Álgebra II

Segundo cuatrimestre - 2023

Práctica 5

Anillos – Segunda parte: álgebra conmutativa

Convención. En esta práctica la palabra anillo significará anillo conmutativo.

Ideales primos y maximales

1.1. Sean I y J ideales de un anillo A.

(I) Probar que $IJ = \{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n : a_i \in I, b_i \in J, n \in \mathbb{N}\}$ es un ideal.

(II) Probar que $IJ \subseteq I \cap J$.

(III) Probar que si $I + J = A$, entonces $IJ = I \cap J$.

1.2. Sean $I_1, \ldots, I_n$ ideales de un anillo A y sea $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal primo tal que $\bigcap_{i=1}^{n} I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

(I) Probar que existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tal que $I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

(II) Probar que si $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$, entonces $\mathfrak{p} = I_i$ para algún $1 \leqslant i \leqslant n$.

1.3. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Expresar a los siguientes ideales de $\mathbb{Z}$ como ideales principales:

$$\langle m, n\rangle, \qquad \langle m\rangle + \langle n\rangle, \qquad \langle m\rangle \cap \langle n\rangle, \qquad \langle m\rangle\langle n\rangle.$$

1.4. ¿Qué ideales de $\mathbb{Z}$ son primos? ¿Cuáles son maximales?

1.5. Sea I un ideal de un anillo A. Probar que

$$\sqrt{I} = \{a \in A : \text{existe } r \in \mathbb{N} \text{ tal que } a^r \in I\}$$

es un ideal de A, que denominamos el *radical* de I.

1.6. Sea $m \in \mathbb{Z}$. Expresar a $\sqrt{\langle m\rangle}$ como ideal principal.

1.7. Sea A un anillo. Probar que:

(I) un ideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ es primo si y sólo si $A/\mathfrak{p}$ es un dominio íntegro;

(II) un ideal $\mathfrak{m} \subseteq A$ es maximal si y sólo si $A/\mathfrak{m}$ es un cuerpo;

(III) un ideal maximal es primo.

1.8. Probar que si $f\colon A \to B$ es un morfismo de anillos, entonces para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de B se tiene que $f^{-1}(\mathfrak{p})$ es un ideal primo de A. ¿Es cierto esto si reemplazamos la palabra primo por maximal?

Dominios principales y de factorización única

Convención. Denotaremos por $\operatorname{Spec} A$ al conjunto de todos los ideales primos de un anillo A.

2.1. Probar que si A es un DIP, entonces todo ideal primo no nulo de A es maximal.

2.2. Probar que $\mathfrak{m} = \langle 3, Y^4 - X, Y^{12} - X^3 + Y - 1\rangle$ es un ideal maximal de $\mathbb{Z}[X, Y]$.

2.3. Sea k un cuerpo. Probar que si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} k[X]$, entonces existe $f \in \mathfrak{p}$ mónico e irreducible tal que $\mathfrak{p} = \langle f\rangle$. Recíprocamente, todo ideal principal generado por un polinomio mónico e irreducible es un ideal primo de $k[X]$.

2.4. Sea A un anillo y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Probar que:

(I) Si $B \subseteq A$ es un subanillo, entonces $B \cap \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$.

(II) Si $I \subseteq A$ es un ideal y $\pi : A \to A/I$ es la proyección canónica y $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A/I$, entonces $\pi^{-1}(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spec} A$.

(III) Si $I \subseteq A$ es un ideal tal que $\mathfrak{p} \supseteq I$, entonces $\mathfrak{p}/I \in \operatorname{Spec} A/I$.

2.5. Probar que si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X]$ y $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} \neq (0)$ entonces existe un número primo $p \in \mathbb{N}$ tal que o bien $\mathfrak{p} = \langle p\rangle$ o bien existe un polinomio $f \in \mathbb{Z}[X]$ mónico e irreducible sobre $\mathbb{Z}_p$ tal que $\mathfrak{p} = \langle p, f\rangle$.

2.6 (Nilradical)**.** Sea A un anillo. Un elemento $a \in A$ es *nilpotente* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$. El *nilradical de* A es el conjunto $\operatorname{Nil}(A) = \sqrt{0} = \{a \in A : a \text{ es nilpotente}\}$. Probar que

(I) $\operatorname{Nil}(A)$ es un ideal de A;

(II) $\operatorname{Nil}(A/\operatorname{Nil}(A)) = 0$;

(III) $\operatorname{Nil}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec} A} \mathfrak{p}$;

(IV) si $x \in \operatorname{Nil}(A)$, entonces $1 + x$ es inversible.

2.7 (Radical de Jacobson)**.** Sea A un anillo. El *radical de Jacobson de* A es la intersección $J(A)$ de todos los ideales maximales de A. Probar que $x \in J(A)$ si y sólo si para cada $y \in A$ se tiene que $1 - xy \in A^\times$.

2.8. Probar que el ideal $\langle 2, X\rangle \subseteq \mathbb{Z}[X]$ no es principal.

2.9 (Máximo común divisor)**.** Sea A un anillo. Un *máximo común divisor* de dos elementos $a, b \in A$ es un elemento $d \in A$ que cumple la siguiente propiedad:

$$c \mid d \qquad \Longleftrightarrow \qquad c \mid a \quad \text{y} \quad c \mid b.$$

Probar que:

(I) si el máximo común divisor de dos elementos existe, entonces es único salvo asociados;

(II) en un DFU, todo par de elementos tiene un máximo común divisor;

(III) en un DIP, el máximo común divisor entre dos elementos es una combinación lineal de los mismos;

(IV) el ítem anterior no es cierto si reemplazamos la palabra DIP por DFU;

(V) en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, los elementos 4 y $2 + 2\sqrt{-3}$ no tienen un máximo común divisor.

2.10. Probar que el ideal $\langle 2, 1+\sqrt{-5}\rangle \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ no es principal.

2.11. Sea $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Probar que 2, 3, $1+\sqrt{-5}$ y $1-\sqrt{-5}$ son irreducibles en A, no asociados entre sí. Notar que $6 = 2\cdot 3 = (1+\sqrt{-5})\cdot(1-\sqrt{-5})$ y concluir que A no es un DFU.

2.12 (Primos Gaußianos)**.** Probar que:

(I) pruebe que un primo $p \in \mathbb{Z}$ es congruente a 1 módulo 4 si y sólo si la ecuación

$$x^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

tiene solución.

(II) sea $x \in \mathbb{Z}$. Pruebe que si $a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ es un divisor de x, entonces $a - ib$ también lo es.

(III) probar que $a + bi$ es un elemento irreducible de $\mathbb{Z}[i]$ si y sólo si $a^2 + b^2$ es un primo de $\mathbb{Z}$ *no* congruente a 3 módulo 4.

(IV) probar que un entero $p \in \mathbb{Z}$ es un elemento irreducible de $\mathbb{Z}[i]$ si y sólo si es un primo de $\mathbb{Z}$ congruente a 3 módulo 4.

2.13 (Lema de Gauß)**.** Sea A un DFU. El *contenido* de un polinomio

$$f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in A[X]$$

es algún máximo común divisor de sus coeficientes. Notar que es único salvo asociados. Decimos que f es *primitivo* si su contenido es una unidad. Probar que:

(I) un polinomio $f = a\cdot X + b$ de grado 1 es irreducible si y sólo si es primitivo;

(II) el polinomio $XZ + XY + 1 \in \mathbb{Q}[X, Y, Z]$ es irreducible;

(III) todo polinomio $g \in A[X]$ puede escribirse como $a \cdot f$ con $a \in A$ el contenido de g y f un polinomio primitivo.

(IV) un polinomio $f \in A[X]$ es primitivo si y sólo si para cada elemento irreducible $p \in A$ se tiene que f no pertenece al núcleo del morfismo canónico $A[X] \to (A/(p))[X]$.

(V) si $f, g \in A[X]$ son dos polinomios primitivos, entonces $f \cdot g$ es primitivo.

(VI) el contenido de un producto es el producto de los contenidos de sus factores.

2.14. Sean $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ dos polinomios primitivos y $h \in \mathbb{Q}[X]$. Probar que si $f = h\cdot g$ entonces $h \in \mathbb{Z}[X]$.

Localización

3.1. Sean A un anillo y $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Probar las siguientes afirmaciones:

(I) si $S \subseteq A^\times$, entonces $A_S \cong A$;

(II) si $0 \in S$, entonces $A_S \cong 0$.

3.2. Sea $S = \{m \in \mathbb{Z} : m \neq 0\}$. Probar que $S \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es multiplicativamente cerrado y que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]_S \cong \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

3.3. Sean A un anillo y $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Notar que podemos pensar a S como un subconjunto multiplicativamente cerrado de $A[X]$ y probar que $A[X]_S \cong A_S[X]$.

3.4. Sean A un anillo y $f \in A$. Notamos A_f a la localización de A en el conjunto multplicativamente cerrado $\{f^i : i \in \mathbb{N}_0\}$. Probar que $A_f \cong A[X]/\langle Xf - 1\rangle$.

3.5. Sean A un DFU y $f \in A$, $f \neq 0$. Probar que A_f es un DFU. ¿Cuáles son los elementos irreducibles de A_f? Describir $\operatorname{Spec} A_f$ en términos de $\operatorname{Spec} A$.

3.6. Sean A un anillo y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Probar que $A \setminus \mathfrak{p}$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado. Notamos $A_\mathfrak{p}$ a la localización de A en $A \setminus \mathfrak{p}$. Desribir $\operatorname{Spec} A_\mathfrak{p}$ en términos de $\operatorname{Spec} A$.

3.7. Sean A un anillo y $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Consideremos un ideal $I \subseteq A$ y la proyección canónica $\pi \colon A \to A/I$. Probar que $(A/I)_{\pi(S)} \cong A_S/IA_S$.

3.8. Sean A un anillo y $S, T \subseteq A$ dos subconjuntos multiplicativamente cerrados. Consideremos el morfismo canónico $i \colon A \to A_S$ y sea $U = ST = \{st : s \in S, t \in T\}$. Probar que $U \subseteq A$ es multiplicativamente cerrado y que $(A_S)_{i(T)} \cong A_U$.

3.9. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $x_0 \in U$. Consideremos $S = \{f \in C(U) : f(x_0) \neq 0\}$.

(I) Probar que S es multiplicativamente cerrado.

(II) ¿Es inyectiva la aplicación canónica $C(U) \to C(U)_S$? De no serlo, describir su núcleo.

3.10. Supongamos que A es un dominio íntegro y sea $S \subseteq A$ multiplicativamente cerrado. Probar que la aplicación canónica $A \to A_S$ es inyectiva.

3.11. Sean A un anillo y $S \subseteq A$ multiplicativamente cerrado. Dar condiciones necesarias y suficientes para que la aplicación canónica $A \to A_S$ sea inyectiva.

3.12 (Cuerpo de fracciones)**.** Sea A un dominio íntegro. Su *cuerpo de fracciones* se define como $\mathsf{Frac}(A) = A_\mathfrak{p}$ con $\mathfrak{p} = (0)$.

(I) Probar que $\mathsf{Frac}(A)$ es cuerpo.

(II) Probar que si K es un cuerpo y $f \colon A \to K$ un morfismo de anillos inyectivo, entonces existe un único morfismo de anillos $\mathsf{Frac}(A) \to K$ que extiende a f.

(III) Calcule el cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}[i]$ y $\mathbb{C}[X]$.

3.13 (Ideales primos de $\mathbb{C}[X, Y]$)**.** Sea $I \subset \mathbb{C}[X, Y]$ un ideal primo no principal.

(I) Probar que existen dos polinomios coprimos $f, g \in I$.

(II) Use el algoritmo de división en $\mathsf{Frac}(\mathbb{C}[X])[Y]$ para probar que $\langle f, g\rangle \cap \mathbb{C}[X] \neq 0$.

(III) Probar que I contiene un polinomio de la forma $X - \alpha$ para cierto $\alpha \in \mathbb{C}$.

(IV) Concluya que los ideales primos de $\mathbb{C}[X, Y]$ son o bien los generados por un polinomio irreducible o bien los de la forma $\langle X - \alpha, Y - \beta\rangle$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.