

Álgebra Lineal

Primer cuatrimestre - 2024

Práctica 2

Espacios vectoriales y coordenadas

Espacios vectoriales

Ejercicio 1. Probar en cada caso que el conjunto V con la suma y el producto por escalares definidos es un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{k} .

I) $V = \mathbb{k}^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) : a_i \in \mathbb{k} \forall i \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de un cuerpo arbitrario \mathbb{k} .

$$(a_i)_{i \in \mathbb{N}} + (b_i)_{i \in \mathbb{N}} := (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}},$$

$$\lambda \cdot (a_i)_{i \in \mathbb{N}} := (\lambda a_i)_{i \in \mathbb{N}}.$$

II) dado un conjunto X , $V = \mathcal{P}(X)$, $\mathbb{k} = \mathbb{Z}_2$.

$$B + C := B \Delta C,$$

$$0 \cdot B := \emptyset, \quad 1 \cdot B := B.$$

III) $V = \mathbb{R}_{>0}$, $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$.

$$a \oplus b := ab,$$

$$\frac{m}{n} \otimes a := \sqrt[n]{a^m}.$$

Ejercicio 2. Sea \mathbb{k} un cuerpo y sean V un \mathbb{k} -espacio vectorial, $\lambda \in \mathbb{k}$ y $v \in V$. Probar las siguientes afirmaciones:

i) $0 \cdot v = 0_V$;

ii) $-(-v) = v$;

iii) si $\lambda \cdot v = 0_V$, entonces $\lambda = 0$ ó $v = 0_V$;

iv) $-0_V = 0_V$.

Ejercicio 3 (Traslaciones). Dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$, la *traslación en v* es la función

$$f_v: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x, y) + v.$$

i) Interpretar geoméricamente el efecto de f_v sobre el plano.

II) Probar que \mathbb{R}^2 es un \mathbb{R} -espacio vectorial con la suma $+_{(2,1)}$ y el producto por escalares $\cdot_{(2,1)}$ definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(x, y) +_{(2,1)} (x', y') &:= (x + x' - 2, y + y' - 1) \\ r \cdot_{(2,1)} (x, y) &:= r(x - 2, y - 1) + (2, 1)\end{aligned}$$

Denotaremos $\mathbb{R}_{(2,1)}^2$ a este espacio vectorial, para distinguirlo de \mathbb{R}^2 con la suma y el producto usual. La elección de notación se basa en que $(2, 1)$ resulta el neutro de la suma $+_{(2,1)}$.

III) Interpretar geoméricamente $+_{(2,1)}$ y $\cdot_{(2,1)}$, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}(x, y) +_{(2,1)} (x', y') &= f_{(2,1)}(f_{(-2,-1)}(x, y) + f_{(-2,-1)}(x', y')), \\ r \cdot_{(2,1)} (x, y) &= f_{(2,1)}(r \cdot f_{(-2,-1)}(x, y)).\end{aligned}$$

Ejercicio 4. Encontrar un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^2 que sea cerrado para la suma y para la resta pero no para la multiplicación por escalares, y otro subconjunto que sea cerrado para la multiplicación por escalares pero no para la suma.

Ejercicio 5. Para cada \mathbb{k} -espacio vectorial V , decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios.

- I) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{k} = \mathbb{C}$; $V = \mathbb{C}$, $S_1 = \{a \cdot i : a \in \mathbb{R}\}$.
- II) \mathbb{k} un cuerpo arbitrario, $V = \mathbb{k}[X]$, $S_2 = \{f \in \mathbb{k}[X] : f'(1) = 0\}$.
- III) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $S_3 = \{f \in C(\mathbb{R}) : \int_0^1 f(x) dx = 0\}$.
- IV) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $V = C^\infty(\mathbb{R})$, $S_4 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f'' + 3f' = 0\}$.
- V) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}_{(2,1)}^2$, $S_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{(2,1)}^2 : x + y = 3\}$.
- VI) \mathbb{k} un cuerpo arbitrario, $V = \mathbb{k}^{\mathbb{N}}$, $S_6 = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{k}^{\mathbb{N}} : \text{existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_r = 0 \text{ para todo } r \geq k\}$.
- VII) \mathbb{k} un cuerpo arbitrario, $V = \mathbb{k}^{\mathbb{N}}$, $S_7 = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{k}^{\mathbb{N}} : a_1 \cdot a_2 = 0\}$.

Ejercicio 6. Sean \mathbb{k} un cuerpo, V un espacio vectorial y S y T dos subespacios de V . Probar que $S \cup T$ es un subespacio de V si y sólo si $S \subseteq T$ ó $T \subseteq S$.

Ejercicio 7. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes \mathbb{k} -espacios vectoriales:

- I) \mathbb{k} un cuerpo arbitrario, $n \in \mathbb{N}$ y $V = \mathbb{k}_n[X] := \{f \in \mathbb{k}[X] : f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq n\}$.
- II) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}^n$.
- III) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0, x - y = 0\}$.
- IV) $\mathbb{k} = \mathbb{Z}_7$, $V = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_7)^3 : x + 2y + z = 0\}$.
- V) $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$, $V = \{A \in \mathbb{Q}^{3 \times 3} : A = -A^t\}$.
- VI) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $V = \{f \in \mathbb{R}_4[X] : f(1) = 0, f(2) = f(3)\}$.

VII) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $V = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_i = 0 \forall i \geq 5, a_1 + 2a_2 - a_3 = 0, a_2 + a_4 = 0\}$.

VIII) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $V = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f''' = 0\}$.

Ejercicio 8. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

I) Sea \mathbb{k} un cuerpo y V un \mathbb{k} -espacio vectorial. Dados $v, w \in V$ y $\lambda \in \mathbb{k}$, $\langle v, w \rangle = \langle v, w + \lambda \cdot v \rangle$.

II) Sean $v_1, v_2, v_3, v_4, w \in \mathbb{R}^7$. Si $\langle v_1, v_2, w \rangle = \langle v_3, v_4, w \rangle$, entonces $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$.

Ejercicio 9. Sea $S = \langle (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

I) Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$.

II) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

III) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

Ejercicio 10. En cada caso, dados V un \mathbb{k} -espacio vectorial y S, T subespacios de V , halle un sistema de generadores para $S \cap T$.

I) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) \rangle$, $T = \langle (1, 1, 0), (3, 2, 1) \rangle$.

II) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $S = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A = A^t\}$, $T = \{(x_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} : x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$.

III) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(1) = 0\}$, $T = \langle 1, X, X^2, X^3 + 2X^2 - X, X^5 \rangle$.

Ejercicio 11. Para cada uno de los siguientes \mathbb{k} -espacios vectoriales V , decidir si el conjunto de vectores $X \subset V$ es linealmente independiente sobre \mathbb{k} .

I) \mathbb{k} un cuerpo arbitrario, $V = \mathbb{k}[X]$, $X = \{(1 - X)^3, (1 - X)^2, 1 - X, 1\}$.

II) $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^4$, $X = \{(1, 4, -1, 3), (2, 1, -3, -1), (0, 2, 1, -5)\}$.

III) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$, $X = \{(1 - i, i), (2, -1 + i)\}$.

IV) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $X = \{e^x, \text{id}_{\mathbb{R}}\}$.

V) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $X = \{\text{sen}(x), \text{cos}(x)\}$.

VI) \mathbb{k} un cuerpo arbitrario, $n \geq 2$, $V = \mathbb{k}^{n \times n}$, y, dada $A \in V$, $X = \{I_n, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2-1}\}$.

Ejercicio 12. En cada uno de los siguientes casos, halle todos los $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales el conjunto X resulte \mathbb{R} -linealmente independiente.

I) $\{(k, 1, 0), (3, -1, 2), (k, 2, -2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

II) $\{kX^2 + X, X^2 - k, k^2X\} \subset \mathbb{R}[X]$.

III) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Ejercicio 13. Sean $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente sobre \mathbb{R} si y sólo si visto como subconjunto de \mathbb{C}^n es linealmente independiente sobre \mathbb{C} .

Ejercicio 14. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de \mathbb{R}^n . Probar que $\{e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n\}$ es una base de \mathbb{C}^n como \mathbb{R} -espacio vectorial. ¿Cuál es la dimensión de \mathbb{C}^n como \mathbb{R} -espacio vectorial?

Ejercicio 15. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del \mathbb{k} -espacio vectorial V indicado:

I) $\mathbb{k} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^4, S = \{(1, 1, 1, 1), (0, 2, 1, 1)\};$

II) $\mathbb{k} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}_3[X], \{X^3 - 2X + 1, X^3 + 3X\};$

III) $\mathbb{k} = \mathbb{C}, V = \mathbb{C}^{2 \times 2}, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\};$

IV) $\mathbb{k} = \mathbb{R}, V$ y S como en el ítem anterior.

Ejercicio 16. Para cada uno de los siguientes \mathbb{k} -espacios vectoriales V , extraer una base del sistema de generadores S dado.

I) $\mathbb{k} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^3, S = \langle (1, 1, 2), (1, 3, 5), (1, 1, 4), (5, 1, 1) \rangle.$

II) $\mathbb{k} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}[X], S = \langle X^2 + 2X + 1, X^2 + 3X + 1, X + 2 \rangle.$

III) $\mathbb{k} = \mathbb{C}, V = \mathbb{C}^{2 \times 2}, S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$

IV) $\mathbb{k} = \mathbb{R}, V$ y S como en el ítem anterior.

Ejercicio 17. Hallar una base y la dimensión de los siguientes \mathbb{k} -espacios vectoriales:

I) $\mathbb{k} = \mathbb{R}, V = \{f \in \mathbb{R}[X] : f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq 3, f(2) = f(-1)\}.$

II) $\mathbb{k} = \mathbb{R}, V = \{f \in \mathbb{R}[X] : f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq 3, f \text{ es un múltiplo de } (x^2 - 2)\}.$

III) \mathbb{k} un cuerpo arbitrario, $V = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{k}^{\mathbb{N}} : a_i = a_j \forall i, j \in \mathbb{N}\}.$

Ejercicio 18. Hallar la dimensión del \mathbb{R} -espacio vectorial S para cada $k \in \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

I) $S = \langle (1, k, 1), (-1, k, 1), (0, 1, k) \rangle \subset \mathbb{R}^3.$

II) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\},$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$

Ejercicio 19. Consideremos los siguientes subespacios de \mathbb{R}^4 :

$$S = \langle (1, 2, 1, 0), (2, 1, 0, 1) \rangle, \quad T = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

Hallar un subespacio $U \subset \mathbb{R}^4$ tal que $\dim U = 2$ y $S \cap T \subset U \subset T$.

Ejercicio 20. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales se tienen las siguientes igualdades de subespacios en \mathbb{R}^3 :

I) $\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle = \langle (1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k) \rangle.$

II) $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$, siendo $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle (1, k, 2), (-1, 2, k) \rangle$.

Ejercicio 21. Para cada uno de los siguientes \mathbb{R} -espacios vectoriales V y subespacios S y T , caracterizar $S + T \subseteq V$ y determinar si la suma es directa.

I) $V = \mathbb{R}^3, S = \langle (1, 1, 1) \rangle, T = \langle (2, -1, 1), (3, 0, 2) \rangle$.

II) $V = \mathbb{R}[X], S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq 3\}, T = \{f \in \mathbb{R}[X] : \text{mult}(4, f) \geq 4\}$.

III) $V = \mathbb{R}^{2 \times 3}, S = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 3} : A_{11} + A_{21} = 0, 3A_{22} - 2A_{11} = A_{13} + A_{23}\},$

$$T = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ejercicio 22. Sean \mathbb{k} un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$.

I) Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{k}^{n \times n}$ y calcular su dimensión.

a) $S_1 = \{A \in \mathbb{k}^{n \times n} : A = A^t\}$, las matrices *simétricas*;

b) $S_2 = \{A \in \mathbb{k}^{n \times n} : A = -A^t\}$, las matrices *antisimétricas*;

c) $S_3 = \{A \in \mathbb{k}^{n \times n} : A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$, las matrices *diagonales*;

d) $S_4 = \{A \in \mathbb{k}^{n \times n} : A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } A_{11} = A_{22} = \dots = A_{nn}\}$, las matrices *escalares*;

e) $S_5 = \{A \in \mathbb{k}^{n \times n} : \text{tr}(A) = 0\}$.

II) Probar que:

a) $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{k}^{n \times n}$ si $2 \neq 0$ en \mathbb{k} .

b) $S_4 \oplus S_5 = \mathbb{k}^{n \times n}$ si \mathbb{k} es \mathbb{Q}, \mathbb{R} ó \mathbb{C} .

Ejercicio 23. Para cada uno de los siguientes \mathbb{k} -espacios vectoriales V junto con subespacios S , hallar un subespacio T de V tal que $S \oplus T = V$. El subespacio T se dice un *complemento* de S .

I) $\mathbb{k} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^4, S = \langle (1, 2, -1, 3), (2, 3, -2, 1), (0, 1, 0, 7) \rangle$.

II) $\mathbb{k} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}_4[X], S = \langle 3, 1 + X^2 \rangle$.

III) $\mathbb{k} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^{n \times n}, S = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{tr}(A) = 0\}$.

Ejercicio 24. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

I) si S y T son dos subespacios de \mathbb{R}^3 tales que $\dim S = \dim T = 2$, entonces existe $v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$;

II) si S, T y W son subespacios de \mathbb{R}^{11} tales que $\dim S = \dim T = \dim W = 4$, entonces $\dim(S \cap T \cap W) \geq 1$.

Ejercicio 25. Sean S, T y U subespacios de un \mathbb{k} -espacio vectorial V tales que $S \cap T = S \cap U, S + T = S + U$ y $T \subseteq U$. Probar que $T = U$.

Ejercicio 26 (Hiperplanos). Sea V un \mathbb{k} -espacio vectorial de dimensión n y sea T un *hiperplano* de V , es decir, un subespacio de dimensión $n - 1$.

- I) Probar que para todo $v \notin T$ se tiene que $T \oplus \langle v \rangle = V$.
- II) Dado un subespacio S de V tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S + T = V$. Calcular $\dim(S \cap T)$.
- III) Dados S y T dos hiperplanos distintos, calcular $\dim(S \cap T)$.

Ejercicio 27. Sea $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el \mathbb{R} -espacio vectorial de funciones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- I) Consideremos $S = \{f \in V : f(-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{f \in V : f(-x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}\}$ los conjuntos de funciones *pares e impares* respectivamente. Pruebe que S y T son subespacios de V y que $S \oplus T = V$.
- II) Pruebe que los conjuntos $U = \{f \in V : f(0) = 0\}$ y $W = \{f \in V : f \text{ es constante}\}$ son subespacios de V tales que $U \oplus W = V$.

Coordenadas

Ejercicio 28. Para cada uno de los siguientes \mathbb{R} -espacios vectoriales V , hallar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base B .

- I) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (1, 2, -1)$ y $B = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$.
- II) $V = \mathbb{R}_3[X]$, $v = 2X^2 - X^3$ y $B = \{3, 1 + X, X^2 + 5, X^3 + X^2\}$.
- III) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$.

Ejercicio 29. Para cada uno de los siguientes \mathbb{R} -espacios vectoriales V y bases B, B' , calcular la matriz de cambio de base $C(B, B')$.

- I) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $B' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$.
- II) $V = \mathbb{R}_2[X]$, $B = \{3, 1 + X, X^2\}$, $B' = \{1, X + 3, X^2 + X\}$.
- III) $V = \mathbb{R}^4$, $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $B' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$.

Ejercicio 30. Para cada ítem del Ejercicio 29 y $v \in V$ dado, hallar las coordenadas de v respecto de B y –utilizando la matriz de cambio de base– las coordenadas de v respecto de B' .

- I) $v = (-1, 5, 6)$.
- II) $v = X$.
- III) $v = 2v_1 + 3v_2 - 5v_3 + 7v_4$.

Ejercicio 31. Sean \mathbb{k} un cuerpo y V un \mathbb{k} -espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Dadas bases B, B' y B'' de V , probar que $C(B, B'') = C(B', B'')C(B, B')$. Deducir que $C(B, B')$ es una matriz inversible con $C(B, B')^{-1} = C(B', B)$.

Ejercicio 32. Sea \mathbb{k} un cuerpo. Dada $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^{3 \times 3}$ y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de \mathbb{k}^3 , hallar:

- I) una base B_1 de \mathbb{k}^3 tal que $M = C(B_1, B)$;
- II) una base B_2 de \mathbb{k}^3 tal que $M = C(B, B_2)$.