Clase Álgebra II

Franco Rufolo

29 de Agosto de 2023

Cocientes de grupos

Arrancamos con esto la vez pasada. Definimos, dado G grupo y $H \leq G$ un subgrupo, el conjunto cociente G/H como $G/\sim$, con $g_1 \sim g_2$ si y solo si $g_2^{-1}g_1 \in H$. Así, los elementos de G/H son de la forma

$$[g] = \overline{g} = gH = \{gh : h \in H\},$$

y son llamados coclases a izquierda. Además, se tiene una función distinguida, llamada la proyección canónica/natural/al cociente:

$$\begin{aligned} \pi : G &\longrightarrow G/H \\ g &\longmapsto \overline{g}. \end{aligned}$$

Como nos interesa estudiar grupos, nos interesaría darle una estructura de grupo a este conjunto cociente, y de paso, que la proyección canónica resulte un morfismo de grupos. Esto es, para todos $g_1, g_2 \in G$,

$$\begin{aligned} \pi(g_1 g_2) &= \pi(g_1)\pi(g_2) \\ [g_1 g_2] &= [g_1][g_2]. \end{aligned}$$

Resulta que esta operación está bien definida (en el sentido de que no depende del representante) únicamente cuando $H \trianglelefteq G$, esto es, $ghg^{-1} \in H$ para todos $g \in G$, $h \in H$.

Ejercicio: Dado G un grupo abeliano, se define su subgrupo de torsión:

$$T = \{g \in G : \mathrm{ord}(g) < \infty\}.$$

(a) Probar que, efectivamente, es un subgrupo. Probar que sin la hipótesis de abelianidad, puede no serlo.

(b) Probar que en G/T ($T \trianglelefteq G$ por abelianidad), todo elemento no nulo tiene orden infinito. Se dice que G/T es libre de torsión.

En este ejemplo se ve un poco la idea de que uno está "colapsando" las cosas del denominador.

(a) Queda como ejercicio ver que es un subgrupo. Para el contraejemplo, consideremos en $GL_2(K)$, las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un cálculo directo muestra que $A^2 = B^2 = Id$, pero

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y así

$$(AB)^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde AB tiene orden infinito. Este ejemplo es elemental, pero no inmediato; un ejemplo para lo mismo se podrá hacer mucho más fácilmente cuando veamos presentaciones de grupos.

(b) Sea $\overline{g} \in G/T$ no nulo. Esto equivale a que $g \notin T$, o lo que es lo mismo, g tiene orden infinito.

En muchas ocasiones, nos interesa saber a qué grupo "conocido" es isomorfo el cociente. Para esto, es de mucha utilidad el siguiente resultado visto la vez pasada:

Teorema: (Primer Teorema de Isomorfismo) Sean G, H grupos y $f : G \to H$ un morfismo de grupos. Entonces

$$G/_{\ker f} \simeq \mathrm{Im} f.$$

Como ya vimos, esto nos da una estrategia para dar el tipo de isomorfismo del cociente G/K: dar un morfismo que salga de G con núcleo K.

Ejemplo:

- $G/1 \simeq G$, $G/G \simeq 1$. En notación aditiva, esto es $G/0 \simeq G$, $G/G \simeq 0$.
- Vimos la vez pasada que dados $d, n \in \mathbb{N}$, $d\mathbb{Z} \supseteq n\mathbb{Z}$ si y solo si $d|n$. En este caso, $n\mathbb{Z} \trianglelefteq d\mathbb{Z}$. ¿A qué será isomorfo el cociente? Consideremos

$$\begin{aligned} f : d\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}_{\frac{n}{d}} \\ dk &\longmapsto k. \end{aligned}$$

  Queda como ejercicio ver que es un epimorfismo, y además $f(dk) = 0$ si y solo si $\frac{n}{d}|k$, si y solo si $n|dk$, si y solo si $dk \in n\mathbb{Z}$. Así, $\ker f = n\mathbb{Z}$ y por el teorema,

$$d\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_{\frac{n}{d}}.$$

  En particular, $|d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = \frac{n}{d}$.
- Dado G un grupo abeliano, consideremos el producto $G \times G$, y sea $D = \{(g, g) : g \in G\}$. Es un ejercicio fácil ver que es un subgrupo de $G \times G$, y como este es abeliano (por serlo G), es un subgrupo normal. ¿A qué es isomorfo $(G \times G)/D$? Consideremos

$$\begin{aligned} f : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto g - h. \end{aligned}$$

  Así, f es un morfismo, pues (como G es abeliano),

$$\begin{aligned} f((g, h) + (g', h')) &= f(g + g', h + h') \\ &= g + g' - (h + h') = (g - h) + (g' - h') = f(g, h) + f(g', h'). \end{aligned}$$

Además, es un epimorfismo ($f(g,1) = g$). Así, por el Primer Teorema de Isomorfismo, $(G \times G)/D \simeq G$.

Observación: No es cierto en general que $D \trianglelefteq G \times G$ (en el ejemplo vale por abelianidad). De hecho, $D \trianglelefteq G \times G$ si y solo si G es abeliano (ejercicio).

Observación/Ejemplo: No es cierto en general que si se tienen grupos G, G' y subgrupos $H \leq G$, $H' \leq G'$ con $G \simeq G'$ y $H \simeq H'$, entonces $G/H \simeq G'/H'$. Por ejemplo, tomando $G = G' = \mathbb{Z}$ y $H = n\mathbb{Z}$, $H' = m\mathbb{Z}$, con $n \neq m$, se tiene que

$$n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \simeq m\mathbb{Z},$$

pero $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \not\simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Definición/Recuerdo: Dado G grupo, se define

$$\mathrm{Aut}(G) = \{f : G \to G : f \text{ es un isomorfismo}\}.$$

Notar que se trata de un grupo con la composición de funciones.

Definición/Recuerdo: Dado G grupo y $H \leq G$ un subgrupo, se definen:

- El centralizador de H en G como

$$C_G(H) = \{g \in G : gh = hg \text{ para todo } h \in H\}.$$

(Ejercicio: es un subgrupo) Si $H = G$, se le llama a $C_G(G)$ el centro de G, y se lo denota como $Z(G)$.

- El normalizador de H en G como

$$N_G(H) = \{g \in G : gH = Hg\}.$$

(Ejercicio: es un subgrupo) Se trata del subgrupo de G más grande en el que H es normal; $H \trianglelefteq G$ si y solo si $N_G(H) = G$.

Observación/Ejercicio:

- $H \trianglelefteq N_G(H)$ (casi por definición).
- $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$ (hacerlo, es un buen ejercicio para incorporar las definiciones).

Proposición: Sean G grupo y $H \trianglelefteq G$ un subgrupo normal. Entonces $G/C_G(H)$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Aut}(H)$.

Demostración: Consideremos la función

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \mathrm{Aut}(H) \\ g &\longmapsto c_g, \end{aligned}$$

donde $c_g(h) = ghg^{-1}$. Es parecido a unos ejercicios de la guía probar que esto está bien definido, y que φ es un morfismo (la normalidad de H se usa acá). Calculemos su núcleo:

$$\ker\varphi = \{g \in G : c_g = \mathrm{id}\} = \{g \in G : ghg^{-1} = h \text{ para todo } h \in H\} = C_G(H).$$

Por el Primer Teorema de Isomorfismo, queda

$$ {}^{G}\!\big/_{C_G(H)} \simeq \mathrm{Im}\varphi(\leq \mathrm{Aut}(H)), $$

como se quería ver. ■

Corolario: Sean G un grupo y $H \leq G$ un subgrupo. Entonces $N_G(H)/C_G(H)$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Aut}(H)$. En particular, $G/Z(G)$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Aut}(G)$.

Demostración: Como $H \trianglelefteq N_G(H)$, se puede tomar $G = N_G(H)$ en la proposición para obtener lo primero (usando que $C_G(H) = C_{N_G(H)}(H)$). Lo segundo es esto de recién en el caso $H = G$, pues en ese caso, $N_G(H)/C_G(H) = G/Z(G)$. ■

El tercer teorema

Dados $H, K \subseteq G$ subconjuntos de un grupo G, definimos $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$.

Teorema: (Tercer Teorema de Isomorfismo) Sean G un grupo, $H \leq G$ un subgrupo y $N \trianglelefteq G$ un subgrupo normal. Entonces:

(i) $NH \leq G$ es un subgrupo.

(ii) $N \trianglelefteq NH$.

(iii) $N \cap H \trianglelefteq H$, y además
$$ {}^{H}\!\big/_{N \cap H} \simeq {}^{NH}\!\big/_{N}. $$

Una forma más fácil de recordar el enunciado es hacer el siguiente diagrama de subgrupos:

$$
\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, dash] & \\
 & NH \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
H \arrow[dr, dash] & & N \arrow[dl, dash] \\
 & N \cap H \arrow[d, dash] & \\
 & 1 &
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo: Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, consideremos los subgrupos $a\mathbb{Z}, b\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$. Aplicando el teorema, con $N = a\mathbb{Z}$ y $H = b\mathbb{Z}$, queda que

$$ {}^{b\mathbb{Z}}\!\big/_{a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}} \simeq {}^{a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}}\!\big/_{a\mathbb{Z}}. $$

Entendamos un poco más esto. Tenemos que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ es un subgrupo, y por lo que ya vimos, esto dice que existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$. Veamos que $d = (a : b)$. Como $a, b \in d\mathbb{Z}$, se tiene $d|a$ y $d|b$. Si $c|a, b$, como $d \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $d = ax + by$, y así,

$$c|ax + by = d,$$

de donde $d = (a : b)$.

Por otra parte, tenemos $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$. De manera similar a lo de recién, sale que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = [a : b]\mathbb{Z}$ (ejercicio). En conclusión, el isomorfismo queda

$$b\mathbb{Z}\big/[a : b]\mathbb{Z} \simeq (a : b)\mathbb{Z}\big/a\mathbb{Z}.$$

Mirando sus órdenes, y usando lo que vimos hace un rato, queda

$$\frac{[a : b]}{b} = \frac{a}{(a : b)}$$
$$(a : b)[a : b] = ab.$$

Ejercicio: Sean G grupo y $H \trianglelefteq G$ un subgrupo normal tales que

$$(|H| : |G/H|) = 1.$$

Probar que H es el único subgrupo de G de orden $|H|$.

El segundo teorema

Partimos originalmente de un grupo y un subgrupo normal. Con eso, construimos un grupo nuevo, el cual comenzamos a estudiar. Dimos el teorema de la correspondencia (también a veces llamado el Cuarto Teorema de Isomorfismo), que dice exactamente cuáles son sus subgrupos. Uno podría preguntarse entonces qué pasa si toma un cociente por un subgrupo normal, del grupo cociente. El Segundo Teorema de Isomorfismo dice que hacer eso no tiene mucha gracia, que *no se consigue información nueva.*

Teorema: (Segundo Teorema de Isomorfismo) Sean G grupo, $H, K \trianglelefteq G$ subgrupos normales, con $H \subseteq K$. Entonces $K/H \trianglelefteq G/H$, y además

$$\frac{G\big/H}{K\big/H} \simeq G\big/K.$$

Una aplicación inmediata es la siguiente:

Ejemplo: (Cocientes de grupos cíclicos) Dado $n \in \mathbb{N}$, considero $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Sus subgrupos son proyecciones de subgrupos de $\mathbb{Z}$ que contienen a $n\mathbb{Z}$. Esto es, son de la forma $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, con $m|n$. Por el teorema,

$$\frac{\mathbb{Z}\big/n\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}\big/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}\big/m\mathbb{Z}.$$

En otras palabras, los cocientes de grupos cíclicos, son cíclicos.