Álgebra II

Segundo cuatrimestre - 2023
Práctica 7
Módulos - Segunda Parte

Anillos y módulos noetherianos

1.1 (Anillos de matrices)**.** Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que un anillo A es noetheriano a izquierda si y sólo si $M_n(A)$ es noetheriano a izquierda.

1.2 (Extensinones finitas de anillos)**.** Sea B un subanillo de un anillo A tal que A es finitamente generado como B-módulo a izquierda. Probar que si B es noetheriano a izquierda, entonces A es noetheriano a izquierda.

1.3. Sea A un anillo y M un A-módulo noetheriano a izquierda. Pruebe que un epimorfismo A-lineal $f\colon M \to M$ es un isomorfismo.

1.4. Probar que un k-espacio vectorial V es noetheriano si y sólo si $\dim_k V < \infty$.

1.5. Sea $d \in \mathbb{Z}$ y sea $\sqrt{d} \in \mathbb{C}$ una raíz cuadrada de d. Probar que el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es noetheriano.

Módulos libres y finitamente generados

2.1. Sean A un anillo y G un grupo. Probar que $A[X]$ y $A[G]$ son A-módulos libres.

2.2. Sea A un anillo conmutativo.

(I) Probar que cualquier subconjunto $\{a_1, a_2\} \subseteq A$ es linealmente dependiente. Concluir que si un ideal no nulo $I \subseteq A$ es un A-módulo libre, entonces $I \cong A$ como A-módulo e I es un ideal principal.

(II) Sea $A = \mathbb{Z}[X]$. Probar que $I = \langle 2, X\rangle$ no es un A-módulo libre.

2.3. Sea A un dominio íntegro y sean $v_1, \dots, v_n \in A^n$. Sea $M \in M_n(A)$ la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \dots, v_n$. Probar las siguientes afirmaciones:

(I) El conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si y solo si $\det M \neq 0$.

(II) El conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un sistema de generadores si y solo si $\det M$ es una unidad.

2.4. Sean A un anillo conmutativo, $S \subseteq A$ un conjunto multiplicativamente cerrado y M un A-módulo. Probar que:

(I) Si M es libre, entonces M_S es libre como A_S-módulo.

(II) Si M es finitamente generado, entonces M_S es finitamente generado como A_S-módulo.

Módulos proyectivos e inyectivos

3.1 (Módulos duales). Para cada A-módulo a izquierda M, sea $M^* = \hom_A(M, A)$ con la estructura de A-módulo a derecha inducida por la estructura de A-módulo a derecha de A. Mostrar que si M es proyectivo y finitamente generado entonces M^* también lo es.

3.2 (Bases duales). Sean A un anillo y P un A-módulo a izquierda. Una *base dual* para P es una familia $\{(x_i, f_i)\}_{i\in I}$ donde $(x_i, f_i) \in P \times P^*$ para cada $i \in I$, que cumple las siguientes condiciones:

(a) para todo $x \in P$ el conjunto $\{i \in I : f_i(x) \neq 0\}$ es finito, y

(b) para todo $x \in P$ vale la igualdad $x = \sum_{i\in I} f_i(x)x_i$.

Notar que (a) implica que la suma en (b) tiene sentido.

(I) Mostrar que un A-módulo P es proyectivo si y solo si posee una base dual.

(II) Mostrar que un A módulo P es proyectivo y finitamente generado si y solo si posee una base dual finita.

3.3 (Proyectivos finitamente generados como idempotentes). Sea R un anillo y P un R-módulo a derecha proyectivo y finitamente generado. Pruebe que existen $n \in \mathbb{N}$ y $A \in M_n(R)$ tales que $A^2 = A$ y $P \cong \{x \in R^n : Ax = 0\}$ como R-módulos a derecha.

3.4. Sea A un grupo abeliano finito.

(I) Probar que A no es un $\mathbb{Z}$-módulo proyectivo.

(II) Probar que A no es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

3.5. Probar que $\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, pero $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sí lo son.

3.6. Sea A un dominio íntegro y sea K su cuerpo de fracciones.

(I) Probar que K es un A-módulo inyectivo.

(II) Probar que todo K-módulo es un A-módulo inyectivo.

3.7. Probar que si A es un anillo de división entonces todo A-módulo es inyectivo y proyectivo.

Producto tensorial

4.1. Probar que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

4.2. Sean A un anillo y M_A y ${}_AN$ A-módulos. Mostrar que $M \otimes_A N$ es un $\mathrm{End}_A(M)$-$\mathrm{End}_A(N)$-bimódulo.

4.3. Sean A y B anillos y M_A, ${}_AN_B$ y ${}_BP$ módulos. Mostrar que hay un isomorfismo natural

$$M \otimes_A (N \otimes_B P) \cong (M \otimes_A N) \otimes_B P.$$

4.4. Sean A un anillo conmutativo, $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal y M un A-módulo. Muestre que hay un isomorfismo natural $A/\mathfrak{a} \otimes_A M \cong M/\mathfrak{a}M$.

4.5 (Extensión de escalares). Sea $\varphi\colon A \to B$ un morfismo de anillos. Consideremos a φ^*B como A-módulo a izquierda via la construcción de restricción de escalares (Ejercicio 5 de la práctica 6).

(I) Pruebe que si N es un A-módulo a derecha libre (resp. proyectivo, finitamente generado) entonces $N \otimes_A \varphi^*B$ lo es como B-módulo a derecha.

(II) Pruebe que para cada A-módulo a derecha N y B-módulo a derecha M se tiene un isomorfismo de grupos abelianos

$$\hom_B(N \otimes \varphi^* B, M) \cong \hom_A(N, \varphi^* M).$$

4.6. Sean A un anillo, M_A y ${}_A N$ módulos y supongamos que $M = \sum_{i \in I} M_i$ es suma de una familia de submódulos $\{M_i\}_{i \in I}$. Probar que si $M_i \otimes_A N = 0$ para todo $i \in I$, entonces $M \otimes_A N = 0$.

4.7. Sea $(N_i)_{i \in I}$ una familia de A-módulos a izquierda y M un módulo a derecha. Probar que

$$M \otimes_A \bigoplus_{i \in I} N_i \cong \bigoplus_{i \in I} M \otimes_A N_i.$$

4.8. Sean A un anillo y M un A-módulo playo. Probar que si $N \subseteq M$ es un sumando directo, entonces N es playo.

4.9. Probar que si A es un anillo conmutativo y M, N son A-módulos playos, entonces $M \otimes_A N$ es un A-módulo playo.

4.10. Sean A un anillo y $S \subseteq A$ multiplicativamente cerrado. Probar que:

(I) Si M es un A-módulo izquierdo, entonces hay un isomorfismo $A_S \otimes_A M \cong M_S$.

(II) El A-módulo derecho A_S es playo.

4.11. Sea A un anillo. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) Todo A-módulo a izquierda es playo.

(II) Todo A-módulo a derecha es playo.

(III) Para todo $a \in A$, existe $x \in A$ tal que $a = axa$.

(IV) Todo ideal izquierdo principal está generado por un idempotente.

(V) Todo ideal derecho principal está generado por un idempotente.

4.12 (Criterio local de platitud)**.** Sea A un anillo conmutativo y M un A-módulo. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) M es playo;

(II) para cada $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, $M_\mathfrak{p}$ es un $A_\mathfrak{p}$-módulo playo;

(III) para cada ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$, $M_\mathfrak{m}$ es un $A_\mathfrak{m}$-módulo playo.

4.13 (Producto tensorial de álgebras)**.** Sea k un cuerpo y sean A y B k-álgebras. Mostrar que $A \otimes_k B$ es un álgebra de forma tal que el producto está dado por

$$a \otimes b \cdot a' \otimes b = (aa') \otimes (bb').$$

4.14. Sean k un cuerpo, A una k-álgebra y $n, m \in \mathbb{N}$. Mostrar que hay isomorfismos naturales de álgebras:

(I) $A[X] \cong k[X] \otimes_k A$;

(II) $M_n(A) \cong M_n(k) \otimes_k A$;

(III) $M_{nm}(A) \cong M_n(A) \otimes_k M_m(A)$

Torsión, divisibilidad y módulos sobre un DIP

5.1. Clasificar a menos de isomorfismo los grupos abelianos de orden 18, 45, 100 y 180.

5.2. Sean A un dominio de ideales principales y M un A-módulo finitamente generado. Mostrar que M es de torsión si y sólo si $\hom_A(M, A) = 0$.

5.3. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Encontrar todos los grupos abelianos de orden p^3 y p^4.

5.4. Sean G un grupo abeliano finito y $p \in \mathbb{N}$ un número primo que divide al orden de G. Probar que el número de elementos de orden p de G es coprimo con p.

5.5. Hallar los factores invariantes de los siguientes grupos abelianos:

(I) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_9$;

(II) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{14}$;

(III) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}$;

(IV) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$.

5.6. Hallar los factores invariantes de un grupo abeliano G de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.

5.7. Sean $A = \mathbb{R}[x]/\langle (x^2+1)^2 \rangle$ y $J = \langle x^2+1 \rangle \leqslant A$. Probar que todo A–módulo finitamente generado es isomorfo a $A^m \oplus (A/J)^n$ para un único par de enteros no negativos (m, n).