Álgebra Lineal

Primer cuatrimestre - 2024

Práctica 1

Sistemas lineales y matrices

Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados sobre $\mathbb{R}$. ¿Cambia algo sobre $\mathbb{Q}$? ¿Y sobre $\mathbb{C}$?

I) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \end{cases}$$

II) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 &= 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2. Determinar los números $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ para los cuales el siguiente sistema admite solución.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 &= \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 &= \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= \alpha_3 \end{cases}$$

Ejercicio 3. Determinar los valores $k \in \mathbb{R}$ para los cuales los siguientes sistemas tienen alguna solución no trivial y, para los valores hallados, resolverlos.

I) $$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 &= 0 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 &= 0 \end{cases}$$

II) $$\begin{cases} kx_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + kx_2 &= 0 \\ k^3x_1 + x_2 + k^3x_3 + kx_4 &= 0 \\ x_1 + k^2x_2 + kx_3 + kx_4 &= 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Determinar para qué valores $k \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema tiene solución única, no tiene solución, o tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 &= -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 &= 2 \end{cases}$$

Ejercicio 5. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ el siguiente sistema tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 & = 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 & = 2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 & = 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 & = b \end{cases}$$

Ejercicio 6. Resolver el siguiente sistema sobre $\mathbb{C}$.

$$\begin{cases} i\,x_1 - (1+i)x_2 & = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + 2i\,x_2 - x_3 & = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 7. Resolver el siguiente sistema sobre $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = 4 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 & = 2 \\ 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 8. Encontrar un sistema de ecuaciones lineales a coeficientes reales cuya solución general sea $\{(1,1,0) + \lambda(1,2,1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Matrices

Ejercicio 9. Sean $\Bbbk$ un cuerpo y $m, n, r \in \mathbb{N}$.

i) Pruebe que si $A \in \Bbbk^{m\times n}$ satisface $Ax = 0$ para todo $x \in \Bbbk^n$, entonces $A = 0$. Deducir que si A, $B \in \Bbbk^{m\times n}$ satisfacen que $Ax = Bx$ para todo $x \in \Bbbk^n$, entonces $A = B$.

ii) Sean $A \in \Bbbk^{m\times n}$ y $B \in \Bbbk^{n\times r}$. Pruebe que para cada $i \in \{1,\dots,m\}$ y $j \in \{1,\dots,r\}$ se tiene que

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}.$$

Ejercicio 10. Sean $\Bbbk$ un cuerpo, $n \geq 2$ y $A, B, C \in \Bbbk^{n\times n}$.

a) Mostrar con un contraejemplo que las siguientes afirmaciones son falsas:

  I) si $A \cdot B = 0$, entonces $A = 0$ ó $B = 0$;
  II) si $A \cdot B = A \cdot C$ $A \neq 0$, entonces $B = C$;
  III) si $A \cdot B = 0$, entonces $B \cdot A = 0$;
  IV) si $A^j = 0$ para algún $j \in \mathbb{N}$, entonces $A = 0$;
  V) si $A^2 = A$, entonces $A = 0$ ó $A = I_n$;

vi) $A^2 \cdot B^2 = (A \cdot B)^2$.

b) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y B para que se satisfagan las siguientes igualdades:

i) $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$;

ii) $A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)$.

Ejercicio 11. Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Probar que el producto de matrices en $\Bbbk^{n\times n}$ es conmutativo si y sólo si $n = 1$. Caracterizar además el conjunto $\{A \in \Bbbk^{n\times n} : A \cdot B = B \cdot A \ (\forall B \in \Bbbk^{n\times n})\}$.

Ejercicio 12. Sea $\Bbbk$ un cuerpo y $n, m \in \mathbb{N}$. Consideremos matrices $A, A' \in \Bbbk^{n\times n}$, $B, B' \in \Bbbk^{n\times m}$, $C, C' \in \Bbbk^{m\times n}$ y $D, D' \in \Bbbk^{m\times m}$. Probar que si definimos matrices "por bloques" $M, M' \in \Bbbk^{(n+m)\times(n+m)}$,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}; \qquad M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix},$$

entonces

$$M \cdot M' = \begin{pmatrix} A \cdot A' + B \cdot C' & A \cdot B' + B \cdot D' \\ C \cdot A' + D \cdot C' & C \cdot B' + D \cdot D'. \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13. Sean $\Bbbk$ un cuerpo, $\alpha \in \Bbbk$, $n, m, r \in \mathbb{N}$, y $A, A' \in \Bbbk^{m\times n}$, $B \in \Bbbk^{n\times r}$. Probar que:

i) $(A + A')^t = A^t + (A')^t$;

ii) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$;

iii) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

Ejercicio 14. Sean $\Bbbk$ un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \Bbbk$ y $D, D' \in \Bbbk^{n\times n}$. Recordemos que la *traza* de una matriz cuadrada $M \in \Bbbk^{n\times n}$ es la suma de los coeficientes que se encuentran en su diagonal, es decir,

$$\operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{ii}.$$

Probar que:

i) $\operatorname{tr}(D + D') = \operatorname{tr}(D) + \operatorname{tr}(D')$;

ii) $\operatorname{tr}(\alpha D) = \alpha \operatorname{tr}(D)$;

iii) $tr(D \cdot D') = \operatorname{tr}(D' \cdot D)$.

Ejercicio 15. Sean $\Bbbk$ un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y $A, B \in \Bbbk^{n\times n}$. Probar que:

i) si A y B son triangulares superiores, entonces $A \cdot B$ es triangular superior;

ii) si A y B son diagonales, entonces $A \cdot B$ es diagonal;

iii) si A es estrictamente triangular superior (es decir, $A_{ij} = 0$ si $i \geq j$), entonces $A^n = 0$.

Ejercicio 16. Sean $\Bbbk$ un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \Bbbk^{n\times n}$.

I) Probar que $A \cdot A^t$ y $A^t \cdot A$ son matrices simétricas. Encontrar un ejemplo donde $A \cdot A^t \neq A^t \cdot A$.

II) ¿Es el producto de dos matrices simétricas una matriz simétrica?

III) En el caso en que $\Bbbk = \mathbb{R}$, pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) $A = 0$;
   b) $A \cdot A^t = 0$;
   c) $\operatorname{tr}(A \cdot A^t) = 0$.

Ejercicio 17. Sean $\Bbbk$ un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y $A, B \in \Bbbk^{n\times n}$. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

I) si A y B son inversibles, entonces $A + B$ es inversible;

II) A es inversible si y sólo si A^t es inversible;

III) si $\operatorname{tr}(A) = 0$, entonces A no es inversible;

IV) si A es nilpotente, entonces A no es inversible.

Ejercicio 18. Sean $\Bbbk$ un cuerpo, $m, n \in \mathbb{N}$, y $A \in \Bbbk^{m\times n}$. Consideremos $b \in \Bbbk^m$ y

$$H = \{x \in \Bbbk^n \;/\; A \cdot x = b\}.$$

Probar que:

I) si $C \in \Bbbk^{m\times m}$ es inversible, entonces $H = \{x \in \Bbbk^n \;/\; (C \cdot A) \cdot x = C \cdot b\}$;

II) si $m = n$ y A es inversible, entonces H tiene un solo elemento. ¿Cuál es? Deducir que si A es inversible, entonces cualquier sistema lineal cuya matriz asociada sea A tiene solución única.

Matrices Elementales

Dado un cuerpo $\Bbbk$, $n \in \mathbb{N}$ e $i, j \in \{1, \dots, n\}$, se define la *matriz canónica* $E^{ij} \in \Bbbk^{n\times n}$ como

$$(E^{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ y } j = l \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Ejercicio 19 (Matrices elementales)**.** Sean $\Bbbk$ un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$.

a) Dados $a \in \Bbbk \setminus \{0\}$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, se define

$$M_i(a) := E^{11} + E^{22} + \dots + aE^{ii} + E^{(i+1)(i+1)} + \dots + E^{nn} = I_n + (a-1)E^{ii}.$$

Escribir todas las posibles matrices $M_i(a)$ para cada $n \in \{2, 3, 4\}$ y $a \in \Bbbk \setminus \{0\}$ arbitrario.

b) Dados $1 \leq i, j \leq n$ tales que $i \neq j$, se define $P^{ij} \in \Bbbk^{n\times n}$ como la matriz que se obtiene permutando la fila i con la fila j de la matriz identidad. Comprobar que

$$P^{ij} = I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji}.$$

Escribir todas las posibles matrices $P^{ij} \in \Bbbk^{n\times n}$ para cada $n \in \{2, 3, 4\}$.

c) Dados $1 \leq i, j \leq n$ tales que $i \neq j$ y $a \in \mathbb{k}$, se define

$$T^{ij}(a) = I_n + a \cdot E^{ij}.$$

Escribir todas las posibles matrices $T^{ij}(a)$ para cada $n \in \{2, 3, 4\}$ y $a \in \mathbb{k}$ arbitrario.

Las matrices $M_i(a)$, P^{ij} y $T^{ij}(a)$ se llaman *matrices elementales* de $\mathbb{k}^{n \times n}$.

Ejercicio 20. Sean $\mathbb{k}$ un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Dados $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $i \neq j$, y $a \in \mathbb{k} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{k}$, probar que:

I) $M_k(a) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{k})$ y $(M_k(a))^{-1} = M_k(a^{-1})$;

II) $P^{ij} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{k})$ y $(P^{ij})^{-1} = P^{ij}$;

III) $T^{ij} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{k})$ y $(T^{ij}(b))^{-1} = T^{ij}(-b)$.

Ejercicio 21. Sean $\mathbb{k}$ un cuerpo, $n, m \in \mathbb{N}$ y $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{k}^{n \times m}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, notemos F_i a la i-ésima fila de A, es decir,

$$F_i = (a_{i1}, \ldots, a_{im}), \qquad A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}.$$

Probar que:

I) $E^{ij} \cdot A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = (0, \ldots, 0)$ si $k \neq i$ y $F'_i = F_j$.

II) $M_i(a) \cdot A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i$ y $F'_i = a \cdot F_i$.

III) $P^{ij} \cdot A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \notin \{i, j\}$, $F'_i = F_j$ y $F'_j = F_i$.

IV) $T^{ij}(a) \cdot A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i$ y $F'_i = F_i + a \cdot F_j$.

Concluir que triangular por filas una matriz se corresponde con multiplicar a izquierda por matrices elementales. ¿Cómo se pueden obtener las matrices elementales a partir de la matriz identidad?

Ejercicio 22.

I) Sea $A = T^{12}(1) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Calcular A^{20} y $20 \cdot A$.

II) Dados $1 \leq i \neq j \leq 2$ y $P^{ij} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, calcular $(P^{ij})^{15}$ y $(P^{ij})^{16}$.

III) Sea $B = M_3(2) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Calcular B^{20} y $20 \cdot B$.

Ejercicio 23. Determinar si las siguientes matrices son inversibles. En caso afirmativo, exhibir sus inversas y escribirlas como producto de matrices elementales.

i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Ejercicio 24. Sean $\mathbb{k}$ un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{k}^n$ y $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$.

I) Probar que el sistema $A \cdot x = b$ tiene solución única si y sólo si A es inversible.

II) Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) la matriz A es inversible;
b) las filas de A son linealmente independientes;
c) las columnas de A son linealmente independientes.

Ejercicio 25. Sean $\mathbb{k}$ un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$. Probar que A es inversible si y sólo si existe $B \in \mathbb{k}^{n\times n}$ tal que $B \cdot A = I_n$ es inversible. Deducir que A es inversible si y sólo si existe $B \in \mathbb{k}^{n\times n}$ tal que $A \cdot B = I_n$ es inversible.