Álgebra II

Segundo cuatrimestre - 2023

Práctica 8

Introducción a la homología

---

1. Decidir si las siguientes sucesiones de A-módulos son complejos y, en caso afirmativo, calcular su homología.

(I) $A = \mathbb{Z}$, $C_i = 0$ para los $i < 0$, $C_i = \mathbb{Z}_8$ para los $i \geqslant 0$, $d_i : C_i \to C_{i-1}$ dados por $d_i(x) = 2x$.

(II) igual que el inciso anterior, pero con $d_i(x) = 4x$.

(III) $A = \mathbb{R}$,

$$C: \quad \cdots \to \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \to \cdots,$$

$d_n : C_n \to C_{n-1}$ dados por $d_{2i}(p) = p(0)$ y $d_{2i+1}(p) = Xp$.

(IV) $A = \mathbb{Z}$,

$$C: \quad \cdots \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \cdots,$$

$d_n : C_n \to C_{n-1}$ dados por

$$d_{2i}((a_1, a_2, a_3, \dots)) = (0, a_2, a_3, \dots) \quad \text{y} \quad d_{2i+1}((a_1, a_2, a_3, \dots)) = (5a_1, 0, 0, \dots).$$

(V) $A = \mathbb{Z}$,

$$C: \quad \cdots \to \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\mu_3} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\mu_2} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\mu_2} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\mu_3} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\mu_2} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\mu_2} \mathbb{Z}_4 \to \cdots$$

con $\mu_k(x) = kx$.

(VI) $A = \mathbb{Z}$,

$$C: \quad \cdots \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \cdots$$

con $d_{2i}(x) = nx$, $d_{2i-1}(x) = 0$.

2. Sean (C_*, d_*) y (C'_*, d'_*) dos complejos de A-módulos, y sea f un morfismo de complejos entre ellos. Probar que f induce un morfismo en las homologías, es decir, una familia de funciones $\bar{f}_i : H_i(C) \to H_i(C')$.

3. Sea A un anillo y M, N dos A-módulos a izquierda. Notamos $\underline{M}$ al complejo

$$\cdots \to 0 \to 0 \to \overbrace{M}^{0} \to 0 \to 0 \to \cdots$$

Pruebe que si $f\colon M \to N$ es un morfismo de módulos, entonces induce un morfismo de complejos $\underline{f}\colon \underline{M} \to \underline{N}$.

4 (Resoluciones)**.** Sea M un A-módulo a izquierda. Una *resolución* de M es un complejo de cadenas $(P_k, d_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ junto con un morfismo $P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M$ tal que

$$\cdots \longrightarrow P_{k+1} \xrightarrow{d_k} P_k \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

es exacto. Notamos $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$; decimos que ε es un morfismo de *aumentación* y que $(*)$ es el complejo aumentado de $P_\bullet$. La resolución se dice proyectiva (resp. libre, playa) si cada módulo P_k es proyectivo (resp. libre, playo). Pruebe las siguientes afirmaciones:

(I) Un complejo $(P_\bullet)_{\bullet \geqslant 0}$ junto con un morfismo $P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M$ es una resolución de M si y sólo si el morfismo $P_\bullet \to \underline{M}$ inducido por ε es un cuasi-isomorfismo

(II) Todo A-módulo admite una resolución libre (en particular, tanto proyectiva como playa).

(III) Si A es noetheriano a izquierda y M es un módulo finitamente generado, entonces existe una resolución de M por módulos libres finitamente generados.

(IV) Si $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ y $Q_\bullet \xrightarrow{\varepsilon'} N$ son resoluciones proyectivas, entonces todo morfismo de A-módulos $f\colon M \to N$ se extiende a un morfismo de complejos aumentados:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_k \arrow[r] \arrow[d, "f_k"] & P_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{k-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_k \arrow[r] & Q_{k-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(V) Existen resoluciones proyectivas con finitos términos no nulos en los siguientes casos:

(I) un A-módulo proyectivo para cualquier anillo A;

(II) el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$;

(III) dado un cuerpo k, el $k[X]$-módulo $S = k[X]/\langle X \rangle$.

5 (Lema de la serpiente)**.** Considerar el siguiente diagrama de A-módulos de filas exactas.

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "a"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 &
\end{tikzcd}$$

Probar que:

(I) El diagrama induce una sucesión exacta

$$\ker a \to \ker b \to \ker c \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker} a \to \operatorname{coker} b \to \operatorname{coker} c.$$

(II) Si $M_1 \to M_2$ es monomorfismo, también lo es $\ker a \to \ker b$.

(III) Si $N_2 \to N_3$ es epimorfismo, también lo es $\operatorname{coker} b \to \operatorname{coker} c$.

6. Probar que una sucesión exacta corta de complejos $0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$ induce una *sucesión exacta larga* de homología

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(C) \xrightarrow{f_n} H_n(D) \xrightarrow{g_n} H_n(E) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(C) \xrightarrow{f_{n-1}} H_{n-1}(D) \xrightarrow{g_{n-1}} \cdots$$

Sugerencia: *utilice el lema de la serpiente.*

7. Dados dos complejos de A-módulos $C = (C_i, d_i)$ y $C' = (C'_i, d'_i)$, probar que $C \oplus C' = (C_i \oplus C'_i, d_i \oplus d'_i)$ es un complejo, y que $H_*(C \oplus C') = H_*(C) \oplus H_*(C')$.

8. Dados dos morfismos de complejos $f, g : C \to C'$, una *homotopía* $\varphi : f \simeq g$ es una familia de morfismos $\varphi : C_n \to C'_{n+1}$ tales que $d'_{n+1}\varphi_n + \varphi_{n-1}d_n = f_n - g_n$ para todo n. Decimos que f y g son homotópicos si existe una homotopía entre ellos. Probar que:

(I) La relación $\simeq$ es de equivalencia en el conjunto de morfismos de C en C'.

(II) Si $f \simeq g$, entonces inducen el mismo morfismo en la homología.

(III) Si $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ y $Q_\bullet \xrightarrow{\varepsilon'} N$ son resoluciones proyectivas y $f\colon M \to N$ un morfismo de módulos, entonces todas las extensiones de f a $P_\bullet \to Q_\bullet$ son homotópicas entre sí.

(IV) Si M es un A-módulo, dos resoluciones proyectivas de M son homotópicamente equivalentes.

9 (Homología de un grafo)**.** Un *grafo* $G = (V, E)$ es un conjunto finito de *vértices* V y una familia E de subconjuntos de V de cardinal dos que llamamos *aristas*. Pensamos a $e = \{v, w\} \in E$ como un segmento que une v con w.

Decimos que G es *conexo* si para cada $v, w \in V$ existen $e_1, \ldots, e_k \in E$ tales que $v \in e_1$, $w \in e_k$ y $e_i \cap e_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Una orientación en G consiste de un par de funciones $r, s\colon E \to V$ tales que $e = \{r(e), s(e)\}$ para cada $e \in E$. Pensamos que, para esta orientación, el segmento e es una flecha que comienza en $s(e)$ y termina en $r(e)$.

La homología $H_*(G)$ de un grafo (orientado) G es la homología del complejo

$$0 \to \mathbb{Z}^E \xrightarrow{d} \mathbb{Z}^V \to 0, \qquad d(e) = r(e) - s(v).$$

(I)† Pruebe que la homología no depende de la orientación elegida.

(II) Calcule la homología de los siguientes grafos orientados:

$$G_1 = \bullet_v \qquad \bullet_w\ , \qquad G_2 = \bullet_v \xrightarrow{e} \bullet_w\ , \qquad G_3 = \begin{tikzcd} & \bullet_z \arrow[dl, "g"'] & \\ \bullet_x \arrow[rr, "e"'] & & \bullet_y \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd} .$$

(III) Pruebe que G es conexo si y sólo si $H_0(G) \cong \mathbb{Z}$, y que en tal caso $H_1(G)$ es libre de rango $|E| - |V| + 1$.