
ÁLGEBRA II

Segundo Cuatrimestre — 2017

Práctica 8: Producto tensorial

“After a few months, though, I realized something. I hadn’t gotten any better at understanding tensor products, but I was getting used to not understanding them. It was pretty amazing. I no longer felt anguished when tensor products came up; I was instead almost amused by their cunning ways.” —Cathy O’Neil. ¹

Producto tensorial

- Sean A un \mathbb{Z} -módulo de torsión y D un \mathbb{Z} -módulo divisible. Probar que $A \otimes_{\mathbb{Z}} D = 0$.
- Probar que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.
- Sea A un anillo conmutativo y sean $I, J \trianglelefteq A$.
 - Probar que $(A/I) \otimes_A (A/J) \cong A/(I+J)$.
 - Concluir que $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_d$, con $d = \text{mcd}(m, n)$.
- Sean A un anillo, $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal bilátero y M un A -módulo a izquierda. Mostrar que existe un isomorfismo $A/\mathfrak{a} \otimes_A M \cong M/\mathfrak{a}M$.
- Sean A y B anillos, M un A -módulo a derecha, N un A - B -bimódulo y P un B -módulo a izquierda. Probar que:
 - $M \otimes_A N$ es un B -módulo a derecha;
 - $N \otimes_B P$ es un A -módulo a izquierda;
 - existe un isomorfismo natural

$$M \otimes_A (N \otimes_B P) \cong (M \otimes_A N) \otimes_B P.$$

- Sea N un A -módulo a izquierda y sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de A -módulos a derecha. Probar que existe un isomorfismo natural

$$\left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes N \cong \bigoplus_{i \in I} M_i \otimes N.$$

- Sean A un anillo, M un A -módulo a derecha y $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de submódulos de M tal que $M = \sum_{i \in I} M_i$. Probar que si N es un A -módulo a izquierda tal que $M_i \otimes_A N = 0$ para todo $i \in I$ entonces $M \otimes_A N = 0$.
- Sean \mathbb{k} un cuerpo y V y W dos \mathbb{k} -espacios vectoriales. Hallar una base de $V \otimes_{\mathbb{k}} W$ en función de bases de V y W . Concluir que si V y W son de dimensión finita, también lo es su producto tensorial.
- Sea A un anillo conmutativo y sean M y N dos A -módulos.
 - Probar que si M y N son finitamente generados, entonces $M \otimes_A N$ también lo es.
 - Probar que si M y N son proyectivos, entonces $M \otimes_A N$ también lo es.
- Producto tensorial de álgebras.** Sea \mathbb{k} un cuerpo y sean A y B dos \mathbb{k} -álgebras. Mostrar que la fórmula

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb').$$

define una estructura de \mathbb{k} -álgebra en $A \otimes_{\mathbb{k}} B$. (¡Probar que ese producto está bien definido!)

¹ <https://mathbabe.org/2011/07/20/what-tensor-products-taught-me-about-living-my-life/>

11. Sean \mathbb{k} un cuerpo, A una \mathbb{k} -álgebra y $n, m \in \mathbb{N}$. Probar que existen isomorfismos de álgebras:

- (a) $A[X] \cong \mathbb{k}[X] \otimes_{\mathbb{k}} A$;
- (b) $M_n(A) \cong M_n(\mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} A$;
- (c) $M_{nm}(A) \cong M_n(A) \otimes_{\mathbb{k}} M_m(A)$.

Módulos playos

12. Sea A un anillo.

- (a) Probar que todo A -módulo libre es playo.
- (b) Probar que todo sumando directo de un A -módulo playo es playo.
- (c) Concluir que todo A -módulo proyectivo es playo.

13. Sean A un anillo conmutativo y M y N A -módulos playos. Probar que $M \otimes_A N$ es un A -módulo playo.

[†]14. Sea

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

una sucesión exacta de A -módulos a izquierda con M'' playo. Probar que para todo A -módulo a derecha N la sucesión

$$0 \rightarrow N \otimes_A M' \rightarrow N \otimes_A M \rightarrow N \otimes_A M'' \rightarrow 0$$

es exacta.

Localización de módulos

En esta sección A es un anillo y $S \subseteq A$ es un subconjunto central multiplicativamente cerrado. El morfismo natural $A \rightarrow A_S$ nos permite ver a cualquier A_S -módulo como un A -módulo.

15. *Localización de módulos.* Sea M un A -módulo a izquierda. Probar que:

- (a) Existen un A_S -módulo a izquierda M_S y un morfismo de A -módulos $j_M : M \rightarrow M_S$ con la siguiente propiedad universal: dado un A_S -módulo a izquierda N y un morfismo de A -módulos $f : M \rightarrow N$, existe un único morfismo de A_S -módulos $\bar{f} : M_S \rightarrow N$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ j_M \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ M_S & & \end{array}$$

Equivalentemente: para todo A_S -módulo a izquierda N , la aplicación $\text{Hom}_{A_S}(M_S, N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N)$, $f \mapsto f \circ j_M$, es una biyección.

- (b) El módulo M_S es isomorfo a $A_S \otimes_A M$ como A_S -módulo.
- (c) Si para todo $s \in S$ la aplicación $m \in M \mapsto sm \in M$ es biyectiva, entonces $j_M : M \rightarrow M_S$ es un isomorfismo.
- (d) Si $f : M \rightarrow N$ es un morfismo de A -módulos, existe un único morfismo $f_S : M_S \rightarrow N_S$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ j_M \downarrow & & \downarrow j_N \\ M_S & \xrightarrow{f_S} & N_S \end{array}$$

16. Sea M un A -módulo a izquierda finitamente generado. Probar que $M_S = 0$ si y solo si existe $s \in S$ tal que $sM = 0$. ¿Qué ocurre si M no es finitamente generado?

17. *Exactitud de la localización.* Probar que para toda sucesión exacta corta de A -módulos

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0,$$

el diagrama obtenido al localizar en S

$$0 \longrightarrow M'_S \xrightarrow{f_S} M_S \xrightarrow{g_S} M''_S \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A_S -módulos. Concluir que A_S es un A -módulo plano.

18. Sea M un A -módulo a izquierda. Probar las siguientes afirmaciones.

- (a) Si M es libre entonces M_S es libre como A_S -módulo.
- (b) Si M es proyectivo entonces M_S es proyectivo como A_S -módulo.
- (c) Si M es finitamente generado entonces M_S es finitamente generado como A_S -módulo.

19. Sea M un A -módulo y sean $P, Q \subseteq M$ submódulos. Probar que:

- (a) $(P + Q)_S = P_S + Q_S$;
- (b) $(P \cap Q)_S = P_S \cap Q_S$;
- (c) $(M/P)_S \cong M_S/P_S$.