Clase Álgebra II

Franco Rufolo

14 de Noviembre de 2023

Producto Tensorial

Para empezar, veamos un ejercicio que quedó de la vez pasada.

Ejercicio: $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$ como anillos.

Sea $\varphi : \mathbb{Z}[i] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi(a + bi, x) = xa + xbi$. Esta función es balanceada, por lo que induce un morfismo de grupos abelianos $\overline{\varphi} : \mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dado por

$$\overline{\varphi}((a + bi) \otimes x) = xa + xbi.$$

Más aún, es un morfismo de anillos, pues

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(((a + bi) \otimes x)((a' + b'i) \otimes x)) &= \overline{\varphi}((aa' - bb' + (ab' + a'b)i) \otimes xx') \\ &= xx'(aa' - bb') + xx'(ab' + a'b)i,\end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(((a + bi) \otimes x))\overline{\varphi}(((a' + b'i) \otimes x')) &= (xa + xbi)(x'a' + x'b'i) \\ &= xx'aa' - xx'bb' + (xx'ab' + xx'a'b)i \\ &= xx'(aa' - bb') + xx'(ab' + a'b)i.\end{aligned}$$

Resta entonces ver que es un isomorfismo. Que es un monomorfismo es molesto de ver a mano, ya que los elementos del dominio son sumas de tensores elementales, por lo que en lugar de hacer eso, busquemos la inversa.

Definamos $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ por $\psi(a + bi) = 1 \otimes a + i \otimes b$, y verifiquemos que es la inversa de $\overline{\varphi}$:

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}\psi(a + bi) &= \overline{\varphi}(1 \otimes a + i \otimes b) = a + bi \\ \psi\overline{\varphi}((a + bi) \otimes x) &= \psi(xa + xbi) = 1 \otimes xa + i \otimes xb = a \otimes x + bi \otimes x = (a + bi) \otimes x.\end{aligned}$$

Extensión de escalares

Dados dos anillos R y S, un morfismo de anillos $f : R \to S$ y un S-módulo M, se lo puede ver como un R-módulo vía $r \cdot m = f(r)m$ (ejercicio de la guía 6). Esto es conocido como *restricción de escalares.* La idea ahora será, en la misma situación que recién, pero con M un R-módulo, darle una estructura de S-módulo. Para esto, se puede ver a S como un (S, R)-bimódulo, con acción a izquierda por multiplicación, y a derecha por restricción de escalares. Así, se puede considerar $S \otimes_R M$, que es un S-módulo (a izquierda).

Esta construcción se puede hacer en el caso particular en el que $R \subseteq S$, y f es la inclusión. De hecho, de esta manera se pueden formalizar argumentos que alguna vez se han hecho antes en la carrera. Por ejemplo, cuando en Álgebra Lineal se demuestra que una transformación lineal autoadjunta en un espacio de dimensión finita tiene las raíces de su característico en $\mathbb{R}$, en el caso real se considera la matriz de la transformación, y se la piensa sobre los complejos. Lo que se está haciendo allí es extender escalares de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

Otro ejemplo de esto está dado por la localización:

Ejemplo: Sean A un anillo conmutativo, $S \subseteq A$ multiplicativamente cerrado y M un A-módulo. Entonces, se puede extender escalares a A_S via $\iota : A \to A_S$, $\iota(a) = \frac{a}{1}$, de manera que $A_S \otimes_A M$ es un A_S-módulo, que es isomorfo a M_S.

La extensión de escalares está relacionada con la restricción de escalares como sigue. Si $f : R \to S$ es un morfismo de anillos, M es un R-módulo y N un S-módulo, hay un isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_S(S \otimes_R M, N) \simeq \mathrm{Hom}_R(M, f^*N),$$

donde f^*N es la restricción de escalares de N (hay un ejercicio de esto en la guía). De hecho, en la guía tienen para probar que la extensión de escalares preserva módulos libres, proyectivos, y finitamente generados.

Módulos Playos

Recuerdo: Dada una sucesión exacta corta de R-módulos $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ y un R-módulo a derecha N, se tiene que

$$N \otimes_R M' \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes f} N \otimes_R M \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes g} N \otimes_R M'' \longrightarrow 0$$

es exacta (esto es, el funtor $N \otimes_R -$ es exacto a derecha). En general, no es cierto que el funtor $N \otimes_R -$ preserve monomorfismos, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Consideremos la inclusión $\iota : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, que es un monomorfismo. Esta induce un morfismo $\mathrm{id} \otimes \iota : \mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, pero el primero es isomorfo a $\mathbb{Z}_n$ y el último es 0. Luego, el morfismo inducido no es un monomorfismo.

Los módulos que hacen de tensorizar un funtor exacto reciben un nombre:

Definición: Un R-módulo a derecha M se dice playo si el funtor $M \otimes_R -$ es exacto.

Es decir, un R-módulo a derecha M es playo si el funtor $M \otimes_R -$ preserva monomorfismos.

Observación: Con la proposición de que $M \otimes_R -$ es exacto a derecha, se puede probar fácilmente que extender escalares preserva módulos finitamente generados: sean $f : R \to S$ un morfismo de anillos y N un R-módulo a izquierda finitamente generado. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que existe un epimorfismo $\pi : R^n \to N$. Luego, $\mathrm{id} \otimes \pi : S \otimes_R R^n \to S \otimes_R N$ es un epimorfismo, pero $S \otimes_R R^n \simeq S^n$ como S-módulos a izquierda, deduciendo lo deseado.

Ejemplos:

- El ejemplo anterior a la definición muestra que $\mathbb{Z}_n$ no es $\mathbb{Z}$-playo para ningún $n \in \mathbb{N}$.
- $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo (ejercicio de la guía), y no es playo: consideremos el monomorfismo $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dado por la multiplicación por 2; este induce $\mathrm{id} \otimes f : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$, el cual cumple
$$(\mathrm{id} \otimes f)\Big(\overline{\frac{1}{2}} \otimes 1\Big) = \overline{\frac{1}{2}} \otimes 2 = \overline{\frac{1}{2}} \otimes 2 \cdot 1 = \overline{\frac{1}{2}} \cdot 2 \otimes 1 = \overline{1} \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0,$$
por lo que no es un monomorfismo.

Proposición: Sea $(M_i)_{i \in I}$ una familia de R-módulos a derecha. Entonces,
$$\bigoplus_{i \in I} M_i \text{ es playo } \iff M_i \text{ es playo para todo } i \in I.$$

Demostración: La ida es un ejercicio de la guía, por lo que veamos la vuelta. Para esto, sea $f : N \to T$ un monomorfismo de R-módulos. El morfismo inducido es $\mathrm{id} \otimes f : M \otimes_R N \to M \otimes_R T$, donde M denota la suma directa. Estamos en la siguiente situación:
$$\begin{tikzcd}
(\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes_R N \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes f"] & (\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes_R T \arrow[d] \\
\bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N) \arrow[u] \arrow[r, dashed, "\varphi"] & \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R T)
\end{tikzcd}$$
en donde las flechas verticales son los isomorfismos dados por: el de la izquierda es
$$(m_i \otimes n_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} \iota_i(m_i) \otimes n_i,$$
y el de la derecha es
$$(m_i)_{i \in I} \otimes t \mapsto (m_i \otimes t)_{i \in I}.$$
Así, se tiene el morfismo φ, que queda definido por
$$(m_i \otimes n_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} \iota_i(m_i) \otimes n_i \mapsto \sum_{i \in I} \iota_i(m_i) \otimes f(n_i) \mapsto \sum_{i \in I} \iota_i(m_i \otimes f(n_i)),$$
es decir, $\varphi = \bigoplus_{i \in I} \mathrm{id}_{M_i} \otimes f$. Como cada M_i es playo, cada una de estas es un monomorfismo, por lo que φ es monomorfismo. Como $\mathrm{id} \otimes f$, la que queríamos ver que es un monomorfismo, es φ compuesta y pre-compuesta por isomorfismos, es un monomorfismo, como queríamos ver. ■

Recordemos que tenemos el siguiente resultado:

Proposición: Sea P un R-módulo a derecha proyectivo. Entonces P es playo.

La vuelta a la proposición no vale, por ejemplo:

Ejemplo: Dado un anillo conmutativo A y $S \subseteq A$ multiplicativamente cerrado, el A-módulo a derecha A_S es playo (ejercicio de la guía). En particular, si $A = \mathbb{Z}$ y $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $A_S = \mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo a derecha playo, pero no proyectivo.

Ejemplo: Con el anterior y el resultado de antes, $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}$ es playo, pero no es proyectivo ni inyectivo, pues $\mathbb{Q}$ no es proyectivo, ni $\mathbb{Z}$ inyectivo.

Coproducto en CRing/CAlg

Hace unas clases, quedó pendiente el coproducto en la categoría CRing de anillos conmutativos. Estamos en condiciones de responder esa pregunta.

Sean A, B, M tres R-álgebras, con R un anillo conmutativo, y sean $f_A : A \to M$, $f_B : B \to M$ morfismos de R-álgebras. Definiendo $f' : A \times B \to M$ vía $f'(a, b) = f_A(a) f_B(b)$, una cuenta muestra que es R-balanceada. Luego, existe una única $f : A \otimes_R B \to M$ morfismo de R-módulos tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\iota"'] & M \\ A \otimes_R B \arrow[ur, dashed, "\exists! f"'] & \end{tikzcd}$$

dicho morfismo está dado por $f(a \otimes b) = f'(a, b)$ en tensores elementales. Además, resulta un morfismo de R-álgebras:

$$\begin{aligned} f((a \otimes b)(a' \otimes b')) = f(aa' \otimes bb') &= f_A(aa') f_B(bb') = f_A(a) f_A(a') f_B(b) f_B(b') \\ &= f_A(a) f_B(b) f_A(a') f_B(b') = f(a \otimes b) f(a' \otimes b'), \end{aligned}$$

donde se usó que M es conmutativa. Notar que $f \iota_A(a) = f(a \otimes 1) = f_A(a) f_B(1) = f_A(a)$, y similarmente $f \iota_B = f_B$.

Ahora bien, si se tiene un morfismo de R-álgebras $\tilde{f} : A \otimes_R B \to M$ tal que $\tilde{f} \iota_A = f_A$ y $\tilde{f} \iota_B = f_B$, entonces

$$\tilde{f}(a \otimes b) = \tilde{f}((a \otimes 1)(1 \otimes b)) = \tilde{f}(a \otimes 1) \tilde{f}(1 \otimes b) = \tilde{f} \iota_A(a) \tilde{f} \iota_B(b) = f_A(a) f_B(b) = f(a \otimes b).$$

Luego, $A \otimes_R B$ cumple la propiedad universal de $A \coprod B$, por lo que son isomorfos. Notar que sin la conmutatividad de M, la prueba no funcionaba, y de hecho, en Alg, el coproducto **no** es el producto tensorial. Moralmente, algo similar pasa en Ab y Grp, donde en el primero el coproducto es la suma directa, y en el segundo no.

Ejemplo: Si R es un anillo conmutativo,

$$\underbrace{R[x] \otimes_R \ldots \otimes_R R[x]}_{n} \simeq R[x_1, \ldots, x_n]$$

como R-álgebras.

En el caso particular $R = \mathbb{Z}$, como una $\mathbb{Z}$-álgebra conmutativa es lo mismo que un anillo conmutativo, se tiene que el coproducto en CRing está dado por el producto tensorial sobre $\mathbb{Z}$.

A modo de comentario, el coproducto de arbitrarios objetos en estas categorías está dado también por el producto tensorial, pero para el caso de infinitos objetos, hay que definirlo con cuidado, y no nos vamos a meter en eso.