

Álgebra Lineal

Primer cuatrimestre - 2024

Práctica 7

Subespacios invariantes y forma normal de Jordan

Ejercicio 1.

- i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + 2y, 2x - 2y)$. Hallar todos los subespacios de \mathbb{R}^2 que sean f -invariantes.
- ii) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación \mathbb{R} -lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|g_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (\diamond)$$

Para cada θ estudiar si g_θ es diagonalizable, y hallar todos los subespacios de \mathbb{R}^2 que sean g_θ -invariantes. ¿Qué cambia si consideramos $g_\theta : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ la transformación \mathbb{C} -lineal que tiene la matriz (\diamond) en base $E = \{(1, 0), (0, 1)\}$?

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal nilpotente tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$.

- i) Probar que para cada $0 \leq i \leq n$ existe un subespacio S_i de \mathbb{R}^n de dimensión i que es f -invariante.
- ii) Probar que existe un hiperplano de \mathbb{R}^n que es f -invariante pero que no admite un complemento f -invariante.

Ejercicio 3.

- i) Sea \mathbb{V} un \mathbb{k} -espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ una transformación lineal diagonalizable. Si S es un subespacio de \mathbb{V} que es f -invariante, probar que $f : S \rightarrow S$ es diagonalizable.
- ii) Sean $A, B \in \mathbb{k}^{n \times n}$ tales que $AB = BA$ y sea $E_\lambda(A) = \{x \in \mathbb{k}^n / Ax = \lambda x\}$. Probar que $E_\lambda(A)$ es B -invariante.
- iii) Sean $A, B \in \mathbb{k}^{n \times n}$ dos matrices diagonalizables tales que $AB = BA$. Probar que existe $C \in GL(n, \mathbb{k})$ tal que CAC^{-1} y CBC^{-1} son diagonales; es decir, probar que A y B se pueden diagonalizar simultáneamente.

Ejercicio 4. Sean $A, A' \in \mathbb{k}^{n \times n}$ las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

- i) Probar que ambas matrices son nilpotentes y que A es semejante a A' .
- ii) Dar bases B y B' de $\mathbb{R}_{\leq n-1}[X]$ tales que la matriz asociada a $p \in \mathbb{R}_{\leq n-1}[X] \mapsto p' \in \mathbb{R}_{\leq n-1}[X]$ en la base B sea A y en la base B' sea A' .
- iii) Sea B una base de \mathbb{k}^n y sea $f: \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$ tal que $|f|_B = A$. Probar que no existen subespacios propios f -invariantes S y T de \mathbb{k}^n tales que $\mathbb{k}^n = S \oplus T$.

Ejercicio 5. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = \langle v \rangle_A$?

Ejercicio 6. Si $f: \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$ es una transformación lineal tal que f^2 tiene un vector cíclico, probar que f tiene un vector cíclico. ¿Es válida la recíproca?

Ejercicio 7. Sean A_1, \dots, A_6 matrices nilpotentes de $\mathbb{C}^{8 \times 8}$ tales que $m_{A_i} = X^3$ para todo $i \in \{1, \dots, 6\}$. ¿Es cierto que necesariamente dos de estas matrices son semejantes?

Ejercicio 8. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ nilpotentes tales que $m_A = m_B$ y $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$. Probar que A y B son semejantes. ¿Es cierto esto en $\mathbb{C}^{7 \times 7}$?

Ejercicio 9. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Ejercicio 10. Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ nilpotente tal que $\text{rg}(A) = 6$, $\text{rg}(A^2) = 4$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una tal matriz.

Ejercicio 11. Sea $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio dado por $V = \langle e^x, x e^x, x^2 e^x, e^{2x} \rangle$. Sea $\delta: V \rightarrow V$ la transformación lineal definida por $\delta(f) = f'$. Hallar la forma y una base de Jordan para δ .

Ejercicio 12. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Decidir si A y B son semejantes.

Ejercicio 13. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Probar que A y A^t son semejantes.

Ejercicio 14. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ tales que $\chi_A = \chi_B = (X-1)^3(X-3)^2$ y $m_A = m_B$. Decidir si necesariamente A es semejante a B .

Ejercicio 15. En cada uno de los siguientes casos, encontrar todas las formas de Jordan posibles de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ con polinomios característico y minimal dados.

i) $\chi_A(X) = (X-2)^4(X-3)^2$, $m_A(X) = (X-2)^2(X-3)^2$;

$$\text{II) } \chi_A(X) = (X - 7)^5, \quad m_A(X) = (X - 7)^2$$

$$\text{III) } \chi_A(X) = (X - 2)^7, \quad m_A(X) = (X - 2)^3;$$

$$\text{IV) } \chi_A(X) = (X - 3)^4(X - 5)^4, \quad m_A(X) = (X - 3)^2(X - 5)^2.$$

Ejercicio 16. Sea $A \in \mathbb{C}^{15 \times 15}$ una matriz con autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 y que cumple, simultáneamente:

$$\text{rg}(A - \lambda_1 I) = 13, \quad \text{rg}(A - \lambda_1 I)^2 = 11, \quad \text{rg}(A - \lambda_1 I)^3 = 10, \quad \text{rg}(A - \lambda_1 I)^4 = 10,$$

$$\text{rg}(A - \lambda_2 I) = 13, \quad \text{rg}(A - \lambda_2 I)^2 = 11, \quad \text{rg}(A - \lambda_2 I)^3 = 10, \quad \text{rg}(A - \lambda_2 I)^4 = 9,$$

$$\text{rg}(A - \lambda_3 I) = 13, \quad \text{rg}(A - \lambda_3 I)^2 = 12, \quad \text{rg}(A - \lambda_3 I)^3 = 11.$$

Hallar su forma de Jordan.

Ejercicio 17. Calcular las posibles formas de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ sabiendo que cumple simultáneamente:

- $X^2 - 6X + 9 \mid m_A(X)$,
- $\text{rg}(A + I) = 3$ y
- $(A - 3I)^3(A + I)^3(A - I) = 0$.

Ejercicio 18. Sean $x, y \in \mathbb{C}^n$ y $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dada por $A_{ij} = x_i \cdot y_j$.

- I) Calcular todos los autovalores y autovectores de A .
- II) Calcular las posibles formas de Jordan de A .