Prueba de oposición. Ayudantes de Segunda 2009.

Debido a una seria de consultas surgidas tras el anuncio de lo ejercicios, consideramos apropiado modificar algunos enunciados y aprovechamos para corregir algunos errores de tipeo. El jurado quiere hacerles llegar sus disculpas por las molestias ocasionadas.

Lista 1

1. Suponer que $\nabla f(x,y,z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2})$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Si $f(0,0,0) = 5$, hallar $f(1,1,2)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que existen dos funciones ϕ, ψ diferenciables en $(0,0)$ tales que
$$\phi(x,y) \leq f(x,y) \leq \psi(x,y) \qquad \text{en un entorno del origen}$$
y
$$\phi(0,0) = f(0,0) = \psi(0,0).$$
Probar que entonces f es diferenciable en $(0,0)$.

3. Estudiar la diferenciabilidad de
$$f(x,y) = \frac{\sin(x)y^4}{x^4 + y^6} \ \forall (x,y) \neq (0,0)\ ; f(0,0) = 0$$
en el origen y en el punto $(1,0)$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que existe una función lineal $l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - l(x,y)}{\|(x,y)\|^2} = 0.$$
Analizar la diferenciabilidad de f en el origen. Si lo es, hallar el plano tangente a f en el origen.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua tal que
$$f(x,0) = 1, \qquad f(0,y) = y^2 + 1.$$
¿Se puede afirmar que f es diferenciable en el origen? Justifique.

Prueba de oposición. Ayudantes de Segunda 2009.

Lista 2

1. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica se dice semidefinida positiva si

$$< Ax, x > \geq \ 0 \,, \forall x \in \mathbb{R}^n \ .$$

   (a) Demuestre que si A es semidefinida positiva y O es una matriz ortogonal, entonces $O^T \, A \, O$ también es semidefinida positiva.

   (b) Sea A una matriz simétrica. Denote por λ y Λ al menor y mayor autovalor de A, respectivamente. Pruebe que

$$\Lambda ||x||^2 \ \geq < Ax, x > \geq \ \lambda ||x||^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ .$$

   (c) Sea A una matriz simétrica. De condiciones necesarias y suficientes para que A sea semidefinida positiva, en términos de sus autovalores.

2. Sea V un K-espacio vectorial $V \neq 0$ y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Se dice que f es nilpotente si $\exists s \in \mathbb{N} / f^s = 0$.

   (a) Probar que si f es nilpotente, entonces f no es ni monomorfismo ni epimorfismo.

   (b) Si V es de dimensión n, probar que f es nilpotente $\Leftrightarrow f^n = 0$. (Sugerencia: considerar si las inclusiones $Nu(f^i) \subseteq Nu(f^{i+1})$ son estrictas o no).

   (c) Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V . Se define la transformación lineal $f : V \to V$ de la siguiente forma:

$$f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ 0 & i = n \end{cases}$$

   Probar que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z \,,\, 4y \,, -x - 3y + 4z) \ .$$

   (a) Encontrar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B$, la matriz de f en base B, sea diagonal.

   (b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcular

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n \ .$$

(c) Hallar, si es posible, una matriz P tal que

$$P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

4. (a) Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (-5,3)$ y $f(-1,1) = (5,2)$. Para dicha f, determinar $f(5,3)$ y $f(-1,2)$.

   (b) Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (2,6)$, $f(-1,1) = (2,1)$ y $f(2,7) = (5,3)$

   (c) Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$f(1,0,1) = (1,2,1), \quad f(2,1,0) = (2,1,0)\ , \quad f(-1,0,0) = (1,2,1)$$

$$g(1,1,1) = (1,1,0)\ , \quad g(3,2,1) = (0,0,1)\ , \quad g(2,2,-1) = (3,-1,2)$$

   Determinar si $f = g$.

   (d) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1,-1,1) = (2,a,-1)$, $f(1,-1,2) = (a^2,-1,1)$ y $f(1,-1,-2) = (5,-1,7)$.

5. Sean $(x_1,y_1) = (-1,1)$, $(x_2,y_2) = (0,-4/3)$, $(x_3,y_3) = (3,1/3)$, $(x_4,y_4) = (-2,0)$. Encontrar P_H, la proyección ortogonal a un subespacio de dimensión 1, que minimiza

$$\sum_{i=1}^{4} ||(x_i,y_i) - P_H(x_i,y_i)||^2\ .$$