ÁLGEBRA II
SEGUNDO CUATRIMESTRE 2023
FUNTORES EXACTOS

Sean R y S dos anillos. Recordemos que un funtor $F\colon {}_R\mathsf{Mod} \to {}_S\mathsf{Mod}$ se dice *aditivo* si para cada $M, N \in {}_R\mathsf{Mod}$ la aplicación

$$\hom_R(M, N) \to \hom_S(FM, FN), \qquad f \mapsto Ff$$

es un morfismo de grupos abelianos.

Ejercicio 1. *Si F es un funtor aditivo, entonces $F(0) = 0$.*

Definición 2. Decimos que un funtor aditivo $F\colon {}_R\mathsf{Mod} \to {}_S\mathsf{Mod}$ es *exacto* si para cada sucesión exacta *corta*

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$$

la sucesión

$$0 \to FM' \xrightarrow{Fi} FM \xrightarrow{Fp} FM'' \to 0$$

es exacta.

El objetivo de esta nota es dar una caracterización equivalente de exactitud. En concreto, probaremos la siguiente proposición:

Proposición 3. *Sea $F\colon {}_R\mathsf{Mod} \to {}_S\mathsf{Mod}$ un funtor aditivo. Son equivalentes:*

(i) El funtor F es exacto;

(ii) Para cada sucesión exacta

$$M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$$

la sucesión

$$FM' \xrightarrow{Fi} FM \xrightarrow{Fp} FM''$$

es exacta.

La implicación (i) ⇒ (ii) requerirá resultados preliminares. Primero demostramos la recíproca.

Demostración de (ii) ⇒ (i). Dada una sucesión exacta corta

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0,$$

basta aplicar (ii) a las sucesiones exactas

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M,$$

$$M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'', \text{ y}$$

$$M \xrightarrow{p} M'' \to 0$$

para concluir que

$$0 \to FM' \xrightarrow{Fi} FM \xrightarrow{Fp} FM'' \to 0$$

es exacta. □

Nos concentramos ahora en la implicación faltante.

Lema 4. *Un funtor exacto* $F\colon {}_R\mathsf{Mod} \to {}_S\mathsf{Mod}$ *preserva monomorfismos y epimorfismos.*

Demostración. Sea $i\colon S \to M$ un monomorfismo. La sucesión

$$0 \to S \xrightarrow{i} M \to \operatorname{coker}(i) \to 0$$

es exacta, así que

$$0 \to FS \xrightarrow{Fi} FM \to F\operatorname{coker}(i) \to 0$$

lo es también. La exactitud en FS implica en particular que Fi es monomorfismo. Similarmente, si $p\colon M \to Q$ es un epimorfismo entonces

$$0 \to \ker(p) \to M \xrightarrow{p} Q \to 0$$

es exacta y luego

$$0 \to F\ker(p) \to FM \xrightarrow{Fp} FQ \to 0$$

lo es; vemos así que Fp es epimorfismo. $\square$

Lema 5. *Si* $f\colon M \to N$ *es un morfismo de* R*-módulos existen un epimorfismo* $p\colon M \to X$ *y un monomorfismo* $i\colon X \to N$ *tales que* $ip = f$.

Demostración. Basta tomar $p := f|^{\operatorname{im}(M)}\colon M \to \operatorname{im}(M)$ la correstricción de f e i la inclusión de $\operatorname{im}(M)$ en N. $\square$

Demostración de (i) ⇒ (ii). Sea

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

una sucesión exacta. Aplicando el Lema 5 tenemos una epi-mono factorización $f = ip$ y $g = i'p'$ con i, i' monomorfismos y p, p' epimorfismos. Además, como p es epi la imagen de i coincide con la de f y como i' es mono el núcleo de p' coincide con el de g. Dado que $\ker(g) = \operatorname{im}(f)$, esto dice que $\operatorname{im}(i) = \ker(p')$. Se tiene entonces el siguiente diagrama de diagonales exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & 0 & & \\
& X \arrow[ur] \arrow[dr, tail, "i"] & & & \\
M' \arrow[ur, two heads, "p"] \arrow[rr, "f"] & & M \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, two heads, "p'"] & & M'' \\
& & & Y \arrow[ur, tail, "i'"] \arrow[dr] & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0
\end{tikzcd}$$

Como F preserva monos, epis, y sucesiones exactas cortas, el siguiente diagrama tiene todas sus diagonales exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & 0 & & \\
& FX \arrow[ur] \arrow[dr, tail, "Fi"] & & & \\
FM' \arrow[ur, two heads, "Fp"] \arrow[rr, "Ff"] & & FM \arrow[rr, "Fg"] \arrow[dr, two heads, "Fp'"'] & & FM'' \\
& & & FY \arrow[ur, tail, "Fi'"'] \arrow[dr] & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0
\end{tikzcd}$$

En particular $\operatorname{im}(Fi) = \ker(Fp')$. Como Fi' es mono y Fp es epi,

$$\operatorname{im}(Ff) = \operatorname{im}(FiFp) = \operatorname{im}(Fi) = \ker(Fp') = \ker(Fi'Fp') = \ker(Fg)$$

como buscábamos probar. $\square$

Comentarios sobre categorías abelianas

Vamos a definir una familia general de categorías para las cuales este tipo de argumentos puede formalizarse. Lo haremos por pasos.

Definición 1. Sea A una categoría. Decimos que un objeto $a \in A$ es *inicial* si para cada $x \in A$ existe un único morfismo $a \to x$, y *terminal* si para cada $x \in A$ existe un único morfismo $x \to a$. Un objeto que es tanto terminal como inicial se dice un objeto *cero*.

Ejercicio 2. *Probar que un objeto cero (resp. inicial, terminal) es único salvo isomorfismo.*

Fijamos en lo que sigue una categoría A con un objeto cero $0 \in A$. Dados $x, y \in A$, notamos $0\colon x \to y$ al morfismo dado por la composición

$$x \xrightarrow{\exists!} 0 \xrightarrow{\exists!} y.$$

(Co)núcleos y (co)imágenes. A continuación formulamos una definición general de (co)imágenes y (co)núcleos. Sea $f\colon x \to y$ un morfismo en A.

Un *núcleo* de f es un morfismo $i\colon k \to x$ tal que:

I) $fi = 0$;
II) si $j\colon z \to x$ es tal que $fj = 0$, entonces j se factoriza de forma única a través de i:

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r, "i"] & x \arrow[r, "f"] & y \\
z \arrow[u, dashed, "\exists!"] \arrow[ur, "j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Un *conúcleo* de f es un morfismo $p\colon y \to c$ tal que:

I) $pf = 0$;

II) si $q\colon y \to z$ es tal que $qf = 0$, entonces q se factoriza de forma única a través de p:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] & y \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "q"'] & c \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\ & & z \end{tikzcd}$$

Los núcleos son únicos salvo isomorfismo único. Frecuentemente diremos que k es el núcleo de f, y lo notaremos $\ker(f)$, aunque estrictamente hablando el morfismo i es parte —relevante y esencial— de la definición. De igual manera que antes, los conúcleos son únicos salvo isomorfismo único; empleamos la notación $\operatorname{coker}(f)$.

Ejercicio 3. *Si* $i\colon k \to x$ *es un núcleo de* f, *entonces es* i *es un monomorfismo. Dualmente, los conúcleos son epimorfismos.*

La *imagen* de f es $\operatorname{im}(f) := \ker(\operatorname{coker}(f))$ y su *coimagen* es $\operatorname{coim}(f) := \operatorname{coker}(\ker(f))$. Estrictamente hablandos, estos no son sólo objetos si no morfismos. Tenemos el siguiente diagrama donde los morfismos indicados son los dados por las distintas propiedades universales de núcleos y conúcleos:

$$\begin{tikzcd} \ker(f) \arrow[r] & x \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads] & y \arrow[r] & \operatorname{coker}(f) \\ & \operatorname{coim}(f) \arrow[r, dashed] & \operatorname{im}(f) \arrow[u, tail] & \end{tikzcd} \tag{4}$$

Justificaremos la existencia de la flecha punteada. Por construcción, la composición $x \xrightarrow{f} y \to \operatorname{coker}(f)$ es cero, así que f se factoriza a través de $\operatorname{im}(f) = \ker(y \to \operatorname{coker}(f))$ por un único morfismo $\bar{f}\colon x \to \operatorname{im}(f)$.

Ahora, dado que

$$\ker(f) \to x \xrightarrow{f} y = \ker(f) \to x \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{im}(f) \to y = 0$$

y el morfismo $\operatorname{im}(f) \to y$ es un monomorfismo, se sigue que la composición $\ker(f) \to x \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{im}(f)$ es cero. Luego $\bar{f}$ se factoriza de forma única a través de $\operatorname{coim}(f)$, y esta induce la flecha punteada que buscábamos.

Observación 5. Si R es un anillo, en ${}_R\mathsf{Mod}$ las nociones de (co)núcleo e imagen coinciden con las usuales. La coimagen de un morfismo $f\colon M \to N$ es $\operatorname{coker}(\ker(f)) = M/\ker(f)$ y el morfismo $\operatorname{coim}(f) \to \operatorname{im}(f)$ es precisamente el morfismo dado por el primer teorema de isomorfismo.

En $\mathsf{Ban}_{\mathbb{R}}$, la categoría de espacios de Banach con las transformaciones lineales continuas, la noción de núcleo es la usual, pero la de conúcleo es $\operatorname{coker}(T\colon V \to W) = W/\overline{T(V)}$. Por tanto la imagen categórica es $\operatorname{im}(T) = \overline{T(V)}$; la clausura de la imagen como conjunto. En particular, el morfismo $V/\ker(T) = \operatorname{coim}(T) \to \operatorname{im}(T) = \overline{T(V)}$ sólo es un isomorfismo si $T(V) = \overline{T(V)}$, es decir, si T tiene imagen cerrada.

Observación 6. Cuando el morfismo $\operatorname{coim}(f) \to \operatorname{im}(f)$ es un isomorfismo, como en el caso de módulos sobre un anillo, el diagrama (4) provee una factorización de f en un epimorfismo seguido de un monomorfismo. Esto generaliza el Lema 5.

Ejercicio 7. *Probar que:*

I) *Un morfismo* $i\colon x \to y$ *es monomorfismo si y sólo si su núcleo es* $0 \xrightarrow{\exists!} x$.
II) *Un morfismo* $p\colon x \to y$ *es epimorfismo si y sólo si su conúcleo es* $y \xrightarrow{\exists!} 0$.
III) *si* $i\colon x \to y$ *es monomorfismo,* $p\colon y \to z$ *es epimorfismo y* $f\colon z \to x$ *es otro morfismo, entonces* $\ker(f) = \ker(if)$, $\operatorname{coker}(f) = \operatorname{coker}(fp)$, $\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(fp)$, *y* $\operatorname{coim}(f) = \operatorname{coim}(if)$.
IV) *se tiene que* $\operatorname{coker}(0 \to x) = 1_x$ *y* $\ker(y \to 0) = 1_y$.
V) *si* f *es tanto monomorfismo como epimorfismo, entonces* im *el morfismo canónico* $\operatorname{coim}(f) \to \operatorname{im}(f)$ *es* f.

Categorías abelianas. Decimos que A es *abeliana* si cumple las siguientes propiedades:

I) para cada $x, y \in A$ el conjunto $A(x, y)$ de morfismos tiene una estructura de grupo abeliano, de manera que la composición

$$\circ\colon A(y, z) \times A(x, y) \to A(x, z)$$

es $\mathbb{Z}$-bilineal.

II) para cada $x, y \in A$, existe un objeto $x \oplus y$ que es tanto un producto como un coproducto de x e y, y tal que los morfismos canónicos

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dr, "i_x"] & & x \\ & x \oplus y \arrow[ur, "p_x"] \arrow[dr, "p_y"] & \\ y \arrow[ur, "i_y"] & & y \end{tikzcd}$$

satisfacen

$$p_x i_x = 1_x, \qquad p_y i_y = 1_y, \qquad p_x i_y = 0, \qquad p_y i_x = 0.$$

III) todo morfismo tiene un núcleo y un conúcleo.
IV) para todo morfismo f, el morfismo canónico $\operatorname{coim}(f) \to \operatorname{im}(f)$ es un isomorfismo.

Si A cumple I), se dice *preaditiva*, si cumple tanto I) como II) es *aditiva*, y si además cumple con III), entonces se dice *preabeliana*.

El principal ejemplo de categoría abeliana es el de módulos sobre un anillo. Otros ejemplos son las categorías de grupos abelianos y las categorías de grupos abelianos finitos y finitamente generados.

Las categorías de conjuntos y anillos (unitales) no son abelianas, de hecho, ni siquiera tienen objeto cero. La categoría de grupos tampoco es abeliana. En efecto: una inclusión $i\colon H \hookrightarrow G$ tiene por coimagen a la identidad de H y por imagen a la inclusión del subgrupo normal generado por H en G. El morfismo de comparación es la inclusión $H = \operatorname{coim}(i) \hookrightarrow \langle\langle H \rangle\rangle = \operatorname{im}(i)$ sólo es un isomorfismo si H es normal.

De aquí en más asumiremos que A es abeliana.

Lema 8. *Sean* $f\colon x \to y$, $g\colon y \to z$ *morfismos tales que* $gf = 0$. *Existe entonces un único morfismo* $\mathrm{im}(f) \to \ker(g)$ *que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& y & \\
\mathrm{im}(f) \arrow[ur, tail] \arrow[rr, dashed, "!\exists"] & & \ker(g) \arrow[ul, tail]
\end{tikzcd}$$

Demostración. Usando la propiedad universal de $\ker(g)$, lo que debemos ver es precisamente que la composición $\mathrm{im}(f) \to y \xrightarrow{g} z$ es cero. Sea $i\colon \mathrm{im}(f) \to y$ el morfismo canónico. Como $gf = 0$, el morfismo g se factoriza a través del morfismo canónico $q\colon y \to \mathrm{coker}(f)$ seguido de un morfismo $\mathrm{coker}(f) \xrightarrow{h} z$. Esto dice que efectivamente $gi = hqi = h0 = 0$ como buscábamos, pues $\mathrm{im}(f) = \ker(\mathrm{coker}(f))$. □

Definición 9. Decimos que $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ es exacta si $gf = 0$ y el morfismo canónico $\mathrm{im}(f) \to \ker(g)$ es un isomorfismo.

Habiendo definido la noción de exactitud en este contexto, podemos decir que un funtor aditivo $F\colon \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ entre categorías abelianas es exacto si envía sucesiones exactas cortas a sucesiones exactas cortas.

Concluimos con algunos resultados de interés para categorías abelianas. La Observación 6 junto con el Ejercicio 7 arrojan los siguientes corolarios.

Corolario 10. *Un morfismo es un isomorfismo si y sólo si es simultáneamente un epimorfismo y un monomorfimo.* □

Corolario 11. *Si* $f\colon x \to y$ *es un morfismo en* A, *existen un epimorfismo* $i\colon z \to y$ *y un monomorfismo* $p\colon x \to z$ *tales que* $ip = f$. □

Este último corolario permite adaptar la demostración sobre las definiciones equivalentes de exactitud a este contexto.

Corolario 12. *Sea* $F\colon \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ *un funtor aditivo entre categorías abelianas. Son equivalentes.*

(i) El funtor F *es exacto;*

(ii) Para cada sucesión exacta

$$M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$$

la sucesión

$$FM' \xrightarrow{Fi} FM \xrightarrow{Fp} FM''$$

es exacta.

(iii) Para cada sucesión exacta

$$\cdots \to M_{n+1} \to M_n \to M_{n+1} \to \cdots$$

la sucesión

$$\cdots \to FM_{n+1} \to FM_n \to FM_{n+1} \to \cdots$$

es exacta. □