Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2017
Práctica 6: Módulos noetherianos y artinianos

Módulos noetherianos y artinianos

1. Demostrar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Un $\Bbbk$-espacio vectorial V es noetheriano si y solo si $\dim_{\Bbbk} V < \infty$.

(*b*) Una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita es noetheriana. ¿Vale la vuelta?

2. Probar que un anillo en el que todo ideal a izquierda es principal es noetheriano a izquierda.

3. Sean A un anillo, M un A-módulo a izquierda y $f \in \mathsf{End}_A(M)$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ definimos $K_n = \ker f^n$ e $I_n = \operatorname{im} f^n$. Probar que:

(*a*) si $K_1 = K_2$ entonces $K_1 \cap I_1 = 0$;

(*b*) si $I_1 = I_2$ entonces $K_1 + I_1 = M$;

(*c*) si M es noetheriano existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $K_n \cap I_n = 0$;

(*d*) si M es noetheriano y f es sobreyectivo entonces f es un automorfismo.

4. Sea $d \in \mathbb{Z}$ y sea $\sqrt{d} \in \mathbb{C}$ una raíz cuadrada de d. Probar que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es un anillo noetheriano.

5. *Anillos de matrices.* Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que un anillo A es noetheriano a izquierda, resp. a derecha, si y solo si $M_n(A)$ es noetheriano a izquierda, resp. a derecha.

6. Probar que un dominio íntegro artiniano es un cuerpo.

7. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Un grupo abeliano artiniano es de torsión.

(*b*) Un grupo abeliano es artiniano y noetheriano si y solo si es finito.

8. *Extensiones finitas de anillos.* Sean A un anillo y $B \subseteq A$ un subanillo tal que A es finitamente generado como B-módulo a izquierda. Probar que si B es noetheriano a izquierda, entonces A es noetheriano a izquierda.

9. *Álgebras de matrices formales.* Sean A y B anillos y sea M un A-B-bimódulo. Sea T el grupo abeliano $A \oplus M \oplus B$. Dados $a \in A, m \in M$ y $b \in B$, notamos por $\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$ al elemento $(a, m, b) \in T$.

(*a*) Probar que la fórmula

$$\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & m' \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & am' + mb' \\ 0 & bb' \end{pmatrix}$$

define un producto asociativo en T. Concluir que $(T, +, \cdot)$ es un anillo, el cual también notamos por $\left(\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$.

(*b*) Probar que T es noetheriano a izquierda, resp. a derecha, si y solo si A y B son noetherianos a izquierda, resp. a derecha, y M es finitamente generado como A-módulo a izquierda, resp. B-módulo a derecha.

(*c*) Probar que $T = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ no es isomorfo a su anillo opuesto.