Álgebra II

Segundo cuatrimestre - 2023
Práctica 4
Anillos

Definiciones y ejemplos

1.1. Probar que si A es un anillo en el que cada elemento no nulo tiene un inverso a izquierda, entonces A es un anillo de división.

1.2. Sean A un anillo y $a \in A$. Probar que si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que a^n es inversible, entonces a es inversible.

1.3 (Anillo opuesto)**.** Sea A un anillo y $*\colon A \times A \to A$ la operación definida por

$$a * b = ba, \qquad \forall a, b \in A.$$

Probar que $(A, +, *)$ es un anillo. Lo llamamos el *anillo opuesto de* A y lo denotamos por A^{op}.

1.4 (Endomorfismos)**.** Sea M un grupo abeliano. Probar que $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$, el conjunto de endomorfismos de grupo de M, es un anillo con la suma habitual de funciones y la composición como producto.

1.5 (Matrices)**.** Sean A un anillo y $n \in \mathbb{N}$. Probar que

$$M_n(A) = \{a = (a_{ij}) \in A^{n \times n}\}$$

es un anillo con la suma y el producto usual de matrices. Probar que $Z(M_n(A)) = Z(A) \cdot \mathrm{id}$. Deducir que $M_n(A)$ es conmutativo si y sólo si $n = 1$ y A es conmutativo.

1.6 (Anillos de funciones)**.** Sean A un anillo y X un conjunto no vacío. Probar que

$$A^X = \{f\colon A \to X : f \text{ función}\}$$

es un anillo con las operaciones definidas por:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

Caracterizar cuándo resulta conmutativo.

1.7 (Funciones continuas)**.** Sean $n \in \mathbb{N}$ y $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. Pruebe que

$$C(U) = \{f\colon U \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$$

es un subanillo de $\mathbb{R}^U$.

1.8 (Unidades)**.** Sea A un anillo. El *grupo de unidades de* A es el conjunto

$$A^\times = \{a \in A \mid a \text{ es inversible}\}$$

equipado con la multiplicación de A.

(I) Probar que $A^\times$ es un grupo.

(II) Hallar las unidades de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ y $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(III) Sea G un grupo. Probar que $1 \cdot G \subseteq \mathbb{Z}[G]^\times$. Dar un ejemplo en el que no valga la igualdad.

1.9 (Idempotentes)**.** Sea A un anillo. Un elemento $e \in A$ es *idempotente* si $e^2 = e$. Probar que:

(I) si $e \in A$ es idempotente, el subconjunto eAe con las operaciones de A restringidas es un anillo con unidad e. Decimos que eAe es la *esquina* de e en A.

(II) si $e \in A$ es idempotente, entonces $1 - e$ también lo es.

(III) si G un grupo finito y k un cuerpo en el que $|G| \neq 0$, entonces

$$e = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$$

es un idempotente en $k[G]$.

1.10. Probar que si X es un conjunto, entonces $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ es un anillo y todos sus elementos son idempotentes.

1.11 (Álgebras sobre un cuerpo)**.** Sea k un cuerpo. Una k-*álgebra* es un anillo A que es además un k-espacio vectorial y satisface $(\lambda \cdot a)b = a(\lambda \cdot b) = \lambda \cdot ab$ para todo $a, b \in A$ y $\lambda \in k$. Una *subálgebra* de A es un subanillo que es a su vez un subespacio vectorial.

(I) Pruebe que para todo $a \in A$ la aplicación $L_a \colon A \to A$, $L_a(x) = ax$ es una transformación lineal.

(II) Pruebe que $k[X]$, $k[X, X^{-1}]$, $M_n(k)$, $k[G]$ y k^X son k-álgebras y que que $C(U)$ es una $\mathbb{R}$-subálgebra de $\mathbb{R}^U$ para todo abierto $U \subset \mathbb{R}^n$.

Morfismos

2.1 (Característica)**.** Mostrar que, dado un anillo A, hay exactamente un morfismo de anillos $\chi_A \colon \mathbb{Z} \to A$. La *característica* de A es el único número $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $\ker(\chi_A) = n\mathbb{Z}$.

2.2. Mostrar que para cada anillo A hay a lo sumo un morfismo de anillos $\mathbb{Q} \to A$ y que puede no haber ninguno.

2.3. Probar que el único morfismo de anillos $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la identidad.

2.4. Sea k un cuerpo. Decidir en cada caso si existe un morfismo de anillos $f : A \to B$:

(I) $A = \mathbb{Z}[i]$ y $B = \mathbb{R}$;

(II) $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ y $B = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$;

(III) $A = k$ y $B = M_n(k)$;

(IV) $A = M_n(k)$ y $B = k$.

2.5 (Álgebras de dimensión finita)**.** Sea k un cuerpo. Un morfismo entre dos k-álgebras es un morfismo de anillos $f \colon A \to B$ que es además una transformación lineal. Probar que toda k-álgebra A de dimensión finita $n \in \mathbb{N}$ sobre k es isomorfa a una subálgebra de $M_n(k)$.

2.6. Sean A un anillo y G un grupo. Probar que la asignación

$$\begin{aligned} \hom(\mathbb{Z}[G], A) &\to \hom(G, \mathcal{U}(A)) \\ f &\mapsto f|_G \end{aligned}$$

es biyectiva.

Ideales

3.1. Sea $\mathcal{I}$ una familia de ideales a izquierda (resp. a derecha, biláteros) de un anillo A.

(I) Mostrar que $\bigcap_{I \in \mathcal{I}} I$ es un ideal a izquierda (resp. a derecha, bilátero) de A. Se trata del ideal más grande contenido en todos los ideales de $\mathcal{I}$.

(II) Mostrar que $\sum_{I \in \mathcal{I}} I$ es un ideal a izquierda (resp. a derecha, bilátero) de A. Se trata del ideal más chico que contiene a todos los ideales de $\mathcal{I}$.

3.2 (Ideales biláteros del anillo de matrices)**.** Sea A un anillo.

(I) Sean $I \subseteq A$ un ideal bilátero y $n \in \mathbb{N}$. Sea $M_n(I) \subseteq M_n(A)$ el subconjunto de las matrices de $M_n(A)$ que tienen todos sus coeficientes en I. Mostrar que $M_n(I)$ es un ideal bilátero de $M_n(A)$

(II) Probar que si $J \subseteq M_n(A)$ es un ideal bilátero, entonces existe un ideal bilátero $I \subseteq A$ tal que $J = M_n(I)$.

(III) Probar que si k es un cuerpo entonces $M_n(k)$ es simple, es decir, sus únicos ideales biláteros son 0 y $M_n(k)$.

3.3 (Ideales a izquierda del anillo de matrices)**.** Sea k un cuerpo.

(I) Sean $V \subseteq k^n$ un subespacio vectorial e I_V el subconjunto de $M_n(k)$ formado por todas las matrices cuyas filas pertenecen a V. Probar que I_V es un ideal a izquierda de $M_n(k)$.

(II) Probar que todo ideal a izquierda de $M_n(k)$ es de la forma I_V para algún subespacio V de k^n.

Cocientes

4.1. Probar que:

(I) $A[X]/\langle X-1\rangle \cong A$ para todo anillo A;

(II) $\mathbb{Z}[D_n]/\langle r^m - 1\rangle \cong \mathbb{Z}[D_m]$, si $m \mid n$;

(III) $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ si m y n son coprimos.

(IV) $M_n(A)/M_n(I) \cong M_n(A/I)$ para todo anillo A e ideal bilátero I.

4.2. Sean $I \subseteq A$ un ideal bilátero e $I[X] = \{a_0 + \cdots a_n X^n \in A[X] : n \in \mathbb{N}, a_i \in I \ \forall i \in \{0, \ldots, n\}\}$. Probar que $I[X]$ es un ideal bilátero de $A[X]$ y que $A[X]/I[X] \cong (A/I)[X]$.

4.3. Sea k un cuerpo. Sean G un grupo y $H \trianglelefteq G$ un subgrupo normal, y consideremos la proyección canónica $\pi : G \to G/H$. Mostrar que π determina un morfismo sobreyectivo de anillos $k[G] \to k[G/H]$ y describir su núcleo.