ÁLGEBRA II
SEGUNDO CUATRIMESTRE 2023
AUTOMORFISMOS DE UN PRODUCTO DIRECTO EN EL CASO DE ÓRDENES COPRIMOS

Teorema 1. *Sean G y H dos grupos finitos de órdenes n y m repsectivamente. Si n y m son coprimos, entonces el morfismo de grupos*

$$\Gamma\colon \operatorname{Aut}(G) \times \operatorname{Aut}(H) \to \operatorname{Aut}(G \times H), \qquad (\phi, \psi) \mapsto \phi \times \psi$$

es un isomorfismo.

Demostración. El morfismo en cuestión siempre es un monomorfismo, independietemente de las hipótesis sobre n y m. Esto se sigue de que si $\phi, \phi' \in \operatorname{Aut}(G)$ y $\psi, \psi' \in \operatorname{Aut}(H)$ entonces

$$(\phi \times \psi)(g, h) = (\phi(g), \psi(h))$$

coincide con

$$(\phi' \times \psi')(g, h) = (\phi'(g), \psi'(h))$$

para todo $(g, h) \in G \times H$ si y sólo si $\phi(g) = \phi'(g)$ para todo $g \in G$ y $\psi(h) = \psi'(h)$ para todo $h \in H$. Es decir, si y sólo si $\phi = \phi'$ y $\psi = \psi'$.

Debemos ver ahora que si $f\colon G \times H \to G \times H$ es un automorfismo, entonces existen $\phi \in \operatorname{Aut}(G)$, $\psi \in \operatorname{Aut}(H)$ tal que $f = \phi \times \psi$. Notemos $f(g, h) =: (f_1(g, h), f_2(g, h))$ a las coordenadas del par $f(g, h)$.

Usaremos que si $(g, h) \in G \times H$ entonces

$$\operatorname{ord}((g, h)) = [\operatorname{ord}(g), \operatorname{ord}(h)].$$

Se sigue de esta propiedad que, si $g \in G$, entonces $\operatorname{ord}(g, 1) = \operatorname{ord}(g)$. Luego, como f es automorfismo, debe ser $\operatorname{ord}(f(g, 1)) = \operatorname{ord}(g)$. Este número divide a $|G|$, y por tanto es coprimo con $|H|$. Como a su vez

$$\operatorname{ord}(f(g, 1)) = [\operatorname{ord}(f_1(g, 1)), \operatorname{ord}(f_2(g, 1))],$$

esto dice que $f_2(g, 1) = 1$. O sea, que

$$f(g, 1) = (f_1(g), 1) \qquad (\forall g \in G).$$

Simétricamente,

$$f(1, h) = (1, f_2(h)) \qquad (\forall h \in H).$$

Como para cada par (g, h) es

$$f(g, h) = f(g, 1)f(1, h) = (f_1(g), 1)(1, f_2(h)) = (f_1(g), f_2(h))$$

resulta entonces que, como funciones,

$$f = f_1 \times f_2.$$

Para concluir la demostración es suficiente probar que f_1 y f_2 son automorfismos. Lo probamos para f_1; el caso de f_2 es análogo.

Que f_1 es un morfismo se sigue de que es una composición de morfismos de grupos: en concreto, el morfismo $g \in G \mapsto (g, 1) \in G \times H$ seguido de f y luego de la proyección $G \times H \to G$. Por último, como para cada $g \in G$

$$(g, 1) = \mathrm{id}(g, 1) = f^{-1}f(g, 1) = f^{-1}(f_1(g), 1) = ((f^{-1})_1(f_1(g)), 1),$$

es $\mathrm{id} = f_1^{-1} \circ f_1$ y similarmente $f_1 \circ f_1^{-1} = \mathrm{id}$. Esto muestra que f_1 es biyectiva y concluye la demostración. $\square$