Cálculo Avanzado

Segundo cuatrimestre - 2024

Práctica 0

Repaso

Ejercicio 1. Mostrar que en un cuerpo totalmente ordenado y arquimediano las siguientes afirmaciones son equivalentes;

(a) toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente;

(b) toda sucesión de Cauchy es convergente;

(c) si $(I_n)_{n\geq 1}$ es un encaje de intervalos cerrados cuyas longitudes tienden a cero, entonces existe un único $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$;

(d) todo conjunto acotado superiormente y no vacío tiene supremo;

(e) toda sucesión monótona y acotada superiormente tiene supremo.

¿Dónde se usa la arquimedianidad?

Ejercicio 2. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $r, s \in \mathbb{Q}$. Probar que:

(I) si $y - x > 1$, entonces existe un entero k tal que $x < k < y$.

(II) si $x < y$, entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.

(III) si $r > s$, entonces existe un número irracional entre r y s.

(IV) si $x < y$, entonces existe un número irracional entre x e y.

Ejercicio 3. Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ estrictamente decreciente tal que $q_n \geq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} q_n = x$.

Ejercicio 4. Sean $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ y $\varepsilon > 0$. Mostrar que existe $q = (q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{Q}^m$ tal que $\|x - q\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i - q_i)^2} < \varepsilon$.

Ejercicio 5. Probar que $A = \left\{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ es denso en $\mathbb{R}$. Analizar la misma situación para el conjunto $A_b = \left\{\frac{m}{b^n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ para cada $b \in \mathbb{R}_{>0}$.

Ejercicio 6. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tres sucesiones de números reales tales que:

(a) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n \geq n_0$;

(b) los límites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existen y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$.

Probar que $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$.

Ejercicio 7. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales acotada.

(I) Probar que $\alpha = \limsup a_n$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ se satisfacen las siguientes condiciones:

a) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < \alpha + \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$;

b) para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m \geq n$ tal que $a_m > \alpha - \varepsilon$.

(II) Demostrar que $\alpha = \limsup a_n$ si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

a) existe una subsucesión $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = \alpha$;

b) si $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión convergente, entonces $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq \alpha$.

Ejercicio 8. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Probar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ si y sólo si $\limsup a_n = \liminf a_n = \ell$.

Ejercicio 9. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones reales acotadas. Probar que:

(I) $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$.

(II) si $a_n, b_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\limsup(a_n \cdot b_n) \leq \limsup a_n \cdot \limsup b_n$.

(III) si $c > 0$, entonces $\limsup(c \cdot a_n) = c \cdot \limsup a_n$.

Enunciar y probar resultados análogos para $\liminf$.

Ejercicio 10. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$.

(I) Probar que

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf {a_n}^{1/n} \leq \limsup {a_n}^{1/n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(II) Deducir que si existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in \mathbb{R}$, entonces coincide con $\lim_{n\to\infty} {a_n}^{1/n}$, y que lo mismo sucede si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$.

(III) Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n}$.

(IV) Sea

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{si } n = 2k-1, \\ \frac{1}{3^k} & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

Calcular los límites superiores e inferiores del ítem (i) para esta sucesión. Decidir si los límites del ítem (ii) existen y, de ser así, calcularlos.

(V) Sea

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{si } n = 2k-1, \\ \frac{1}{4^{k-1}} & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

Calcular los límites superiores e inferiores del ítem (i) para esta sucesión. Decidir si los límites del ítem (ii) existen y, de ser así, calcularlos.

Ejercicio 11. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $(x_i)_{i\geq 0}, (y_j)_{j\geq 0}$ desarrollos de estos números en base $b > 1$. Se supone que el desarrollo de y es infinito, es decir, que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $i > n$ con $y_i > 0$.

(I) Probar que si $x_i = y_i$ para todo $i \leq n-1$ y $x_n < y_n$, entonces $x < y$.

(II) Deducir que el orden entre x e y es el mismo que el de los primeros términos en los que difieren sus desarrollos.

(III) Manteniendo las hipótesis del ítem (i), probar que todo $z \in [x, y]$ tiene un desarrollo $(z_i)_{i\geq 0}$ en base b con $z_i = x_i = y_i$ para todo $i \leq n-1$.

Ejercicio 12. Hallar el desarrollo en base 2, 3 y 16 de los números 2,25; 10,7; 27 y 255.

Ejercicio 13. Demostrar las siguientes igualdades de conjuntos:

(I) $B \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(B \setminus A_i)$.

(II) $B \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(B \setminus A_i)$.

(III) $\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B) = B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$.

Ejercicio 14. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Hallar una familia de conjuntos $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones:

a) $B_n \subseteq A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;

b) $B_k \cap B_j = \emptyset$ si $k \neq j$;

c) $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Ejercicio 15. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función y sean A y B subconjuntos de X.

(I) Demostrar que $f(A\cup B) = f(A) \cup f(B)$ y $f(A\cap B) \subseteq f(A)\cap f(B)$, y dar un ejemplo en el que $f(A\cap B) \neq f(A)\cap f(B)$.

(II) Generalizar al caso de uniones e intersecciones infinitas.

Ejercicio 16. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Consideremos subconjuntos $A \subseteq X$ y $B, B_1, B_2 \subseteq Y$. Demostrar que:

(I) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

(II) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

(III) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

(IV) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(V) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Generalizar (iv) y (v) al caso de uniones e intersecciones infinitas.

Ejercicio 17. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que f es suryectiva si y sólo si $f(f^{-1}(B)) = B$ para todo $B \subseteq Y$.

Ejercicio 18. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

a) f es inyectiva;

b) $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$ para todo $A, B \subseteq X$;

c) $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subseteq X$;

d) $f(A)\cap f(B) = \emptyset$ para todo par de subconjuntos $A, B \subset X$ tales que $A \cap B = \emptyset$;

e) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ para todo $B \subseteq A \subseteq X$.

Ejercicio 19. Sean X un conjunto y $A \subset X$. La *función característica* $\chi_A \colon X \longrightarrow \{0,1\}$ *de* A se define como

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Dados $S, T \subset X$, probar que:

(I) $\chi_{S\cap T} = \chi_S \cdot \chi_T$;

(II) $\chi_{S\cup T} = \chi_S + \chi_T - \chi_{S\cap T}$;

(III) $\chi_{X\setminus S} = 1 - \chi_S$.