Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2017

Práctica 7: Módulos libres, proyectivos e inyectivos

1. Sean A un anillo y G un grupo. Probar que $A[X]$ y $A[G]$ son A-módulos libres.

2. Sea A un anillo conmutativo.

(a) Probar que cualquier subconjunto $\{a_1, a_2\} \subseteq A$ es linealmente dependiente. Concluir que si un ideal no nulo $I \subseteq A$ es un A-módulo libre, entonces $I \cong A$ como A-módulo –de donde sigue que I es un ideal principal.

(b) Sea $A = \mathbb{Z}[X]$. Probar que $I = \langle 2, X \rangle$ no es un A-módulo libre.

3. Probar que $\mathbb{Q}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre. ¿Es proyectivo?

†**4.** *Un producto arbitrario de módulos libres puede no ser libre.* Sea $M = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$; los elementos de M son sucesiones de números enteros indexadas por $\mathbb{N}$. El objetivo de este ejercicio es probar que M no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre. Sea N el submódulo de M formado por las sucesiones de soporte finito –es decir, aquellas que tienen finitos coeficientes no nulos. Supongamos que M es un $\mathbb{Z}$-módulo libre con base B.

(a) Probar que N es numerable.

(b) Probar que existe un subconjunto $B_1 \subseteq B$ tal que N está contenido en el submódulo N_1 generado por B_1. Probar que N_1 también es numerable.

(c) Sea $\overline{M} = M/N_1$. Probar que $\overline{M}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo libre. Deducir que si $\overline{x} \in \overline{M}$ es no nulo, entonces existen finitos enteros k tales que $\overline{x} = k\overline{y}$ para algún $\overline{y} \in \overline{M}$ ($\overline{y}$ depende de k).

(d) Sea $S = \{(b_1, b_2, b_3, \dots) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \mid b_i = \pm i! \text{ para todo } i\}$. Probar que S es no numerable y deducir que existe $s \in S$ con $s \notin N_1$.

(e) Mostrar que la suposición de que M es libre lleva a una contraddicción: Por (d) podemos elegir $s \in S$ con $s \notin N_1$. Probar que para cada entero k existe algún $y \in M$ tal que $\overline{s} = k\overline{y}$, contradiciendo ($c$).

5. *Bases duales.* Sean A un anillo y P un A-módulo a izquierda. Una *base dual* para P es una familia $\{(x_i, f_i)\}_{i \in I}$ donde $(x_i, f_i) \in P \times P^*$ para cada $i \in I$, que cumple las siguientes condiciones:

(i) para todo $x \in P$ el conjunto $\{i \in I : f_i(x) \neq 0\}$ es finito, y

(ii) para todo $x \in P$ vale la igualdad $x = \sum_{i \in I} f_i(x) x_i$.

Notar que (i) implica que la suma en (ii) tiene sentido.

(a) Mostrar que un A-módulo P es proyectivo si y solo si posee una base dual.

(b) Mostrar que un A módulo P es proyectivo y finitamente generado si y solo si posee una base dual finita.

6. Para cada A-módulo a izquierda M, sea $M^* = \mathsf{Hom}_A(M, A)$ con la estructura de A-módulo a derecha inducida por la estructura de A-módulo a derecha de A. Mostrar que si M es proyectivo y finitamente generado entonces M^* también lo es.

7. *Resoluciones proyectivas.* Sea A un anillo. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) Para cada A-módulo M existe un diagrama

$$\cdots \longrightarrow P_{p+1} \xrightarrow{d^p} P_p \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d^0} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

de A-módulos y morfismos de A-módulos que es exacto, y en el que para cada $p \in \mathbb{N}_0$ el módulo P_p es proyectivo. El morfismo ϵ se llama *aumentación*, y el diagrama obtenido al reemplzar ϵ por 0 es llamado una *resolución proyectiva* de M.

(*b*) Los A-módulos P_p pueden elegirse libres para todo $p \in \mathbb{N}_0$.

(*c*) Si A es noetheriano a izquierda y M es finitamente generado, entonces los A-módulos P_p pueden elegirse finitamente generados para todo $p \in \mathbb{N}_0$.

(*d*) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos y

$$\cdots \longrightarrow P_p \longrightarrow P_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

y

$$\cdots \longrightarrow Q_p \longrightarrow Q_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow 0$$

son resoluciones proyectivas de M y N, respectivamente, entonces existen morfismos $f_p : P_p \to Q_p$ para cada $p \geq 0$ que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_p \arrow[r] \arrow[d, "f_p"] & P_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{p-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_p \arrow[r] & Q_{p-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(*e*) Encontrar resoluciones proyectivas para

(i) un A-módulo proyectivo;

(ii) el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$;

(iii) el $\Bbbk[X]$-módulo $S = \Bbbk[X]/\langle X \rangle$.

8. Sea A un grupo abeliano finito.

(*a*) Probar que A no es un $\mathbb{Z}$-módulo proyectivo.

(*b*) Probar que A no es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

9. Probar que $\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, pero $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sí lo son.

10. Sea A un dominio de integridad y sea K su cuerpo de fracciones.

(*a*) Probar que K es un A-módulo inyectivo.

(*b*) Probar que todo K-módulo es un A-módulo inyectivo.

11. Probar que si A es un anillo de división entonces todo A-módulo es inyectivo y proyectivo.

12. Sea A un anillo. Probar que son equivalentes:

(*a*) Todo A-módulo es proyectivo.

(*b*) Todo A-módulo es inyectivo.

13. Sean G un grupo finito y $\Bbbk$ un cuerpo tal que $|G|$ es inversible en $\Bbbk$. Mostrar que todo $\Bbbk[G]$-módulo es proyectivo e inyectivo. ¿Es cierto que todo $\Bbbk[G]$-módulo es libre?

Sugerencia. Si $f : M \to N$ es un morfismo de $\Bbbk[G]$-módulos que tiene una sección k-lineal s, entonces la fórmula

$$\tilde{s}(n) = \frac{1}{|G|} \sum_g g \cdot s(g^{-1} \cdot n)$$

define una sección $\Bbbk[G]$-lineal de f.

†**14.** Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Decimos que α es un *entero algebraico* si existe $f \in \mathbb{Z}[X]$ mónico (no nulo) tal que $f(\alpha) = 0$.

(*a*) Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(*i*) El número α es un entero algebraico.

(*ii*) El ideal $I(\alpha) = \{f \in \mathbb{Z}[X] \mid f(\alpha) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}[X]$ está generado por un polinomio mónico (no nulo).

(*iii*) El anillo $\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathbb{C}$ es libre y finitamente generado como $\mathbb{Z}$-módulo.

(*iv*) Existe un subanillo $A \subseteq \mathbb{C}$, libre y finitamente generado como $\mathbb{Z}$-módulo, tal que $\alpha \in A$.

(*v*) Existe un $\mathbb{Z}$-submódulo $0 \neq M \subseteq \mathbb{C}$, libre y finitamente generado, tal que $\alpha M \subseteq M$.

Sugerencia. Para probar $(i) \Rightarrow (ii)$, considerar el ideal $I_{\mathbb{Q}}(\alpha) = \{f \in \mathbb{Q}[X] \mid f(\alpha) = 0\} \subseteq \mathbb{Q}[X]$. Mostrar que si f es un generador mónico de $I_{\mathbb{Q}}(\alpha)$, entonces $f \in \mathbb{Z}[X]$ y f genera $I(\alpha)$. Para probar $(v) \Rightarrow (i)$, fijar una base de M, llamar B a la matriz en dicha base de la transformación $\mathbb{Z}$-lineal dada por multiplicar por α, y considerar el polinomio característico de B.

(*b*) Usar el ítem anterior para probar que la suma y el producto de dos enteros algebraicos es un entero algebraico, y concluir que los enteros algebraicos forman un subanillo de $\mathbb{C}$.

Sugerencia. Un $\mathbb{Z}$-módulo finitamente generado y sin torsión es libre.