

Álgebra Lineal
Primer cuatrimestre - 2024
Práctica 4
Espacio dual

Ejercicio 1. Hallar una base del subespacio $S = \{\phi \in (\mathbb{R}^3)^\vee : \phi(1, -1, 2) = 0\}$.

Ejercicio 2. Para cada uno de los siguientes \mathbb{R} -espacios vectoriales V con base B , hallar la base dual correspondiente:

(I) $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1, -1), (2, 0)\}$,

(II) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$,

(III) $V = \mathbb{R}_3[X]$, $B = \{-X + 2, X - 1, X^2 - 3X + 2, X^3 - 3X^2 + 2X\}$.

Ejercicio 3. Sea $B' = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ la base de $(\mathbb{R}^3)^\vee$ definida por

$$\phi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2, \quad \phi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3, \quad \phi_3(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3.$$

Hallar la base B de \mathbb{R}^3 tal que $B' = B^\vee$.

Ejercicio 4. Sean f_1, f_2 y $f_3 \in (\mathbb{R}_2[X])^\vee$ las siguientes formas lineales:

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x) dx, \quad f_2(p) = \int_0^2 p(x) dx, \quad f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x) dx.$$

(I) Probar que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}_2[X])^\vee$.

(II) Hallar una base B de $\mathbb{R}_2[X]$ tal que $B^\vee = \{f_1, f_2, f_3\}$.

Ejercicio 5. Sea V un \mathbb{k} -espacio vectorial de dimensión n .

(I) Si $\phi_1, \phi_2 \in V^\vee \setminus \{0\}$, demostrar que $\ker(\phi_1) = \ker(\phi_2)$ si y solo si $\{\phi_1, \phi_2\}$ es linealmente dependiente.

(II) Sean $\phi, \phi_1, \dots, \phi_r$ formas lineales en V^\vee . Supongamos que cada vez que existe $x \in V$ tal que $\phi_1(x) = \phi_2(x) = \dots = \phi_r(x) = 0$ se tiene que $\phi(x) = 0$. Probar que $\phi \in \langle \phi_1, \dots, \phi_r \rangle$.

(III) Sean ϕ_1, \dots, ϕ_n formas lineales en V^\vee . Probar que $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ es base de V^\vee si y sólo si

$$\bigcap_{i=1}^n \ker(\phi_i) = 0.$$

Ejercicio 6. Sea $\phi \in (\mathbb{R}^3)^\vee$ definida por $\phi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 - x_3$ y sea $E^\vee = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \subseteq (\mathbb{R}^3)^\vee$ la base dual de la base canónica.

- (I) Calcular las coordenadas de φ en E^\vee .
- (II) Calcular las coordenadas de φ en la base $B^\vee = \{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \delta_1 + \delta_2, \delta_1\}$.
- (III) Sean $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$ y $B = \{(0, 0, 1), (0, 1, -1), (1, -1, 0)\}$. Encontrar una ecuación para S en la base B .

Sugerencia: notar que B^\vee es la base dual de B y no hacer ninguna cuenta.

Ejercicio 7. Consideremos la base $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ de \mathbb{R}^2 . Encontrar las coordenadas de la base dual de B en la base E^\vee dual a la base canónica.

Ejercicio 8. Sean $B_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ y $B_2 = \{(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$ dos bases de \mathbb{R}^3 . Si $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^\vee$ tiene coordenadas $(1, -3, 2)$ respecto de B_1^\vee , calcular sus coordenadas respecto de B_2^\vee .

Ejercicio 9. Para cada uno de los siguientes \mathbb{R} -espacios vectoriales V junto con subespacios $S \leq V$, hallar una base de S° .

- (I) $V = \mathbb{R}^3, S = \langle (1, -1, 2), (2, 1, 3), (1, 5, 0) \rangle$.
- (II) $V = \mathbb{R}^4, S = \langle (1, 1, -1, 1), (2, -1, 3, 1) \rangle$.
- (III) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0, 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.

Ejercicio 10. Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y $W = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A \cdot B = 0\}$. Sea $f \in W^\circ$ tal que $f(I_2) = 0$ y $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$. Calcular $f(B)$.

Ejercicio 11. Para los siguientes \mathbb{R} -espacios vectoriales V y subespacios S y T de V , determinar una base de $(S + T)^\circ$ y una base de $(S \cap T)^\circ$.

- i) $V = \mathbb{R}^4, S = \langle (1, 1, -1, 1), (2, -1, 3, 1) \rangle, T = \langle (2, -4, 8, 0), (-1, 1, 2, 3) \rangle$.
- ii) $V = \mathbb{R}^4, S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 = 0, x_1 + x_2 + x_4 = 0\}, T = \langle (2, 1, 3, 1) \rangle$.

Ejercicio 12. Sea V un \mathbb{k} -espacio vectorial de dimensión finita y S y T subespacios tales que $V = S \oplus T$. Probar que $V^\vee = S^\circ \oplus T^\circ$.

Ejercicio 13. Sea \mathbb{k} un cuerpo y $\text{tr} : \mathbb{k}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{k}$ la forma lineal traza. Dada $A \in \mathbb{k}^{n \times n}$, se define $f_A : \mathbb{k}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{k}$ como $f_A(X) = \text{tr}(A \cdot X)$.

- (I) Probar que $f_A \in (\mathbb{k}^{n \times n})^\vee$ para cada $A \in \mathbb{k}^{n \times n}$.
- (II) Probar que si $f_A(X) = 0$ para cada $X \in \mathbb{k}^{n \times n}$, entonces $A = 0$.
- (III) Se define $\gamma : \mathbb{k}^{n \times n} \rightarrow (\mathbb{k}^{n \times n})^\vee$ por $\gamma(A) = f_A$. Probar que γ es un isomorfismo.
- (IV) Sea $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 3a_{11} - 2a_{12} + 5a_{22}.$$

Encontrar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $\gamma(A) = f$.

Ejercicio 14. Sea \mathbb{k} un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y $\varphi \in (\mathbb{k}^{n \times n})^\vee$ tal que $\varphi(A \cdot B) = \varphi(B \cdot A)$ para cada $A, B \in \mathbb{k}^{n \times n}$.

- (I) Probar que existe $\alpha \in \mathbb{k}$ tal que $\varphi = \alpha \text{ tr}$.
- (II) Deducir que si $\varphi(E_{11}) = 1$, entonces $\varphi = \text{tr}$.
- (III) Deducir que si $n \neq 0$ en \mathbb{k} y $\varphi(I_n) = n$, entonces $\varphi = \text{tr}$.

Ejercicio 15. Sean $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{k}$ tales que $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$. Para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, se define la transformación lineal $\text{ev}_{\alpha_i} : \mathbb{k}_n[X] \rightarrow \mathbb{k}$ dada por $\text{ev}_{\alpha_i}(P) = P(\alpha_i)$.

- (I) Probar que $B_1 = \{\text{ev}_{\alpha_0}, \dots, \text{ev}_{\alpha_n}\}$ es una base de $(\mathbb{k}_n[X])^\vee$.
- (II) Sea $B = \{P_0, \dots, P_n\}$ la base de $\mathbb{k}_n[X]$ tal que $B^\vee = B_1$. Probar que para cada $\beta_0, \dots, \beta_n \in \mathbb{k}$ el polinomio

$$P = \sum_{i=0}^n \beta_i P_i$$

es el único polinomio en $\mathbb{k}[X]$ de grado menor o igual que n tal que $P(\alpha_i) = \beta_i$ para todo i . Este polinomio se llama el *polinomio interpolador de Lagrange*.

- (III) Probar que existen números reales a_0, \dots, a_n tales que, para todo $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\int_0^1 P(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i P(\alpha_i).$$

Hallar a_0, a_1 y a_2 en el caso en que $n = 2, \alpha_0 = 1, \alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_2 = 0$.

Ejercicio 16. Sea \mathbb{k} un cuerpo y sean V y W dos \mathbb{k} -espacios vectoriales de dimensión finita. Sea $f : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Se define la función *transpuesta* $f^t : W^\vee \rightarrow V^\vee$ de f como

$$f^t(\varphi) = \varphi \circ f.$$

- (I) Probar que f^t es una transformación lineal.
- (II) Probar que $\text{im}(f)^\circ = \ker(f^t)$ y que $\text{im}(f^t) = \ker(f)^\circ$.
- (III) Sean $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^3$ y $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_1, x_1 - 2x_2)$. Si $B = \{(1, 2), (1, 3)\}$ y $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$, calcular $|f|_{BB_1}$ y $|f^t|_{B_1^\vee B^\vee}$.
- iv) Si B y B_1 son bases de V y W respectivamente, probar que

$$|f^t|_{B_1^\vee B^\vee} = (|f|_{BB_1})^t.$$