espacio topológico es un G-espacio si X es un G-conjunto y la aplicación

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \to & X \\ (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

es continua considerando en G la topología discreta

Definición B.2 (acción propiamente discontinua)**.** Decimos que la acción de G en X es propiamente discontinua si

1. Para todo $x \in X$ existe un entorno U_x tal que si $g \cdot U_x \cap U_x \neq \emptyset$ entonces $g = e$.
2. Si $x, y \in X$ donde $y \notin O(x)$ existen entornos V_x y V_y de x e y respectivamente tal que $g \cdot V_x \cap V_y = \emptyset$ para todo $g \in G$.

Definición B.3 (X/G)**.** Sea X un G-espacio y consideramos la siguiente relación de equivalencia

$$x \sim x' \Leftrightarrow \text{ existe } g \in G \text{ tal que } x = g \cdot x'$$

Definimos $X/G = X/\sim$.

Observación B.4. Si la acción es propiamente discontinua entonces

- El espacio X/G es de Hausdorff.
- La aplicación $q : X \to X/G$ es un revestimiento.
- Si X es arco-conexo entonces G es el grupo de las transformaciones de revestimiento asociado a q.

Demostración: Por la parte 2 de la defínción B.2 es inmediato que X/G es de Hausdorff.

Veamos que (X, q) es un cubrimiento de X/G. Para cada $z \in X/G$ elegimos $x \in X$ tal que $q(x) = z$ y U_x como en la definición B.2 parte 1. Sea $W_z = q(U_x)$, entonces

$$q^{-1}(W_z) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U_x$$

Por construcción de los U_x la unión anterior es disjunta, además W_z es abierto y $z \in W_z$. Como $U_x \cap g \cdot U_x = \emptyset$ para todo $g \in G \backslash \{e\}$, $q|_{U_x}$ es un homeomorfismo de U_x en W_z. Falta ver que para todo $g \in G$, $g \cdot U_x$ es homeomorfo a W_z. El isomorfismo esta dado de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{z,g} : & W_z & \to & g \cdot U_x \\ & y & \mapsto & g \cdot (q|_{U_x})^{-1}(y) \end{array}$$

que es claramente continua y su inversa también es continua y es

$$\begin{array}{rccc} (\varphi_{z,g})^{-1} : & g \cdot U_x & \to & W_z \\ & g \cdot y & \mapsto & q(y) \end{array}$$

Probemos la tercera afirmación. Los elementos de G son transformaciones del cubrimiento q porque $q(g \cdot x) = q(x)$ para todo $x \in X$. Por otro lado si p es una transformación de cubrimiento asociada a q, es decir tal que $q \circ p = q$, y $x \in X$ tenemos que $q(p(x)) = q(x)$ y por lo tanto $p(x)$ y x están en la misma órbita. Luego, exisite $g \in G$ tal que $g \cdot x = p(x)$, entonces $g = p$ porque X es arcoconexo y las transformaciones de cubrimiento de un espacio de cubrimiento arco-conexo está unicamente determinada por la imagen de un punto. □

A.3. Grupos de homología

Definición C.1. Un par de espacios topológicos (X, A) es un buen par si A es un subespacio topológico no vacío y cerrado de X, tal que A es un retracto por deformación de un entorno de X.

Ejemplo C.2. Un par de CW-complejos es un buen par.

Proposición C.3. Si (X, A) es un buen par, entonces el cociente $q : (X, A) \to (X/A, X/A)$ induce isomorfismos en homología

$$q_* : H_n(X, A) \to H_n(X/A, A/A) \simeq \tilde{H}_n(X/A)$$

A.4. Grupos de homotopía

Definición D.1 ($\pi_n(X, x_0)$)**.** Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$ y sea

$$\mathcal{C}_n(X, x_0) = \{f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0) : \ f \text{ es continua}\}$$

la notación $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ significa que $f : I^n \to X$ tal que $f(\partial I^n) = x_0$. Definimos en $\mathcal{C}_n(X, x_0)$ una relación de equivalencia donde $f \sim g$ si y solo si f y g son homotópicas y existe una homotopía tal que $f_t(\partial I^n) = x_0$ para todo $t \in [0, 1]$. Definimos

$$\pi_n(X, x_0) := \mathcal{C}_n(X, x_0)/\sim$$

Observación D.2. Si $n = 0$, I^0 es un punto y ∂I^0 es vacío entonces $\pi_0(X, x_0)$ es el conjunto de las componentes arco-conexas de X.

Para $n \geq 2$ definimos en $\pi_n(X, x_0)$ la siguiente suma

$$(f + g)(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \ldots, s_n) & s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_n) & s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Es fácil ver que $+$ esta bien definida en $\pi_n(X, x_0)$. Observar que la suma afecta solo a la primera coordenada entonces con argumentos similares a la prueba de que $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo, se prueba que $\pi_n(X, x_0)$ es un grupo con la función constante en x_0 como neutro y $(-f)(s_1, s_2, \ldots, s_n) = f(1 - s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

Observación D.3. Si $n \geq 2$ entonces $(\pi_n(X, x_0), +)$ es abeliano.

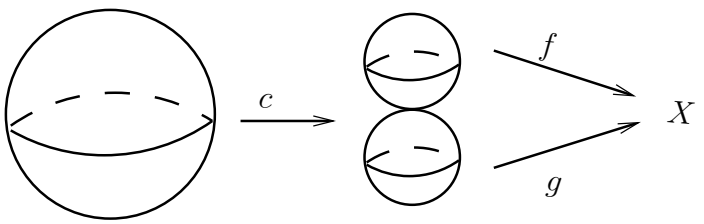
Observación D.4. Las aplicaciones $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ se pueden ver como aplicaciones $g : I^n/\partial I^n = S^n \to X$ llevando el punto base $s_0 = \partial I^n/\partial I^n$ a x_0. Esto quiere decir que podemos ver a $\pi_n(X, x_0)$ como las clases de homotopía de las funciones continuas de la forma

$$(S^n, s_0) \mapsto (X, x_0)$$

donde las homotopías son aplicaciones de la misma forma. Con esta interpretación de $\pi_n(X, x_0)$ la suma $f + g$ es la composición

$$S^n \xrightarrow{c} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X$$

donde c colapsa el equador S^{n-1} en S^n a un punto y elejimos el punto base s_0 en S^{n-1}.



Proposición D.5. Si X es arco-conexo entonces $\pi_n(X, x_0) \simeq \pi_n(X, x_1)$ para todo $x_0, x_1 \in X$

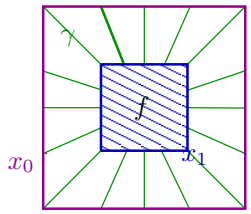
Demostración: Dado un camino $\gamma : I \to X$ de $x_0 = \gamma(0)$ a $x_1 = \gamma(1)$ podemos asociarle a una aplicación

$$f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$$

otra aplicación

$$\gamma f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$$

de la siguiente manera: consideramos un cubo concéntrico al cubo I^n y segmentos radiales entre los cubos, luego definimos γf como f en el cubo más chico y γ sobre cada segmento.



Si consideramos γ o f homotópicos que fijan ∂I o ∂I^n nos da γf homotópicos. Las siguientes propiedades se cumplen:

1. $\gamma(f + g) \simeq \gamma f + \gamma g$
2. $(\gamma\eta)f \simeq \gamma(\eta f)$
3. $1f \simeq f$

Sea $\beta_\gamma : \pi_n(X, x_1) \to \pi_n(X, x_0)$ donde $\beta_\gamma([f]) = [\gamma f]$, el cual es un isomorfismo. Entonces si X es arco-conexo

$$\pi_n(X, x_0) \simeq \pi_n(X, x_1)$$

para todo $x_0, x_1 \in X$. En dicho caso notamos $\pi_n(X)$. □

Definición D.6 (acción de $\pi_1(X, x_0)$ sobre $\pi_n(X, x_0)$)**.** Si γ es un lazo con punto base x_0, el morfismo

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \to & Aut(\pi_n(X, x_0)) \\ [\gamma] & \mapsto & \beta_\gamma \end{array}$$

es un homomorfismo ya que $\beta_{\gamma\eta} = \beta_\gamma \beta_\eta$. De esta manera tenemos definida una acción de $\pi_1(X, x_0)$ sobre $\pi_n(X, x_0)$.

Proposición D.7. Un revestimiento $p : (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \to (X, x_0)$ induce un isomorfismo para todo $n \geq 2$

$$p_* : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \to \pi_n(X, x_0)$$

□

Observación D.8. La proposición D.7 nos permite afirmar que $\pi_n(X, x_0) = 0 \ \forall n \geq 2$ para todo X que tiene revestimiento universal contráctil (por ejemplo S^1). Los toros n-dimensionales T^n son producto de n-círculos, tienen revestimiento universal $\mathbb{R}^n$ entonces $\pi_i(T^n) = 0 \ \forall i > 1$. Observar que $H_i(T^n; \mathbb{Z})$ no son cero para $i \leq n$.

Definición D.9 (grupo de homotopía relativa)**.** Consideremos un par (X, A) y $x_0 \in A$. Sea I^{n-1} la cara de I^n con la última coordenada nula y sea J^{n-1} la clausura de $\partial I^n \setminus I^{n-1}$, es decir, la unión de las caras restantes de I^n. Definimos $\pi_n(X, A, x_0)$ para $n \geq 1$ como el conjunto de las clases de homotopía de aplicaciones de la forma

$$(I^n, \partial I^n, x_0) \mapsto (X, A, x_0)$$

donde las homotopías son de la misma forma. No hay ninguna forma satisfactoria de definir $\pi_0(X, A, x_0)$.

Observación D.10.

1. $\pi_n(X, x_0, x_0) = \pi_n(X, x_0)$
2. Definimos en $\pi_n(X, A, x_0)$ la suma con las mismas fórmulas que para $\pi_n(X, x_0)$.
3. $\pi_n(X, A, x_0)$ es un grupo para $n \geq 2$.
4. $\pi_n(X, A, x_0)$ es abeliano para $n \geq 3$.
5. Para $n = 1$, $\pi_1(X, A, x_0)$ es el conjunto de clases de homotopía de caminos que empiezan en un punto de A y terminan en x_0. No hay una forma natural de darle estructura de grupo.
6. $\pi_n(X, A, x_0)$ se puede ver como el conjunto de clases de homotopía

   $$(D^n, S^{n-1}, s_0) \mapsto (X, A, x_0)$$

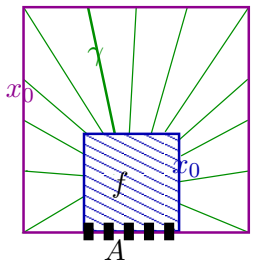
   si colapsamos J^{n-1} a un punto convertimos $(I^n, \partial I^n, x_0)$ en (D^n, S^{n-1}, s_0).

Observación D.11. Una función continua $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ representa a la clase cero en $\pi_n(X, A, x_0)$ si y solo si es homotópica relativa a S^{n-1} a una aplicación cuya imagen está contenida en A.

Definición D.12 (acción)**.** Podemos definir en $\pi_n(X, A, x_0)$ una acción de $\pi_1(A, x_0)$.

$$\begin{array}{lcl} \pi_1(A, x_0) \times \pi_n(X, A, x_0) & \to & \pi_n(X, A, x_0) \\ ([\gamma], [f]) & \mapsto & \beta_\gamma([f]) = [\gamma f] \end{array}$$

donde γf esta definido de la siguiente manera



Proposición D.13. Sean (X, A) un par, $x_0 \in A$, $\imath : (A, x_0) \to (X, x_0)$ y $\jmath : (X, x_0, x_0) \to (X, A, x_0)$ las inclusiones y ∂ el morfismo que viene de restingir los morfismos de la forma

$$(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$$

a I^{n-1}. Entonces la siguiente sucesión es exacta

$$\ldots \to \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{\imath_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\jmath_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \to \ldots \to \pi_0(X, x_0)$$

□

Definición D.14 (n-conexión)**.**

- Un espacio X con punto base x_0 es n-conexo si $\pi_i(X, x_0) = 0$ para todo $i \leq n$. En otras palabras 0-conexo significa arco-conexo y 1-conexo significa simplemente conexo. Como n-conexo implica 0-conexo, la definición no depende del punto base elegido.
- El par (X, A) es llamado 0-conexo si cada componente arco-conexa de X contiene puntos en A, y es n-conexo, para $n > 0$, si es 0-conexo y $\pi_i(X, A, x_0) = 0$ para todo $0 < i \leq n$.

Proposición D.15. Son equivalentes las siguientes afirmaciones

1. Toda aplicación $f : S^i \to X$ es homotópica a una constante.
2. Toda aplicación $f : S^i \to X$ se extiende a una aplicación $F : D^{i+1} \to X$.
3. $\pi_i(X, x_0) = 0$ para todo $x_0 \in X$.

Observación D.16. Si $f : S^i \to X$ es homotópica a una constante entonces $f : S^i \to X$ se extiende a una aplicación $F : D^{i+1} \to X$.

Definición D.17 (función continua celular)**.** Una función continua $f : X \to Y$ entre CW-complejos es celular si $f(X_n) \subseteq Y_n$.

Teorema D.18 ([Hat02] pag. 349.)**.** Toda aplicación $f : X \to Y$ de CW-complejos es homotópica a una celular.

Teorema D.19 (Teorema de Whitehead)**.** Una aplicación $f : X \to Y$ entre CW-complejos conexos X e Y es una equivalencia homotópica si y solo si f induce un isomorfismo a nivel de grupos de homotopía

$$f_* : \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\simeq} \pi_n(Y, f(x_0))$$

En particular, un CW-complejo es contráctil si y solo si es conexo y $\pi_n(X) = 0$ para todo n.

Teorema D.20 (Teorema de Hurewicz)**.** Sea (X, A) un par de espacios con punto base $x_0 \in A$. Recordemos que $H_n(D^n, S^{n-1}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ y $H_n(S^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ y denotemos por $[D^n, S^{n-1}]$ y $[S^n]$ a los generadores usuales de $H_n(D^n, S^{n-1}; \mathbb{Z})$ y $H_n(S^n; \mathbb{Z})$. Entonces el siguiente morfismo, al cual llamamos morfismo de Hurewicz, es una transformación natural:

$$\begin{array}{rcl} \pi_\bullet(X, A) & \to & H_\bullet(X, A; \mathbb{Z}) \\ \pi_\bullet(X) & \to & H_\bullet(X; \mathbb{Z}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \pi_n(X, A) & \to & H_n(X, A; \mathbb{Z}) \\ [f : (D^n, S^{n-1}) \to (X, A)] & \mapsto & f_*([D^n, S^{n-1}]) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \pi_n(X) & \to & H_n(X; \mathbb{Z}) \\ [f : S^n \to X] & \mapsto & f_*([S^n]) \end{array}$$

Si X es n-conexo entonces $\tilde{H}_j(X; \mathbb{Z}) = 0$ para todo $j \leq n$ y el morfismo de Hurewicz induce un isomorfismo

$$\begin{array}{ll} [\pi_1(X, x_0)]_{ab} \simeq H_1(X; \mathbb{Z}) & \text{si } n = 0 \\ \pi_{n+1}(X, x_0) \simeq H_{n+1}(X; \mathbb{Z}) & \text{si } n > 0 \end{array}$$

Reciprocamente si X es 1-conexo y $\tilde{H}_j(X; \mathbb{Z}) = 0$ para todo $j \leq n$ con $n > 1$ entonces X es n-conexo.

Similarmente si X y A son arco-conexos y (X, A) es n-conexo siendo $n \geq 1$ entonces $\tilde{H}_j(X, A; \mathbb{Z}) = 0$ para todo $j \leq n$ y el morfismo de Hurewicz induce un isomorfismo

$$H_0(\pi_1(A, x_0), \pi_{n+1}(X, A)) \simeq H_{n+1}(X, A; \mathbb{Z})$$

□

Teorema D.21. [[Hat02] pag. 367] Un morfismo $f : X \to Y$ entre CW-complejos simplemente conexos es una equivalencia homotópica si

$$f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$$

es un isomorfismo para todo $n \geq 0$.

Proposición D.22 ([Hat02] pag. 351)**.** Un par de CW-complejos (X, A) es n-conexo si todas las células de $X - A$ tienen dimensión más grandes que n. En particular el par (X, X_n) es n-conexo entonces la inclusión $X_n \hookrightarrow X$ induce isomorfismos en π_i para $i < n$ y un morfismo sobreyectivo en π_n.

□

Bibliografía

[Bas68] H. Bass. *Algebraic K-theory.* Mathematics Lecture Note Series. New York-Amsterdam: W.A. Benjamin, Inc. XV, 762 p. , 1968.

[Ber82a] A.J. Berrick. *An approach to algebraic K-theory.* Research Notes in Mathematics, 56. Boston - London - Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. III, 1982.

[Ber82b] A.J. Berrick. The plus-construction and fibrations. *Q. J. Math., Oxf. II. Ser.*, 33:149–157, 1982.

[Ber99] A.J. Berrick. The plus-construction as a localization. Bass, H. (ed.) et al., Algebraic K-theory and its applications. Proceedings of the workshop and symposium, ICTP, Trieste, Italy, September 1-19, 1997. Singapore: World Scientific. 313-336 (1999)., 1999.

[BK72] A.K. Bousfield and D.M. Kan. *Homotopy limits, completions and localizations.* Lecture Notes in Mathematics. 304. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. V,348, 1972.

[Bro63] W. Browder. Higher torsion in H-spaces. *Trans. Am. Math. Soc.*, 108:353–375, 1963.

[Cn07] G Cortiñas. Basic Algebraic and Topological K-Theory. Notas de la escuela "Sedano Winter School on K-theory", 2007.

[CnHW] G. Cortiñas, C. Haesemeyer, and C Weibel. Infinitesimal cohomology and the chern character to negative cyclic homology. arXiv:math.KT/0703133v1.

[CnT] G. Cortiñas and A. Thom. Bivariant algebraic k-theory. arXiv:math.KT/0603531v5.

[Dol63] Albrecht Dold. Partitions of Unity in the Theory of Fibrations. *The Annals of Mathematics*, 78(2):223–255, Sep 1963.

[FP90] Rudolf Fritsch and Renzo A. Piccinini. *Cellular structures in topology.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 19. Cambridge etc.: Cambridge University Press. xi, 326 p. , 1990.

[Ful95] William Fulton. *Algebraic topology. A first course.* Graduate Texts in Mathematics. 153. New York, NY: Springer. xviii, 430 p. DM 48.00; S 350.40; sFr 48.00 , 1995.

[Ger73] S.M. Gersten. Higher K-theory of rings. Algebr. K-Theory I, Proc. Conf. Battelle Inst. 1972, Lect. Notes Math. 341, 3-42 (1973)., 1973.

[GJ99] Paul G. Goerss and John F. Jardine. *Simplicial homotopy theory.* Progress in Mathematics (Boston, Mass.), 1999.

[Gro71] A. Grothendieck. Classes de faisceaux et théorème de Riemann-Roch. (Sheaf classes and the Riemann-Roch theorem). Sem. Geom. algebrique Bois Marie 1966/67, SGA 6, Lect. Notes Math. 225, 20-77 (1971)., 1971.

[GZ67] P. Gabriel and M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band 35.* Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, X, 168 p. , 1967.

[Hat] Allen Hatcher. Spectral Sequences in Algebraic Topology. Capítulo 1.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* http://www.math.cornell.edu/ hatcher, 2002.

[KV71] Max Karoubi and Orlando Villamayor. K-théorie algébrique et K-théorie topologique. I. (Algebraic K-theory and topological K-theory. I). *Math. Scand.*, 28:265–307, 1971.

[Lod76] Jean-Louis Loday. K-théorie algébrique et représentations de groupes. *Annales Scientifiques de L'.N.S.*, 9(3):309–377, 1976.

[Lod92] Jean-Louis Loday. *Cyclic homology.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. 301. Berlin: Springer- Verlag. xvii, 454 p. , 1992.

[May92] J.Peter May. *Simplicial objects in algebraic topology.* Chicago Lectures in Mathematics. Chicago: The University of Chicago Press. viii, 161 p. , 1992.

[Mil56] John W. Milnor. Construction of universal bundles, II. *The Annals of Mathematics*, 63(3):430–436, May 1956.

[Mil57] John W. Milnor. The geometric realization of a semi-simplicial complex. *The Annals of Mathematics*, 65(2):357–362, Mar 1957.

[Mil61] John W. Milnor. Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct. *The Annals of Mathematics*, 74(2):575–590, 1961.

[Mil71] John W. Milnor. *Introduction to algebraic K-theory.* Annals of Mathematics Studies. No.72. Princeton, N. J.: Princeton University Press and University of Tokyo Press. XIII, 184 p. $ 6.25 , 1971.

[ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician. 2nd ed.* Graduate Texts in Mathematics. 5. New York, NY: Springer, 1998.

[Qui67] D.G. Quillen. *Homotopical algebra.* Lecture Notes in Mathematics. 43. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. VI, 157 p. , 1967.

[Qui72] Daniel Quillen. On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field. *The Annals of Mathematics*, 96:552–586, 1972.

[Qui73] Daniel Quillen. Higher algebraic K-theory. I. Algebr. K-Theory I, Proc. Conf. Battelle Inst. 1972, Lect. Notes Math. 341, 85-147 (1973)., 1973.

[Ros94] Jonathan Rosenberg. *Algebraic K-theory and its applications.* Graduate Texts in Mathematics. 147. New York, NY: Springer-Verlag, 1994.

[Spa66] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology.* Mc Graw-Hill, Inc., 1966.

[Sta70] James Stasheff. *H-spaces from a homotopy point of view.* Lecture Notes in Mathematics. 161. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. VI, 95 p. , 1970.

[Swa71] A. Swan. Excision in algebraic K-theory. *J. Pure Appl. Algebra*, 1:221–252, 1971.

[Swi02] Robert M. Switzer. *Algebraic topology – homology and homotopy. Reprint of the 1975 edition.* Classics in Mathematics. Berlin: Springer. xii, 526, 2002.

[Wag72] J.B. Wagoner. Delooping classifying spaces in algebraic K-theory. *Topology*, 11:349–370, 1972.

[Weia] Charles Weibel. The development of Algebraic K-theory before 1980. http://www.math.rutgers.edu/ weibel.

[Weib] Charles Weibel. The K-book: An introduction to algebraic K-theory. http://www.math.rutgers.edu/ weibel/Kbook.html.

[Whi78] George W. Whitehead. *Elements of homotopy theory.* Graduate Texts in Mathematics. 61. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. XXI, 1978.