Clase Álgebra II

Franco Rufolo

21 de Noviembre de 2023

Homología

Recuerdo: Un complejo de cadenas $C_\bullet$ (ó C) de A-módulos es una familia de A-módulos $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con morfismos $d_n : C_n \to C_{n-1}$ (llamados diferenciales) tales que $d_{n-1}d_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ (esto último se suele denotar $d^2 = 0$). $Z_n = Z_n(C_\bullet) = \ker d_n \subseteq C_n$ es el submódulo de los n-ciclos de $C_\bullet$, y $B_n = B_n(C_\bullet) = \mathrm{Im} d_{n+1} \subseteq C_n$ es el submódulo de los n-bordes de $C_\bullet$.

Dado que $d^2 = 0$, se tiene $B_n \subseteq Z_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Si $B_n = Z_n$, el complejo es exacto en el lugar n, pero en general, la contención puede ser estricta. Resulta interesante definir algún objeto que mida, en algún sentido, cuán lejos está el complejo de ser exacto en un lugar fijo.

Definición: Sea $C_\bullet$ un complejo de cadenas de A-módulos. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se define la homología de $C_\bullet$ en el lugar n como el A-módulo

$$H_n(C_\bullet) = {}^{Z_n}\!/_{B_n} = {}^{\ker d_n}\!/_{\mathrm{Im} d_{n+1}}.$$

Observación: Un complejo de cadenas $C_\bullet$ es exacto en el lugar $n \in \mathbb{Z}$ si y solo si $H_n(C_\bullet) = 0$.

Ejemplos:

- Dado M un A-módulo,

$$\underline{M} = \ldots \to 0 \to 0 \to \underbrace{M}_{0} \to 0 \to 0 \to \ldots$$

  es un complejo de cadenas. En este caso, $Z_0 = M$, $Z_n = 0$ para $n \neq 0$ y $B_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$H_n(\underline{M}) = \begin{cases} M & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- Dado M un A-módulo,

$$\ldots \xrightarrow{\mathrm{id}} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{\mathrm{id}} M \xrightarrow{0}\to \ldots$$

  es un complejo de cadenas. Como es exacto, tiene homología cero en cada lugar.

- $0 \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{1} \xrightarrow{\cdot 12} \underbrace{\mathbb{Z}}_{0} \xrightarrow{\pi} \underbrace{\mathbb{Z}_6}_{-1} \to 0$ es un complejo de cadenas (donde se entiende que se extiende por ceros a los costados), pues $\pi(12k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. En este caso,

$$\begin{aligned} Z_1 = 0, B_1 &= 0 \\ Z_0 = 6\mathbb{Z}, B_0 &= 12\mathbb{Z}, \\ Z_{-1} = \mathbb{Z}_6, B_{-1} &= \mathbb{Z}_6 \end{aligned}$$

  por lo que

$$H_n(C_\bullet) = \begin{cases} 6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

  Alternativamente, se podría haber observado que la suesión es exacta en los lugares 1 y -1, por lo que la homología en esos lugares es 0.

- El siguiente es un complejo de $\mathbb{Z}$-módulos:

$$C_\bullet = \ldots \to \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\mu_3} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\mu_2} \underbrace{\mathbb{Z}_6}_{1} \xrightarrow{\mu_2} \underbrace{\mathbb{Z}_4}_{0} \xrightarrow{\mu_3} \underbrace{\mathbb{Z}_6}_{-1} \xrightarrow{\mu_2} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\mu_2} \mathbb{Z}_4 \to \ldots$$

  donde $\mu_k(x) = kx$ (notar que son morfismos). En este caso,

$$\begin{aligned} Z_n = 2\mathbb{Z}_4, B_n &= 2\mathbb{Z}_4 \text{ si } n \equiv 0(3) \\ Z_n = 2\mathbb{Z}_6, B_n &= 2\mathbb{Z}_6 \text{ si } n \equiv 1(3) \\ Z_n = 3\mathbb{Z}_6, B_n &= 3\mathbb{Z}_6 \text{ si } n \equiv 2(3), \end{aligned}$$

  y luego $H_n(C_\bullet) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definición: Sea $C_\bullet$ un complejo de cadenas. Un subcomplejo de $C_\bullet$ es un complejo $D_\bullet$ tal que $D_n \subseteq C_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, y $d_n^C(D_n) \subseteq D_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$; sus diferenciales son los de $C_\bullet$ restringidos y correstringidos.

Definición: Sean $C_\bullet$ y $D_\bullet$ dos complejos de cadena. Un morfismo de complejos $f : C_\bullet \to D_\bullet$ es una familia de morfismos de A-módulos $f_n : C_n \to D_n$, que conmutan con los diferenciales. Esto es,

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "d_n^C"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ D_n \arrow[r, "d_n^D"] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Recuerdo: Un morfismo de complejos $f : C_\bullet \to D_\bullet$ induce un morfismo en homología para cada $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \overline{f}_n : H_n(C_\bullet) &\longrightarrow H_n(D_\bullet) \\ \overline{x} &\longmapsto \overline{f(x)} \end{aligned}$$

Definición: Un morfismo de complejos $f : C_\bullet \to D_\bullet$ es un cuasi-isomorfismo si $\overline{f}_n$ es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Observación: Tener un complejo $C_\bullet = \ldots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ equivale a tener un complejo $\ldots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to 0$, un módulo M y un morfismo de complejos

$$\begin{array}{rcccccc} P_\bullet = \ldots & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \\ \underline{M} = & & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Más aún, el complejo original es exacto si y solo si este morfismo es un cuasi-isomorfismo: para la ida, $H_n(C_\bullet) = 0$ si $n \neq 0$, y con $n = 0$, como $H_0(P_\bullet) = P_0/\mathrm{Im} d_1 = P_0/\ker\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon} : {}^{P_0}\!\diagup_{\ker\varepsilon} &\longrightarrow M \\ \overline{x} &\longmapsto \varepsilon(x) \end{aligned}$$

es el isomorfismo del primer teorema de isomorfismo. Para la vuelta, de la hipótesis se concluye inmediatamente que $H_n(P_\bullet) = 0$ si $n \neq 0$, y para $n = 0$, como el morfismo

$$\begin{aligned} H_0(P_\bullet) = {}^{P_0}\!\diagup_{\mathrm{Im} d_1} &\xrightarrow{\overline{\varepsilon}_0} M \\ \overline{x} &\longmapsto \varepsilon(x) \end{aligned}$$

es un isomorfismo, por un lado, $\varepsilon(x) = 0$ si y solo si $\overline{x} = \overline{0}$, es decir, si y solo si $x \in \mathrm{Im} d_1$. Por otro lado, para todo $m \in M$ existe $\overline{x} \in P_0/\mathrm{Im} d_1$ tal que $\varepsilon(x) = m$, lo cual implica que ε es un epimorfismo, concluyendo la prueba de que $C_\bullet$ es exacto.

Los complejos como el de recién, de ser exactos, reciben un nombre.

Definición: Sea M un A-módulo. Una resolución de M es un complejo de cadenas $P_\bullet$ con un morfismo $\varepsilon : P_0 \to M$ tal que

$$\ldots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

es exacto. ε se dice un morfismo de aumentación, y este complejo se llama el complejo aumentado de $P_\bullet$.

La observación previa nos dice que si pensamos a los A-módulos M como complejos via $\underline{M}$, las resoluciones de ellos dan una buena aproximación (en algún sentido) a ellos.

Veamos un ejemplo de una resolución concreta:

Ejemplo: Sea $G = G_n = \langle t \rangle$. Viendo a $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$ módulo trivial, la siguiente es una resolución de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo:

$$\ldots \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{\cdot N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\cdot(1-t)} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\cdot N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\cdot(1-t)} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0,$$

donde $N = \sum\limits_{i=0}^{n-1} t^i$, $\varepsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$.

Primero que nada, notar que es un complejo, y que $\mathrm{Im}\varepsilon = \mathbb{Z}$. Ahora bien,

- $\ker\varepsilon = \left\{ \sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^i : \sum\limits_{i=0}^{n-1} t^i = 0 \right\}$. Así, si $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^i \in \ker\varepsilon$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^i = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^i - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \underbrace{(t^i - 1)}_{= p_i(t)(1-t)} \in \mathrm{Im} \cdot (1-t).$$

- Si $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^i \in \ker\cdot(1-t)$,

$$\begin{aligned} 0 = (1-t)\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^i &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^i - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^{i+1} \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}_n} \lambda_i t^i - \sum_{i\in\mathbb{Z}_n} \lambda_{i-1} t^i = \sum_{i\in\mathbb{Z}_n} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) t^i, \end{aligned}$$

  de donde $\lambda_i = \lambda_{i-1}$ para todo i. Luego, $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^i = \lambda_0 \sum\limits_{i=0}^{n-1} t^i \in \mathrm{Im}\cdot N$.

- Notar que $Nt = N$. Luego, si $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^i \in \ker\cdot N$,

$$0 = N \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^i = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i}_{=\lambda} N = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda t^i,$$

  de donde $\lambda = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i = 0$. Así,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i t^i = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i t^i - \lambda_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i t^i - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \underbrace{(t^i - 1)}_{=p_i(t)(1-t)} \in \mathrm{Im}\cdot(1-t).$$

Para terminar, notar que cada módulo de la resolución es $\mathbb{Z}G$-libre.

Comentario: En otras etapas de la vida académica, es posible que se topen con términos de la forma

- Homología singular/simplicial/celular.
- Homología de grafos.
- Homología de grupos.
- Homología de Hochschild.

Siempre se trata de la misma idea que estuvimos trabajando: se tiene un complejo de cadenas, y se obtienen de él sus grupos de homología. La diferencia radica en cómo se construye el complejo de cadenas a partir de lo que se quiere estudiar.

Por ejemplo, en Topología seguramente vean cómo a partir de un espacio topológico, construir lo que se llama el complejo singular, que es un complejo de $\mathbb{Z}$-módulos (aunque se puede hacer sobre un anillo arbitrario A), y su homología es la homología singular del espacio. Esta mide, en cierta forma, los agujeros del espacio topológico en cuestión, y permite distinguirlo de otros, por ejemplo. Para la homología simplicial y celular pasa lo mismo: se construyen complejos (llamados simplicial y celular, respectivamente), y la homología de dichos complejos son la homología simplicial y celular.

En el caso de la homología de Hochschild, dada una R-álgebra A, se construye un complejo de cadenas de R-módulos, y su homología es la Homología de Hochschild. En este caso, no hay una interpretación clara de qué mide esta teoría de homología en general, como en los espacios topológicos, pero en grado cero, por ejemplo, es $H_0(A) = A/[A, A]$.