Álgebra II

Segundo cuatrimestre - 2023

Práctica 6

Módulos – Primera parte

---

1. Sean A un anillo, $n \geqslant 1$ y $M \in A^{m\times n}$. Mostrar que la multiplicación matricial da un morfismo de A-módulos (a derecha):

$$f : x \in A^n \mapsto M \cdot x \in A^m$$

2. Sean N y M dos $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales. Mostrar que una función $f : N \to M$ es un morfismo de $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales si y sólo si es un morfismo de grupos abelianos.

3. Sean A un anillo y N, M dos A-módulos.

(I) Mostrar que $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es un grupo abeliano con suma dada por

$$(f + g)(m) := f(m) + g(m), \qquad (\forall f,\ g \in \mathrm{Hom}_A(M, N), m \in M).$$

(II) Sea $Z(A)$ el centro de A. Definimos una operación

$$Z(A) \times \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N)$$

poniendo

$$(a \cdot f)(m) = f(am), \qquad (\forall f \in \mathrm{Hom}_A(M, N),\ a \in Z(A),\ m \in M).$$

Mostrar que esto hace de $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ un $Z(A)$-módulo.

(III) Mostrar que para todo A-módulo M hay un isomorfismo de $Z(A)$-módulos $\mathrm{Hom}_A(A, M) \to M$ dado por la evaluación en 1.

4. Sean A, B y C anillos y sean M un (B, A)-bimódulo y N un (C, A)-bimódulo.

(I) Mostrar que el grupo abeliano $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ posee una única estructura de (C, B)-bimódulo tal que

$$(c \cdot f \cdot b)(m) = cf(bm), \qquad \forall b \in B,\ c \in C,\ \in M.$$

(II) Sea S un A-módulo a izquierda. Considerando a A como (A, A)-bimódulo, mostrar que hay un isomorfismo de A-módulos a izquierda $\mathrm{Hom}_A(A, S) \cong S$.

5 (Restricción de escalares)**.** Sea $\phi : A \to B$ un morfismo de anillos.

(I) Mostrar que si definimos un producto $A \times B \to B$ poniendo

$$a \cdot b = \phi(a)b$$

dotamos a B de una estructura de A-módulo a izquierda. De forma similar podemos obtener una estructura de A-módulo a derecha y de A-bimódulo sobre B.

(II) Sea M un B-módulo a izquierda. Mostrar que el producto $A \times M \to M$ dado por $a \cdot m = \phi(a)m$ hace de M un A-módulo a izquierda. Lo notamos $\phi^*(M)$.

(III) Si $f : M \to N$ es un morfismo de B-módulos a izquierda, entonces $f : \phi^*(M) \to \phi^*(N)$ es un morfismo de A-módulos a izquieda. Lo notamos $\phi^*(f)$.

(IV) Si M y N son B-módulos a izquierda, la aplicación

$$\phi^* : f \in \mathrm{Hom}_B(M, N) \mapsto \phi^*(f) \in \mathrm{Hom}_A(\phi^*(M), \phi^*(N))$$

es un morfismo de grupos abelianos.

(V) Si M, N y P son B-módulos a izquierda y $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son morfismos de B-módulos, entonces

$$\phi^*(g \circ f) = \phi^*(g) \circ \phi^*(f).$$

En particular, la aplicación $\phi^* : \mathrm{End}_B(M) \to \mathrm{End}_A(\phi^*(M))$ es un morfismo de anillos.

6. Sean A un anillo, M un A-módulo a derecha y $B = \mathrm{End}_A(M)$ el anillo de endomorfismos de M. Mostrar que M es un B-módulo a izquierda y que con esa estructura resulta de hecho un (B, A)-bimódulo.

7 (Los funtores Hom)**.** Sea A un anillo.

(I) Sea $f : M \to M'$ un morfismo de A-módulos a izquierda. Para cada A-módulo a izquierda P definimos aplicaciones

$$f_P^* : h \in \mathrm{Hom}_A(M', P) \mapsto h \circ f \in \mathrm{Hom}_A(M, P)$$

y

$$f_*^P : h \in \mathrm{Hom}_A(P, M) \mapsto f \circ h \in \mathrm{Hom}_A(P, M').$$

Mostrar que f_P^* y f_*^P son morfismos de grupos abelianos.

(II) Sean $f : M \to M'$ y $g : M' \to M''$ morfismos de A-módulos. Entonces para cada A-módulo a izquierda P vale que

$$f_P^* \circ g_P^* = (g \circ f)_P^*$$

y

$$g_*^P \circ f_*^P = (g \circ f)_*^P.$$

(III) Una sucesión de A-módulos a izquierda

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

es exacta si y sólo si la sucesión de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*^N} \mathrm{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*^N} \mathrm{Hom}_A(N, M'')$$

es exacta para todo A-módulo a izquierda N. ¿Hay un enunciado similar que involucre a los morfismos f_N^* y g_N^*?

(IV) ¿Es cierto que si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de A-módulos a izquierda entonces

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*^N} \mathrm{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*^N} \mathrm{Hom}_A(N, M'') \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos?

8. Probar que un A-módulo M es simple si y sólo si para todo $m \in M \setminus 0$ se tiene que $Am = M$.

9 (Lema de Schur)**.** Sea A un anillo y $f\colon M \to N$ un morfismo de A-módulos. Probar que

(I) Si M es simple, entonces f es o bien nula o bien inyectva.

(II) Si N es simple, entonces f es o bien nula o bien sobreyectiva.

(III) Si M y M son simples, entonces f es o bien nula o bien un isomorfismo.

(IV) Probar que si M es un A-módulo simple, entonces $\mathrm{End}_A(M)$ es un anillo de división.

10. Sean k un cuerpo, V un k-espacio vectorial y $f \in \mathrm{End}_k(V)$. Mostrar que existe una única estructura de $k[X]$-módulo a izquierda sobre V para la cual $k \subseteq k[X]$ actúa por multiplicación escalar y

$$X \cdot v = f(v), \qquad (\forall\, v \in V).$$

11 (Anuladores)**.** Sean A un anillo y M un A-módulo a izquierda. Probar que el conjunto $\mathrm{Ann}(M) = \{a \in A : am = 0\ (\forall m \in M)\}$ es un ideal a izquierda de A. Si $\mathrm{Ann}(M) = 0$, decimos que M es un A-módulo *fiel*. Dar ejemplos de módulos fieles.

12. Probar que $\mathbb{Q}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre.

13. Probar que todo módulo finitamente generado posee un sistema de generadores minimal.

14. Mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un sistema de generadores minimal de $\mathbb{Z}$ de cardinal n.

15. Probar que un A-módulo es finitamente generado si y sólo si es isomorfo a un cociente de A^n para algún $n \in \mathbb{N}$.

16. Probar que si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\ f\ } M \xrightarrow{\ g\ } M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A-módulos a izquierda y tanto M' como M'' son finitamente generados, entonces M es finitamente generado.

17. Sean A un anillo y M un A-módulo a izquierda finitamente generado. Dado un morfismo de A-módulos sobreyectivo $f : M \to A^n$, probar que $\ker f$ es finitamente generado.

18. Sean k un cuerpo y V un k-espacio vectorial de dimensión infinita. Probar que existe un $\mathrm{End}_k(V)$-módulo M no nulo tal que $M \cong M \oplus M$.

19. Sea

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\gamma"] & N \arrow[r, "\delta"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo de flechas sólidas de A-módulos a izquierda en el que las filas son exactas.

(I) Probar la existencia de la flecha punteada que completa el diagrama preservando la conmutatividad.

(II) Probar que si f' y f son isomorfismos, entonces f'' es un isomorfismo.

20 (Lema de los cinco)**.** Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de A-módulos a izquierda con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_4"] & M_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

(I) Si α_1, α_2, α_4 y α_5 son isomorfismos, entonces α_3 es un isomorfismo.

(II) Si α_1 es sobreyectivo y α_2 y α_4 son inyectivos, entonces α_3 es inyectivo.

(III) Si α_5 es inyectivo y α_2 y α_4 son sobreyectivos, entonces α_3 es sobreyectivo.

21. Sean A un anillo conmutativo y $S \subseteq A$ un conjunto multiplicativamente cerrado. Probar que si $f : M \to N$ es un morfismo de A-modulos, entonces existe un único morfismo de A_S-módulos $f_S : M_S \to N_S$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_M"'] & N \arrow[d, "j_N"] \\
M_S \arrow[r, dashed, "\exists!\, f_S"] & N_S
\end{tikzcd}$$

22. Sean A un anillo conmutativo y $S \subseteq A$ un conjunto multiplicativamente cerrado. Dado M un A-módulo a izquierda finitamente generado, probar que $M_S = 0$ si y sólo si existe $s \in S$ tal que $sM = 0$. Dar un contraejemplo para esta equivalencia cuando M no es finitamente generado.

23 (Exactitud de la localización)**.** Sean A un anillo conmutativo y $S \subseteq A$ un conjunto multiplicativamente cerrado. Probar que si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A-módulos, entonces

$$0 \longrightarrow M'_S \xrightarrow{f_S} M_S \xrightarrow{g_S} M''_S \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A_S-módulos. En particular, si $M' \subseteq M$ es un submódulo de un A-módulo M, entonces M'_S puede ser considerado un submódulo de M_S.

24. Sean A un anillo conmutativo y $S \subseteq A$ un conjunto multiplicativamente cerrado. Probar que si M es un A-módulo libre entonces M_S es un A_S-módulo libre.

25. Sean A un anillo conmutativo y $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Sea M un A-módulo. Probar que:

(I) si P y Q son submódulos de M, entonces $(P + Q)_S = P_S + Q_S$ como submódulos de M_S;

(II) si P y Q son submódulos de M, entonces $(P \cap Q)_S = P_S \cap Q_S$;

(III) si P es un submódulo de M, entonces hay un isomorfismo canónico $(M/P)_S \cong M_S/P_S$.

26 (Propiedades locales)**.** Sea A un anillo conmutativo.

(1) Sea M un A-módulo. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) $M = 0$;

(II) $M_{\mathfrak{p}} = 0$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$; y

(III) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(2) Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) f es inyectivo;

(II) $f_{\mathfrak{p}}$ es inyectivo para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$;

(III) $f_{\mathfrak{m}}$ es inyectivo para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(3) Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) f es sobreyectivo;

(II) $f_{\mathfrak{p}}$ es sobreyectivo para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$; y

(III) $f_{\mathfrak{m}}$ es sobreyectivo para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(4) Consideremos una diagrama de A-módulos

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \qquad (\lozenge)$$

tal que $gf = 0$. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) La sucesión $(\lozenge)$ es exacta.

(II) Para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, la sucesión

$$0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{p}}} M''_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$$

obtenida de $(\lozenge)$ localizando en $\mathfrak{p}$ es exacta.

(III) Para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$, la sucesión

$$0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{m}}} M''_{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0$$

obtenida de $(\lozenge)$ localizando en $\mathfrak{m}$ es exacta.