Hacia una clasificación graduada de álgebras de Leavitt

Guido Arnone

IMAS UBA-CONICET

20 de septiembre de 2023

Álgebras de Leavitt

Sea ℓ un anillo conmutativo con una involución $*\colon \ell \to \ell$.

(Ej.: $\ell = \mathbb{C}$, $(a + ib)^* = a - ib$).

Álgebras de Leavitt

Sea ℓ un anillo conmutativo con una involución $*\colon \ell \to \ell$.

(Ej.: $\ell = \mathbb{C}$, $(a+ib)^* = a - ib$).

Un grafo E es un par de funciones $s, r\colon E^1 \to E^0$. Asumimos $\#E^0, \#E^1 < \infty$.

$$\begin{tikzcd} \bullet_{s(e)} \arrow[r, bend left, "e"] & \bullet_{r(e)} \end{tikzcd}$$

Álgebras de Leavitt

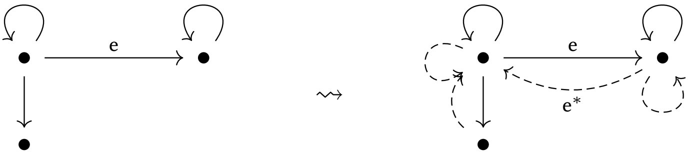
Sea ℓ un anillo conmutativo con una involución $*\colon \ell \to \ell$.

(Ej.: $\ell = \mathbb{C}$, $(a + ib)^* = a - ib$).

Un grafo E es un par de funciones $s, r\colon E^1 \to E^0$. Asumimos $\#E^0, \#E^1 < \infty$.

$$\bullet_{s(e)} \xrightarrow{e} \bullet_{r(e)}$$

La ℓ-álgebra de Leavitt $L(E)$ de E es un cociente del álgebra de caminos del grafo doble de E.



Álgebras de Leavitt

Un álgebra de Leavitt $L(E)$ es:

Álgebras de Leavitt

Un álgebra de Leavitt $L(E)$ es:

- $\mathbb{Z}$-graduada via $|v| = 0$, $|e| = 1$, $|e^*| = -1$;

Álgebras de Leavitt

Un álgebra de Leavitt $L(E)$ es:

- $\mathbb{Z}$-graduada via $|v| = 0$, $|e| = 1$, $|e^*| = -1$;
- una $*$-álgebra, extendiendo $*$ a $v^* = v$, $(e)^* = e^*$;

Álgebras de Leavitt

Un álgebra de Leavitt $L(E)$ es:

- $\mathbb{Z}$-graduada via $|v| = 0$, $|e| = 1$, $|e^*| = -1$;
- una $*$-álgebra, extendiendo $*$ a $v^* = v$, $(e)^* = e^*$;
- casi siempre no-conmutativa;

Álgebras de Leavitt

Un álgebra de Leavitt $L(E)$ es:

- $\mathbb{Z}$-graduada via $|v| = 0$, $|e| = 1$, $|e^*| = -1$;
- una $*$-álgebra, extendiendo $*$ a $v^* = v$, $(e)^* = e^*$;
- casi siempre no-conmutativa;
- infinito dimensional si el grafo tiene ciclos y matricial si no.

Álgebras de Leavitt

Un álgebra de Leavitt $L(E)$ es:

- $\mathbb{Z}$-graduada via $|v| = 0$, $|e| = 1$, $|e^*| = -1$;
- una $*$-álgebra, extendiendo $*$ a $v^* = v$, $(e)^* = e^*$;
- casi siempre no-conmutativa;
- infinito dimensional si el grafo tiene ciclos y matricial si no.

Ejemplos:

- $M_n(\ell)$
- $M_n(\ell[t, t^{-1}])$
- $\ell\{x, x^* : x^*x = 1\}$
- $L_2 = \frac{\ell\{x_1, x_2, x_1^*, x_2^*\}}{\langle x_i^* x_i - 1,\ x_1^* x_2,\ x_2^* x_1,\ x_1 x_1^* + x_2 x_2^* - 1\rangle}$.

Grafos primitivos

La matriz de adyacencia $A_E \in \mathbb{N}_0^{E^0 \times E^0}$ de un grafo E se define como

$$(A_E)_{v,w} = \#\left\{ \bullet_v \xrightarrow{e} \bullet_w \right\}.$$

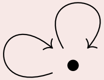
Grafos primitivos

La matriz de adyacencia $A_E \in \mathbb{N}_0^{E^0 \times E^0}$ de un grafo E se define como

$$(A_E)_{v,w} = \#\left\{ \bullet_v \xrightarrow{e} \bullet_w \right\}.$$

Vamos a suponer que todos los grafos son primitivos, es decir, que hay un $N > 1$ para el cual A_E^N tiene todas sus entradas positivas.

Ejemplo



$\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$

No ejemplo

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Módulos de Bowen-Franks

El módulo de Bowen-Franks de E es

$$\mathfrak{BF}^{\mathsf{gr}}(\mathsf{E}) = \frac{\mathbb{Z}[\sigma]^{\mathsf{E}^0}}{\langle \mathsf{v} = \sigma \sum_{\mathsf{e}\colon \mathsf{v}\to\mathsf{w}} \mathsf{w} : \mathsf{v} \in \mathsf{E}^0 \rangle}.$$

Módulos de Bowen-Franks

El módulo de Bowen-Franks de E es

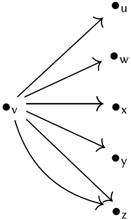
$$\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(E) = \frac{\mathbb{Z}[\sigma]^{E^0}}{\left\langle v = \sigma \sum_{e:\, v \to w} w : v \in E^0 \right\rangle}.$$

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet_u \\
 & \bullet_w \\
\bullet_v \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] \arrow[ddr, bend right] & \bullet_x \\
 & \bullet_y \\
 & \bullet_z
\end{tikzcd}
\qquad \rightsquigarrow \qquad \sigma^{-1} v = u + w + x + y + 2z.$$

Módulos de Bowen-Franks

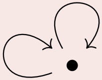
El módulo de Bowen-Franks de E es

$$\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(E) = \frac{\mathbb{Z}[\sigma]^{E^0}}{\langle v = \sigma \sum_{e:\ v \to w} w : v \in E^0 \rangle}.$$

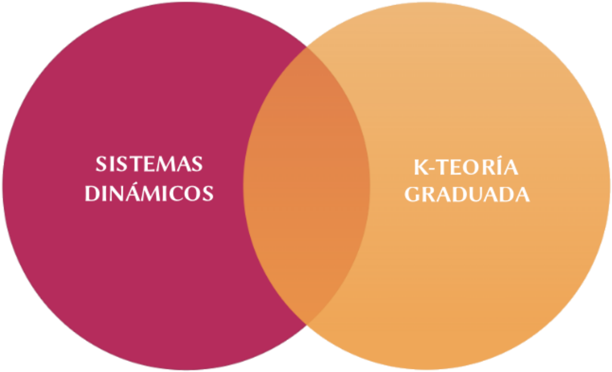


$$\rightsquigarrow \qquad \sigma^{-1} v = u + w + x + y + 2z.$$

Ejemplo

Si $E =$  entonces $\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(E) = \mathbb{Z}[\sigma]/(1 - 2\sigma) \simeq \mathbb{Z}[1/2]$.

Módulos de Bowen-Franks



El módulo de Bowen-Franks de un grafo E coincide con el 0-ésimo grupo de K-teoría graduada de L(E), así como con el grupo dimensional de Krieger del shift de tipo finito asociado a E.

Las conjeturas de Hazrat

Conjetura de clasificación (Hazrat, '13)

Si $\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(\mathsf{E}) \simeq \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(\mathsf{F})$ entonces $\mathsf{L}(\mathsf{E}) \simeq \mathsf{L}(\mathsf{F})$.

Las conjeturas de Hazrat

Conjetura de clasificación (Hazrat, ’13)

Si $\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(\mathsf{E}) \simeq \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(\mathsf{F})$ entonces $\mathsf{L}(\mathsf{E}) \simeq \mathsf{L}(\mathsf{F})$.

Conjetura fuerte de clasificación (Hazrat, ’13)

i) Todo morfismo $\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(\mathsf{E}) \to \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(\mathsf{F})$ se puede levantar a un morfismo $\mathsf{L}(\mathsf{E}) \to \mathsf{L}(\mathsf{F})$ de álgebras graduadas.

ii) Dos levantados difieren únicamente en un automorfismo interior.

Las conjeturas de Hazrat

Conjetura de clasificación (Hazrat, '13)

Si $\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(\mathsf{E}) \simeq \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(\mathsf{F})$ entonces $\mathsf{L}(\mathsf{E}) \simeq \mathsf{L}(\mathsf{F})$.

Conjetura fuerte de clasificación (Hazrat, '13)

i) Todo morfismo $\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(\mathsf{E}) \to \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(\mathsf{F})$ se puede levantar a un morfismo $\mathsf{L}(\mathsf{E}) \to \mathsf{L}(\mathsf{F})$ de álgebras graduadas.

ii) Dos levantados difieren únicamente en un automorfismo interior.

Resultados parciales:

- La parte ii) de la conjetura fuerte es falsa (Ara, Pardo, '14).

Las conjeturas de Hazrat

Conjetura de clasificación (Hazrat, ’13)

Si $\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(\mathsf{E}) \simeq \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(\mathsf{F})$ entonces $\mathsf{L}(\mathsf{E}) \simeq \mathsf{L}(\mathsf{F})$.

Conjetura fuerte de clasificación (Hazrat, ’13)

i) Todo morfismo $\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(\mathsf{E}) \to \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(\mathsf{F})$ se puede levantar a un morfismo $\mathsf{L}(\mathsf{E}) \to \mathsf{L}(\mathsf{F})$ de álgebras graduadas.

ii) Dos levantados difieren únicamente en un automorfismo interior.

Resultados parciales:

- La parte ii) de la conjetura fuerte es falsa (Ara, Pardo, ’14).
- La parte i) de la conjetura fuerte es cierta. (A. ’22, Vaš ’22).

Las conjeturas de Hazrat

Conjetura de clasificación (Hazrat, ’13)

Si $\mathfrak{BF}^{gr}(E) \simeq \mathfrak{BF}^{gr}(F)$ entonces $L(E) \simeq L(F)$.

Conjetura fuerte de clasificación (Hazrat, ’13)

i) Todo morfismo $\mathfrak{BF}^{gr}(E) \to \mathfrak{BF}^{gr}(F)$ se puede levantar a un morfismo $L(E) \to L(F)$ de álgebras graduadas.

ii) Dos levantados difieren únicamente en un automorfismo interior.

Resultados parciales:

- La parte ii) de la conjetura fuerte es falsa (Ara, Pardo, ’14).
- La parte i) de la conjetura fuerte es cierta. (A. ’22, Vaš ’22).
- La conjetura de clasificación se sabe para grafos acíclicos y policefálicos.

K-teoría bivariante graduada

$$\begin{tikzcd} \hom_{\mathrm{gr-Alg}}(L(E), L(F)) \arrow[r, "j"'] \arrow[rr, bend left, "\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(-)"] & kk^{\mathrm{gr}}(L(E), L(F)) \arrow[r, dashed, "\mathrm{ev}"'] & \hom_{\mathbb{Z}[\sigma]}(\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(E), \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(F)) \end{tikzcd}$$

Para entender la asignación $L(E) \mapsto \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(E)$, una estrategia es pasar por una categoría intermedia de K-teoría bivariante graduada (Ellis, ’14).

K-teoría bivariante graduada

$$\begin{tikzcd} \mathsf{hom}_{\mathrm{gr-Alg}}(\mathsf{L}(\mathsf{E}), \mathsf{L}(\mathsf{F})) \arrow[r, "\mathsf{j}"'] \arrow[rr, bend left, "\mathfrak{BF}^{\mathsf{gr}}(-)"] & \mathsf{kk}^{\mathsf{gr}}(\mathsf{L}(\mathsf{E}), \mathsf{L}(\mathsf{F})) \arrow[r, dashed, "\mathsf{ev}"'] & \mathsf{hom}_{\mathbb{Z}[\sigma]}(\mathfrak{BF}^{\mathsf{gr}}(\mathsf{E}), \mathfrak{BF}^{\mathsf{gr}}(\mathsf{F})) \end{tikzcd}$$

Para entender la asignación $\mathsf{L}(\mathsf{E}) \mapsto \mathfrak{BF}^{\mathsf{gr}}(\mathsf{E})$, una estrategia es pasar por una categoría intermedia de K-teoría bivariante graduada (Ellis, '14).

Este tipo de ideas fueron llevadas a cabo exitosamente en contextos relacionados (Cortiñas-Montero '20, Cortiñas '22).

K-teoría bivariante graduada

La categoría $\mathrm{kk}^{\mathrm{gr}}$ tiene por objetos a las álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas; la construcción de los morfismos es más complicada.

Se puede caracterizar como la categoría triangulada "más chica" que recibe un funtor $\mathrm{j}\colon \mathrm{gr}-\mathrm{Alg} \to \mathrm{kk}^{\mathrm{gr}}$ que cumple

K-teoría bivariante graduada

La categoría kk^{gr} tiene por objetos a las álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas; la construcción de los morfismos es más complicada.

Se puede caracterizar como la categoría triangulada "más chica" que recibe un funtor $j\colon gr - Alg \to kk^{gr}$ que cumple

- invariancia homotópica: $j(A) \cong j(A[t])$;

K-teoría bivariante graduada

La categoría kk^{gr} tiene por objetos a las álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas; la construcción de los morfismos es más complicada.

Se puede caracterizar como la categoría triangulada "más chica" que recibe un funtor $j\colon \mathrm{gr}-\mathrm{Alg} \to kk^{gr}$ que cumple

- invariancia homotópica: $j(A) \cong j(A[t])$;
- estabilidad matricial: $j(A) \cong j(M_\infty A)$;

K-teoría bivariante graduada

La categoría kk^{gr} tiene por objetos a las álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas; la construcción de los morfismos es más complicada.

Se puede caracterizar como la categoría triangulada "más chica" que recibe un funtor $j\colon gr-Alg \to kk^{gr}$ que cumple

- invariancia homotópica: $j(A) \cong j(A[t])$;
- estabilidad matricial: $j(A) \cong j(M_\infty A)$;
- escisión: $A \to B \to C \rightsquigarrow j(A) \to j(B) \to j(C) \to j(A)[+1]$.

K-teoría bivariante graduada

La categoría kk^{gr} tiene por objetos a las álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas; la construcción de los morfismos es más complicada.

Se puede caracterizar como la categoría triangulada "más chica" que recibe un funtor $j\colon gr - Alg \to kk^{gr}$ que cumple

- invariancia homotópica: $j(A) \cong j(A[t])$;
- estabilidad matricial: $j(A) \cong j(M_\infty A)$;
- escisión: $A \to B \to C \rightsquigarrow j(A) \to j(B) \to j(C) \to j(A)[+1]$.

Teorema (A., Cortiñas, '22)

Se tiene que $\mathfrak{B}\mathfrak{F}^{gr}(E) \cong \mathfrak{B}\mathfrak{F}^{gr}(F)$ si y sólo si $j(L(E)) \cong j(L(F))$.

Clasificación a menos de homotopía

La noción de homotopía polinomial "reemplaza el intervalo por $\mathbb{A}^1_\ell = \ell[t]$".

$$f_0 \sim f_1 \iff \begin{tikzcd} & B[t] \arrow[d, "ev_i"] \\ A \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f_i"'] & B \end{tikzcd} \qquad i = 0, 1;$$

$$f \approx g \iff f = f_0 \sim f_1 \sim \cdots \sim f_n = g.$$

Clasificación a menos de homotopía

La noción de homotopía polinomial "reemplaza el intervalo por $\mathbb{A}^1_\ell = \ell[t]$".

$$f_0 \sim f_1 \iff \begin{tikzcd} & B[t] \arrow[d, "ev_i"] \\ A \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f_i"'] & B \end{tikzcd} \qquad i = 0, 1;$$

$$f \approx g \iff f = f_0 \sim f_1 \sim \cdots \sim f_n = g.$$

Teorema (A. '23)

Si E y F son dos grafos finitos y primitivos, entonces $\mathfrak{BF}^{gr}(E) \cong \mathfrak{BF}^{gr}(F)$ si y sólo si $L(E)$ y $L(F)$ son polinomialmente homotópicamente equivalentes.