ÁLGEBRA LINEAL
PRIMER CUATRIMESTRE 2024
PRIMERA ENTREGA

Ejercicio 1. Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo y $\mathbb{V}$ un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Dada una transformación lineal $T\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) Existe una sucesión de subespacios $0 \neq S_1 \subsetneq S_2 \subsetneq \cdots \subsetneq S_n$ tales que $T(S_i) \subset S_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(II) Existe una base B de $\mathbb{V}$ tal que $|T|_B$ es triangular superior.

Solución. Haremos ambas implicaciones. Comenzamos probando que (i) implica (ii). Sean $0 \neq S_1 \subsetneq S_2 \subsetneq \cdots \subsetneq S_n$ subespacios de $\mathbb{V}$ tales que $T(S_i) \subset S_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Observemos que como cada contención es estricta, debe ser $\dim S_i < \dim S_{i+1}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Por otro lado $\dim S_1 > 0$, pues $S_1 \neq 0$, y $\dim S_n \leq n$, pues $S_n \subset \mathbb{V}$ y $\dim \mathbb{V} = n$. Tenemos entonces una cadena de enteros

$$0 < \dim S_1 < \dim S_2 < \cdots < \dim S_n \leq n,$$

lo cual sólo puede suceder[1] si $\dim S_i = i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Consideremos $B_i = \{v_1\}$ una base de S_1. Inductivamente, supongamos construida $B_i = \{v_1, \ldots, v_i\}$ una base de S_i y extendámosla a una base B_{i+1} de S_{i+1} agregando un vector v_{i+1}. De esta forma, por dimensión, el conjunto $B := B_n = \{v_1, \ldots, v_n\}$ debe ser una base de $\mathbb{V}$ y cada conjunto $B_i = \{v_1, \ldots, v_i\}$ es una base de S_i para cada i.

Fijemos $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $v_i \in S_i$ y $T(S_i) \subset S_i$, el vector $T(v_i)$ pertenece a S_i; este último se escribe entonces como combinación lineal de elementos de $B_i = \{v_1, \ldots, v_i\}$, de manera que existen $\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{ii} \in \mathbb{k}$ tales que

$$T(v_i) = \alpha_{1i} v_1 + \cdots + \alpha_{ii} v_i.$$

Luego

$$(T(v_i))_B = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ii} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{es decir,} \quad ((T(v_i))_B)_k = \begin{cases} \alpha_{ki} & \text{si } k \leq i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

En consecuencia la matriz $|T|_B = (T(v_1)_B | \cdots | T(v_n)_B)$ es triangular superior,

$$|T|_B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

[1] Si se quiere probar esto con toda formalidad –aunque no se pretenda para la presente entrega– indicamos cómo luego de la solución.

Probemos ahora que (ii) implica (i); sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ tal que $|T|_B$ es triangular superior. Como $(T(v_i))_B$ es la i-ésima columna de $|T|_B$, todas sus coordenadas mayores a i son cero; por lo tanto, $T(v_i)$ es una combinación lineal de los primeros i vectores de B: existen $\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{ii} \in \mathbb{k}$ tales que

$$(\lozenge) \qquad T(v_i) = \alpha_{1i}v_1 + \cdots + \alpha_{ii}v_i.$$

Veamos que los subespacios $S_i := \langle v_1, \dots, v_i \rangle$ cumplen lo pedido. Por construcción $S_1 \neq 0$ y $S_i \subset S_{i+1}$. Además, esta última inclusión es estricta: el conjunto B es linealmente independiente y en particular $\dim S_i = i$ para cada i; no pueden ninguno de estos subespacios ser iguales entre sí.

Por ultimo veamos que $T(S_i) \subset S_i$. Como $S_i = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$, se sigue que $T(S_i) = \langle T(v_1), \dots, T(v_i) \rangle$ y es suficiente entonces probar que $T(v_j) \in S_i$ para cada $j \leq i$. Efectivamente, usando ($\lozenge$) sabemos que $T(v_j) \in S_j$ para cada j, así que si $j \leq i$ entonces $T(v_j) \in S_j \subset S_i$. Esto concluye la demostración. □

Lema 1. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Si

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq n,$$

entonces $a_i = i$ para cada i.

Demostración. Definimos $a_0 := 0$. Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ tenemos $a_j > a_{j-1}$; luego $a_j = a_{j-1} + k_j$ con $k_j \in \mathbb{N}$. Inductivamente es

$$a_j = k_1 + \cdots + k_j.$$

Afirmamos que $k_j = 1$ para todo j, de lo cual usando la ecuación anterior se deducirá que $a_j = j$. Tenemos

$$n \geq a_n = \sum_{i=1}^{n} k_i = k_j + \sum_{1 \leq i \leq n,\, i \neq j} k_i \geq k_j + \sum_{1 \leq i \leq n,\, i \neq j} 1 = k_j + n - 1.$$

Luego $k_j \leq 1$; como $k_j \in \mathbb{N}$, debe ser $k_j = 1$. Esto termina de mostrar que $a_i = i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. □