Álgebra II

Segundo Cuatrimestre — 2017

Práctica 4: Localización

En toda esta práctica los anillos son conmutativos.

1. Sean A un anillo y $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Si $S \subseteq \mathcal{U}(A)$ entonces $A_S \cong A$.

(*b*) Si $0 \in S$ entonces $A_S \cong 0$.

2. Sean A un anillo, $f \in A$ y $S = \{1, f, f^2, \dots\}$. Probar que $S \subseteq A$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado y que

$$A_S \cong A[X]/(Xf - 1).$$

3. Sean A un anillo, $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado e $I \subseteq A$ un ideal. Sea $\bar{S}$ la imagen de S por la aplicación canónica $A \to A/I$. Probar que $(A/I)_{\bar{S}} \cong A_S/IA_S$.

4. Sean A un anillo, $S, T \subseteq A$ subconjuntos multiplicativamente cerrados de A y T' la imagen de T por la aplicación canónica $A \to A_S$. Probar que $U = \{st : s \in S,\ t \in T\}$ es un subconjunto de A multiplicativamente cerrado y que $(A_S)_{T'} \cong A_U$.

5. Sean A un anillo y $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado.

(*a*) Supongamos que A es un dominio de integridad. Mostrar que la aplicación canónica $A \to A_S$ es inyectiva.

(*b*) Encontrar condiciones necesarias y suficientes para que la aplicación canónica $A \to A_S$ sea inyectiva.

6. Sean A un anillo y $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}(A)$. Mostrar que $S = A \setminus \mathfrak{p}$ es un conjunto multiplicativamente cerrado. En general, escribimos $A_{\mathfrak{p}}$ en lugar de $A_{A \setminus \mathfrak{p}}$.

†**7.** Sea X un espacio métrico y sea $A = C(X)$ el anillo de las funciones continuas $X \to \mathbb{R}$. Probar que para cada $x_0 \in X$ el conjunto $S(x_0) = \{f \in A : f(x_0) \neq 0\}$ es multiplicativamente cerrado. ¿Es inyectiva la aplicación canónica $A \to A_S$?

8. Sean $A = C(\mathbb{R})$, $U = (0,1)$ y $S = \{f \in A : f \text{ no se anula en el intervalo } (0,1)\}$.

(*a*) Probar que S es multiplicativamente cerrado en A.

(*b*) Sea $r : C(\mathbb{R}) \to C(U)$ la restricción de funciones. Mostrar que existe un único morfismo $\bar{r} : C(\mathbb{R})_S \to C(U)$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} C(\mathbb{R}) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & C(U) \\ C(\mathbb{R})_S \arrow[ur, dotted, "\bar{r}"'] & \end{tikzcd}$$

(*c*) Mostrar que $\bar{r}$ es un isomorfismo.

†**9.** Sean A un anillo, $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado y $f : A \to A_S$ la aplicación canónica.

(*a*) Mostrar que si $I \subseteq A_S$ es un ideal, entonces $f^{-1}(I)$ es un ideal de A. De esta forma se obtiene una aplicación $f^* : \mathsf{Id}(A_S) \to \mathsf{Id}(A)$ del conjunto de ideales de A_S al conjunto de ideales de A.

(*b*) Mostrar que f^* preserva inclusiones e intersecciones y que es inyectiva.

(*c*) Si $J \subseteq A$ es un ideal, entonces J está en la imagen de f^* sii $J = f^{-1}(JA_S)$ sii ningún elemento de S es un divisor de cero en A/J.

(*d*) Mostrar que $f^*(\operatorname{Spec} A_S) \subseteq \operatorname{Spec} A$ de manera que, por restricción, obtenemos una inyección $f^* : \operatorname{Spec} A_S \to \operatorname{Spec} A$. La imagen de esta aplicación es exactamente $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{p} \cap S = \varnothing\}$.

†**10.** Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo y $\mathfrak{p} = (p)$ el ideal primo de $\mathbb{Z}$ correspondiente. Mostrar que si $I \subseteq \mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$ es un ideal no nulo, entonces existe $r \in \mathbb{N}_0$ tal que $I = p^r\mathbb{Z}_p$.