Álgebra Lineal

Primer cuatrimestre - 2024

Práctica 8

Espacios vectoriales con producto interno

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

i) $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \Phi(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_1y_2;$

ii) $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \Phi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 3x_1y_2;$

iii) $\Phi\colon \mathbb{k}^2 \times \mathbb{k}^2 \to \mathbb{k},\ \Phi(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1,$ para $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{k} = \mathbb{C}$;

iv) $\Phi\colon \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \Phi(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1;$

Ejercicio 2. Sea $(\mathbb{V}, \langle -, - \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno. Recordar que se define la *norma* de un vector $v \in \mathbb{V}$ como $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Probar que $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$ si y sólo si $\{x, y\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

Ejercicio 3. Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

i) $\langle -, - \rangle\colon \mathbb{k}^{n\times n} \times \mathbb{k}^{n\times n} \to \mathbb{k},\ \langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^*),$ para $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{k} = \mathbb{C}$;

ii) $\langle -, - \rangle\colon C[0, 1] \times C[0, 1] \to \mathbb{R},\ \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx;$

iii) $\langle -, - \rangle\colon \mathbb{k}^n \times \mathbb{k}^n \to \mathbb{k},\ \langle x, y\rangle = y^*\, Q^*Q\, x,$ con $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{k} = \mathbb{C}$; donde $Q \in \mathbb{k}^{n\times n}$ es una matriz inversible;

iv) Dado $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{k}$ y $\langle -, - \rangle$ un producto interno sobre $\mathbb{W}$ y $T\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es un monomorfismo,

$$\langle -, - \rangle_T : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{k}, \qquad \langle x, y\rangle_T = \langle T(x), T(y)\rangle.$$

Ejercicio 4. Restringir el producto interno del ítem ii) del Ejercicio 3 a $\mathbb{R}_{\leq n}[X]$ y calcular su matriz en la base $B = \{1, X, \dots, X^n\}$.

Ejercicio 5. Se define $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ como $\langle f, g\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) g\Big(\frac{k}{n}\Big).$

i) Probar que $\langle -, - \rangle$ es un producto interno.

ii) Para $n = 2$, calcular $< X >^{\perp}$.

Ejercicio 6.

I) Se considera $\mathbb{C}^{n\times n}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

II) Se considera $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = \langle 1\rangle$.

III) Se considera $C[-1, 1]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\,dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \sin(\pi x)$.

Sugerencia: *Observar que basta considerar el subespacio* $S = \langle 1, x, x^2, x^3,\ \sin(\pi x)\rangle$.

Ejercicio 7. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con producto interno $\langle -, -\rangle$. Sea $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ un subespacio de dimensión finita de $\mathbb{V}$. Probar que si $x \notin \mathbb{W}$, entonces existe $y \in \mathbb{V}$ tal que $y \in \mathbb{W}^\perp$ y $\langle x, y\rangle \neq 0$.

Ejercicio 8. Calcular la adjunta de las transformaciones lineales siguientes:

I) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad f(x_1, x_2) = (3.x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

II) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3,\quad f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1 - i)x_2, x_2 + (3 + 2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$

III) $B = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\},\quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

IV) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X],\quad f(p) = p',\quad$ donde $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

V) $P \in GL(n, \mathbb{C}),\quad f : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}, f(A) = P^{-1}AP,\quad$ donde $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^*)$.

VI) $\ker_f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\quad \ker_f(p) = fp,\quad$ donde $f \in \mathbb{R}[X]$ y $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.

Ejercicio 9. Sea $(\mathbb{V}, \langle -, -\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una tranformación lineal. Probar que $\operatorname{im}(f^*) = \ker(f)^\perp$ y $\ker(f^*) = \operatorname{im}(f)^\perp$.

Ejercicio 10. Sea $(\mathbb{V}, \langle -, -\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea S un subespacio de $\mathbb{V}$. Probar que la proyección ortogonal $p : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ sobre S es autoadjunta. Calcular sus autovalores.

Ejercicio 11. Sea $(\mathbb{V}, \langle -, -\rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal. Se dice que f es *normal* si $f \circ f^* = f^* \circ f$.

I) Probar que si f admite una base ortonormal de autovectores, entonces f es normal.

II) Probar que si f es normal valen las siguientes afirmaciones:

a) $\|f(v)\| = \|f^*(v)\| \quad \forall\, v \in V$. En particular, $\ker(f) = \ker(f^*)$;

b) $f - \lambda\, id_V$ es normal para todo $\lambda \in \mathbb{C}$;

c) Si v es un autovector de f de autovalor λ, entonces v es un autovector de f^* de autovalor $\overline{\lambda}$;

d) E_λ es f^*-invariante.

III) Probar que si f es normal, entonces admite una base ortonormal de autovectores.

Sugerencia: *observar que* $(E_\lambda)^\perp$ *es* f*-invariante y* f^**-invariante*.

IV) Deducir de lo anterior que las matrices unitarias son diagonalizables sobre $\mathbb{C}$. Encontrar un ejemplo de matriz ortogonal que *no* sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.